

## Wybrane zagadnienia dynamiki oddziaływania pojazdów szynowych z torem

*Artykuł poświęcony jest przeglądowi wybranych zjawisk, istotnych dla inżynierów i kadry zarządzającej w kolejnictwie. Zjawiska dynamiczne występujące w oddziaływaniu pojazdów szynowych z torem są złożone i z tego względu znane jedynie wybranym specjalistom. W pracy zasygnalizowane zostały wybrane wyniki badań eksperymentalnych przeprowadzone na rzeczywistym układzie pojazd-tor oraz wyniki badań teoretycznych i numerycznych. Wyniki analizy wskazują na duże znaczenie znajomości tych zjawisk, gdyż mają one wpływ na bezpieczeństwo i komfort oraz koszty utrzymania linii kolejowych.*

### 1. WSTĘP

Niniejsza treść dotycząca eksploatacji budowanych torów i pojazdów w warunkach zwiększonych wymagań użytkowych, związanych ze wzrostem prędkości pojazdów i obciążenia zmusza do uwzględnienia efektów dynamicznych oddziaływania pojazd szynowy – tor w zakresie wyższych częstotliwości. Wykorzystywanie nowych technologii wymaga uwzględniania różnorodnych zjawisk dynamicznych. Jednym z ważnych elementów są obowiązujące jeszcze przepisy bezpieczeństwa oparte na kryterium relacji sił  $Y/Q$ , które wynikają z zależności statycznych w układzie koło-szyna [1]. Rozpowszechnienie faktów związanych z wynikami badań dynamicznych dotyczących procesów wykołowania jest zarówno ważne jak i niezbędne [2]-[4]. Kryteria  $Y/Q$  szeroko stosowane w kolejnictwie są dotychczas jednym z najważniejszych kryteriów systemu bezpieczeństwa pojazdów szynowych.

Innym zagadnieniem, na które do niedawna brak jednolitego poglądu jest problem poprawnego doboru twardości układu koło/szyna ze względu na minimalizację zużycia kół i szyn kolejowych, a także wpływu twardości kół na degradację toru. Fakt ten był przedmiotem dyskusji, która odbyła się podczas Konferencji zorganizowanej w Zakopanem w 2011 roku „Nowoczesne Technologie i Systemy Zarządzania w Kolejnictwie”. Wykazano wówczas, że koła produkowane przez Amsted Rail, tzw. „koła Griffin'a” pomimo wyższej twardości nie zniszczą bardziej szyn (torów) PLK aniżeli europejskie koła niższej twardości używane w kraju a nawet zmniejszają zużycie kół i szyn i to ponad trzykrotnie. Wyniki badań eksperymentalnych podane zostały w pracy [5].

Następnym błędnym poglądem, który można znaleźć w podręcznikach dotyczących kolejnictwa jest nadal powszechne mniemanie, że zagadnienia dynamiczne są trudne do analizy, więc można zagadnienie uprościć przyjmując, że nadwyżka dynamiczna wynosi 15-25 % obciążenia statycznego. Zatem wystarczy ograniczyć analizę do statyki. Niekiedy przyjmowano nadwyżkę dynamiczną w wysokości 30% obciążenia statycznego. Dopiero umożliwienie pomiarów szybkozmiennych pozwoliło na potwierdzenie doświadczalne analizy teoretycznej, z której wynikało, że nadwyżka dynamiczna w przypadku okresowego rozkładu podkładów podpierających szyny klasycznym węzłem przytwierdzenia nadwyżka może być wielokrotnie większa od obciążenia statycznego, [6].

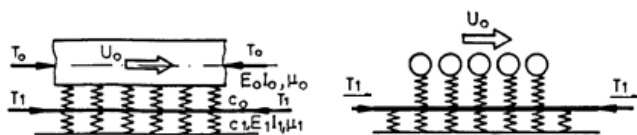
Wymienimy jeszcze kilka zjawisk, których inżynierowie kolejnictwa nie znają dotychczas dostatecznie dobrze. Należą do nich faliste zużycie szyn określane jako korugacje i fale poślizgowe. Tego typu nierównomierne zużycie szyn nie było praktycznie rozpoznane w kraju jeszcze w latach 80-tych ubiegłego wieku. Niektórzy badacze znali zjawisko falistości szyn z literatury i sądzili, że występuje ono tylko w Europie Zachodniej. Zjawisko zostało już częściowo poznane, ale przyczyny powstawania i rozwoju są nadal w pełni nieznanne, [7]. Warto zauważyć, że usuwanie korugacji przez specjalistyczne szlifowanie jest zabiegiem kosztownym. Podobne zjawisko występuje na kołach. Jest ono w naturalny sposób usuwane przez hamulce klockowe lub przetaczanie. Tu możemy dodać, że po szlifowaniu pozostaje okresowy rozkład naprężeń własnych w szynach, co powoduje znacznie szybszy rozwój falistości aniżeli w szynach nowych. Podobne, a nawet większe problemy stwarzają fale o większej długości na powierzchniach tocnych kół,

nazywane poligonalizacją [8,9].

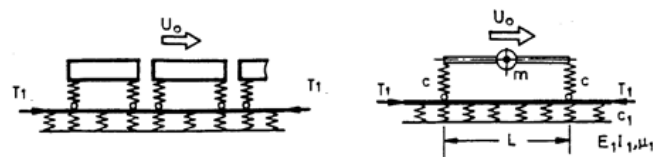
Zrozumienie zjawisk powstawania wyżej opisanych nierówności potrzebna jest m.in. podstawowa wiedza dotycząca propagacji fal w ośrodkach ciągłych. Znajomość propagacji fal biegnących w ośrodkach dyspersyjnych generowanych przez ruchome źródła [10] oraz przez ruchome i oscylujące źródła generujące fale z uwzględnieniem prędkości grupowej tych fal [11] pozwala na wyjaśnienie zachodzących zjawisk w strukturach ciągłych nieograniczonych. Jeżeli jednak uwzględnimy ponad to przestrzenną okresowość struktury, w której propagują się fale. Są to: okresowe podparcie szyn lub torów, (estakady), okresowość kół i cykliczność. Taka wiedza umożliwia określenie parametrów zapewniających istnienie pasm zanikania lub eliminację pasm przenoszenia badanej struktury periodycznej [12,13]. Wybrane aspekty wyżej omawianych zagadnień przedstawimy w niniejszej pracy.

## 2. MODELOWANIE W BADANIACH TEORETYCZNYCH

Aby opisać globalne oddziaływanie układu pojazd-tor możemy założyć, że rozważany układ jest nieskończony. Zaniebujemy wówczas oddziaływanie początku i końca pociągu, co możemy częściowo oszacować badając obciążenie rozłożone na zadanym odcinku wykorzystując superpozycję funkcji Heviside'a w rozwiązaniu uzyskanym w sposób, który podany został w pracy [10]. Problem stateczności ruchu układów nieskończonej długości podano m.in. w [14]. Proponowany sposób modelowania jest wprawdzie uproszczony, gdyż nie uwzględnia sprzężeń – poprzeczno-wzdłużnych, ale umożliwia uwzględnienie zjawiska nieliniowości oddziaływania oraz jej wpływ na parametry krytyczne rozważanych układów, [14]. Odmienne, dyskretne sposoby modelowania układu pojazd szynowy – tor został przedstawiony na rysunku 2. Pomimo uproszczenia związanego z przyjęciem belki o nieskończonej długości uwzględnia się zaburzenia (fale) wywołane przez inne oscylatory lub inne punkty oddziaływania oscylatora dwupunktowego modelującego np. wózek.



Rys. 1 - Nieskończony układ belki i gęsto rozłożonych oscylatorów oddziałujących z belką na sprężystym podłożu

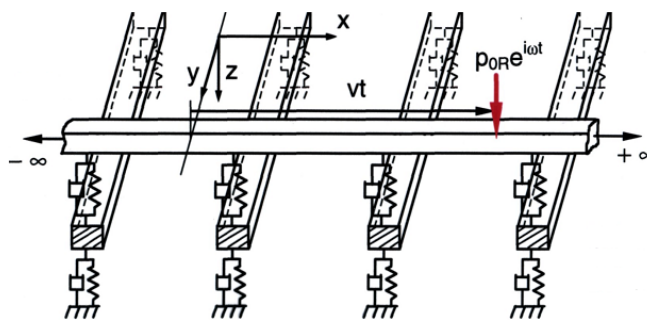


Rys. 2.- Nieskończone układy modelujące dyskretne oddziaływanie układu toru z pojazdem

Ten sposób modelowania wymaga poprawnego rozwiązania uogólnionego zagadnienia Mathews'a dotyczącego oddziaływania ruchomego oscylującego obciążenia skupionego na układ ciągły z uwzględnieniem lub bez uwzględnienia okresowej struktury toru. Tak sformułowane zagadnienie z wykorzystaniem techniki podanej w [11] - [13] zostało przedstawione w pracy [15]. Szczegółową analizę stateczności w przypadku układu nieliniowego przedstawionego na rysunku 2 podano m.in. w pracy [16]. Przypadek modelowania toru belkami oddziałującymi z okresowo ułożonymi podkładami wymuszonymi ruchomymi, oscylującymi siłami został przedstawiony na rysunku 3. Modelowanie układu z uwzględnieniem okresowego rozkładu w przestrzeni wymaga analitycznego uzyskania rozwiązania z zastosowaniem teorii Floquet'a, a następnie rozwiązanie zagadnienia poprzez poszukiwanie rozwiązania w postaci całkowitej o postaci:

$$W(X, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(X, \lambda) \exp[i\lambda(X - V\tau) + i\Omega\tau] d\lambda. \quad (1)$$

gdzie:  $W$  - jest przemieszczeniem,  $X$  - zmienną przestrzenną  $\lambda$  - jest zespoloną liczbą falową,  $\Omega$  - bezwymiarową częstością,  $\tau$  - bezwymiarowym czasem,  $i$  - urojoną jednostką.

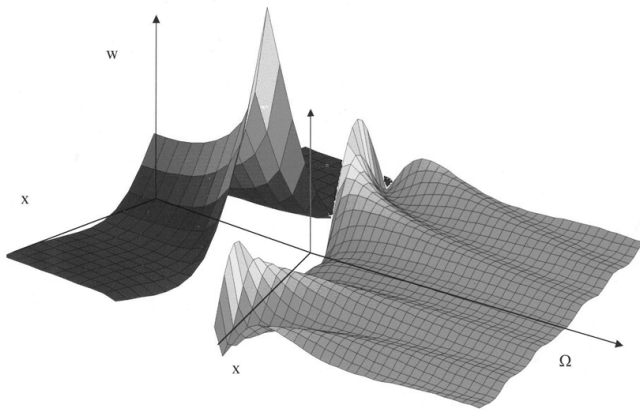


Rys. 3. Modelowanie toru jako układu okresowo podpartych belek z uwzględnieniem ruchomego oscylującego obciążenia

Dodatkowe utrudnienie powoduje uwzględnienie podatności podkładów. Upraszczając zagadnienie i rozważając problem pojedynczej, okresowo podpartej belki możemy analizować propagację zaburzeń w szynie przed poruszającą się i oscylującą siłą oraz za źródłem zaburzeń.

## 3. WYBRANE WYNIKI BADAŃ

Na rysunku 4 możemy zobaczyć przemieszczenia belki na sprężystym podłożu modelującym szynę lub tor w zależności od odległości od źródła zaburzeń i częstości  $W(x, \Omega)$ .

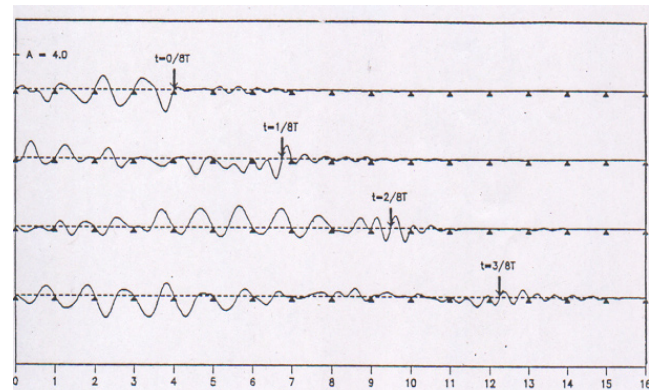


Rys 4 -Przemieszczenia belki na sprężystym podłożu w funkcji odległości od źródła i częstotliwości

Na rysunku tym widzimy, że w przypadku braku tłumienia przemieszczenia również zanikają w miarę wzrostu odległości od źródła harmonicznego wymuszenia tworząc zanikającą falę stojącą. Jednak w przypadku wymuszenia o częstotliwości większej od częstotliwości drgań własnych wzbudzone są fale biegnące od źródła, które nie zanikają. Wraz z dalszym wzrostem częstotliwości maleje amplituda tych fal i ich długość. Przypadek zanikania fal w układzie idealnie sprężystym otrzymujemy również w przypadku układu okresowego w przestrzeni. Efekt podobny do silnego tłumienia z dyssypacją energii powodujemy przy zadanej przestrzennej okresowości w zakresie częstotliwości, którą nazywamy *pasmem zanikania*. Nadmienimy, że w przypadku struktury okresowej idealnie sprężystej, struktura okresowa nie stanowi przeszkody propagującym się falom. Fale nie zanikają. Jakościowa różnica propagacji zaburzeń może wystąpić przy dowolnie małej różnicy częstotliwości. Istotne jest tylko to, aby pomiędzy obu częstotliwościami wymuszenia znajdowała się granica między pasmem przenoszenia i pasmem zanikania. W realnym torze przypadek pasma przenoszenia jest niekorzystny. Zaburzenia generowane przez każdy zestaw kołowy oddziałują wówczas znacznie intensywniej na sąsiadujące zestawy pojazdu szynowego a także na wiele więcej węzłów przytwierdzenia aniżeli w paśmie zanikania. Aby przeciwdziałać niekorzystnym zjawiskom występującym u układach o strukturze okresowej stosuje się efekt odstrojenia „mistuning”.

Przemieszczenia szyny w przypadku ruchomego oscylującego w poszczególnych chwilach oscylacji o okresie  $T$  podano na rysunku 5. Są to chwile  $t=0$ ,  $T/8$ ,  $T/4$  i  $3T/8$ . Możemy zauważyć znacznie mniejsze przemieszczenia przed źródłem zaburzeń aniżeli za nim. Jest to związane z faktem, że z uwagi na efekt Dopplera struktura przed źródłem ma inną długość komórki aniżeli za poruszającym się źródłem. Można lepiej zrozumieć rozważane zjawisko badając przemieszczenia w paśmie przenoszenia i paśmie zanikania. Efekt Dopplera powoduje, że poruszając się w

kierunku źródła fali odbieramy falę jako krótszą od rzeczywistej a oddalając się od źródła jako dłuższą od niej. Podobne zjawisko występuje w przypadku ruchu wzdłuż struktury okresowej. Okres struktury przed źródłem wydaje się krótszy aniżeli w rzeczywistości a za źródłem dłuższy.



Rys 5. Przemieszczenia szyny w przypadku ruchomego oscylującego obciążenia w chwilach  $t=0$ ,  $T/8$ ,  $T/4$  i  $3T/8$

Poza tym istotną kwestią wpływającą na zmniejszenie amplitudy przed źródłem zaburzeń jest prędkość transportu energii określona przez prędkość grupową fali w danej strukturze, określoną zależnością:

$$V_{gr} = d\omega/dk, \quad (2)$$

gdzie  $\omega$  – oznacza częstotliwość,  $k$  – liczbę falową.

Wyjaśnimy ten fakt na przykładzie belki na sprężystym podłożu. Rozważmy równanie ruchu najbardziej uproszczonego modelu belki – belkę Bernoulli’ego- Eulera na sprężystym podłożu.

$$EI w_{,xxxx} + \rho w_{,tt} + c w = P \delta(x - Vt) \quad (3)$$

gdzie:  $EJ$  – jest sztywnością,  $\rho$  – gęstością masy,  $c$  – stałą sprężystości podłoża,  $P$  – wartością siły poprzecznej,  $\delta$  – funkcją Diraca,  $x$  – współrzędną przestrzenną,  $V$  – prędkością ruchu siły a  $t$  – czasem.

Spełniając równanie (2) rozwiązaniem o postaci fali bieżącej otrzymamy następującą zależność  $V=f(k)$ :

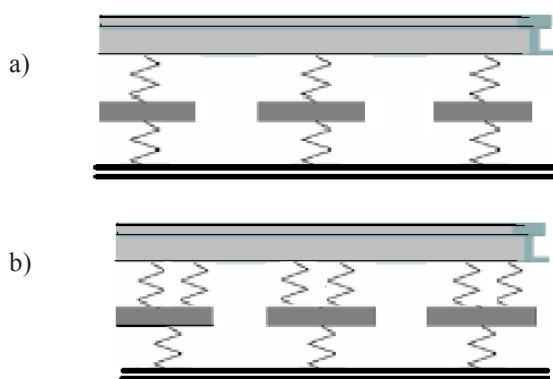
$$EI k^4 - \rho k^2 V^2 + c = 0 \quad (4)$$

Ilustracja zależności (3) oraz (4) może być przedstawiona wykreślnie. Wykres taki podano m.in. w pracy [17]. Jak wynika z relacji pomiędzy prędkością fazową i prędkością grupową przy zadanej liczbie falowej danej zależnościami (2) i (4) w przypadku prędkości ruchu  $V_1$  siły  $P$ , otrzymujemy dwie lub cztery rzeczywiste liczby falowe np.: długości fal określonych liczbami falowymi  $k_1$  i  $k_2$ . Długość fali związana jest z liczbą falową zależnością:  $\lambda = 2\pi/k$ . Ze względu na fakt, że w przypadku fali o liczbie falowej  $k_1$  prędkość grupowa jest mniejsza od prędkości fazowej fali. Wynika z tego że ta fala dłuższa rozprzestrzenia się za siłą a krótsza, której prędkość

grupowa jest większa od prędkości fazowej rozprzestrzenia się przed siłą. Moment zginający przed obciążeniem jest taki sam jak za obciążeniem, zatem amplituda fali krótszej (przed źródłem) musi być mniejsza. Tłumaczą to też przebiegi ilustrowane na Rys. 5.

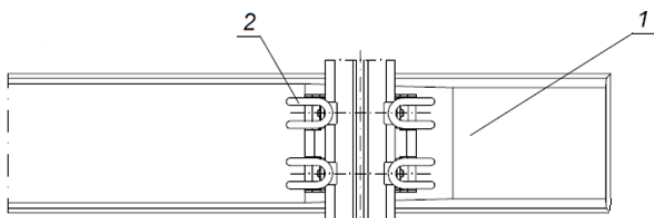
#### 4. ZAGADNIENIE DYNAMIKI TORU PROSTEGO Z PODKLADAMI KLASYCZNYMI INNEGO TYPU

Badając cechy dynamiczne tego typu układów można zauważyć brak danych dotyczących pomiaru parametru charakteryzującego sztywność węzła przytwierdzenia na obrót w płaszczyźnie XZ. Symulacje przeprowadzane z wykorzystaniem parametrów węzła innego typu nie są w tym przypadku miarodajne, gdyż zaniżają one częstotliwości drgań własnych szyny.



Rys. 6. - Schematy modelu toru z szyną przytwierdzoną klasycznie (a) oraz w przypadku węzła sprężystego przytwierdzenia o większym momencie zginającym szynę (b)

Uwzględnienie momentu zginającego szynę w węźle sprężystego przytwierdzenia jest wskazane w przypadku odpowiedniej jego konstrukcji oraz dużego momentu bezwładności podkładu  $I_{yy}$  lub dużej powierzchni oddziaływania podkładu z podsyPKą co zwiększa moment oporu na obrót względem osi Y, podobnie jak w przypadku podkładów typu „Y”.



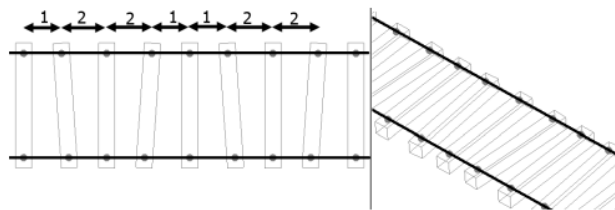
Rys. 7.- Schemat podkładu z podwójnym węzłem przytwierdzenia

W przypadku toru z podkładami typu „y” wykorzystujemy przesunięcie fazowe w oddziaływaniu z drugą szyną, co działa w dużym stopniu przeciw synchronizacji przemieszczeń w obu szynach pomimo takiej samej częstotliwości podstawowego okresu drgań. Jak wykazano dzięki przerwom w naprzemiennym

oddziaływaniu podkładów typu „y” osiągamy zaburzenie dwuokresowego charakteru wymuszenia kinematycznego zależnego od prędkości jazdy i momentu bezwładności zestawu kołowego. co jest pozytywne z dynamicznego punktu widzenia. wyniki badań podane zostały w kilku publikacjach m. in. w pracy [18].

Z wyżej podanych wyników badań można wywnioskować, że pozytywne cechy odstrojenia osiągamy stosując prawie proste podkłady ułożone pod określonymi kątami do szyn (Rys. 11) lub proste podkłady prostopadłe do szyn ułożone dwuokresowo, trójokresowo lub stochastycznie.

Na rysunku przedstawiono przypadek toru, w którym co drugi podkład jest prostopadły do szyn, a pomiędzy nimi układamy podkłady skrócone naprzemiennie w kierunku dodatnim i ujemnym. Po skróceniu możemy zaburzyć odległości pomiędzy poszczególnymi podkładami przyjmując dodatkowo różne odległości pomiędzy prostopadłymi podkładami. W przypadku przyjęcia tylko obrotu co drugiego podkładu, wtedy np. odległość „1” przyjmujemy równą 57,5 cm a odległość „2” równą 65 cm otrzymamy zaburzenie częstotliwości wzbudzonych drgań podane w pracy [17].



Rys. 8. Ułożenie podkładów z zaburzeniem prostopadłości do szyny i odległości

W przypadku rozkładu przedstawionego na rysunku 8 przy niskich prędkościach przejazdu zaburzenie ułożenia podkładów ma mały wpływ na zaburzenie częstotliwości wzbudzanych drgań, podczas gdy przy wysokich prędkościach jazdy (200 i 250 km/godz.) zaburzenie jest istotne [17].

#### 5 FALISTE UŻYCIĘ SZYN W ŁUKACH. FALE POŚLIZGOWE

Mając na uwadze dynamiczne oddziaływanie koła z szyną o zużyciu falistym zwanym falami poślizgowymi występującym w torach zakrzywionych na odciażonej szynie wykorzystano wyznaczone uprzednio parametry kół do oceny zależności przeciążeń dynamicznych (mających wpływ na degradację toru) analizując wymienione uprzednio rodzaje kół. Podane w [19], [20] wyniki symulacji wskazują, że nawet przy małej amplitudzie korugacji (0,030 mm) i małej prędkości (50 km/godz.) następuje istotny, wynoszący ponad 100% wzrost dynamicznych sił kontaktowych.

Maksymalny wzrost sił występuje w przypadku miękkich kół monoblokowych, kuto-walcowanych UIC.

W celu wykazania istotnych przyczyn generowania i rozwoju korugacji dokonano badań symulacyjnych układu koło - szyna wykazując, że nawet w przypadku niewielkiej amplitudy fali sięgającej 0,010 mm oraz niewielkiej prędkości jazdy wynoszącej 50 km/godz. następuje odrywanie się koła od szyny czego następstwem jest uderzenie – a więc dynamiczny proces, który został zilustrowany w pracy [20]. Metoda ograniczenia drgań samowzbudnych wywołanych tarciem zostało wykazane zarówno teoretycznie, m. in. w [21] jak i symulacyjnie i doświadczalnie np. [22], [23]. W pracy tej wykazano, że z pomocą dodatkowego wymuszenia można w istotny sposób obniżyć amplitudę drgań samowzbudnych generowanych tarciem. Nad zastosowaniem tej metody do ograniczenia rozwoju fal poślizgowych (korugacji powstających na odciażonej szynie w łukach) trwają nadal intensywne prace badawcze.

## 6. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiony został przegląd i krótki opis z podaniem literatury dotyczącej istotnych zjawisk, które powinny być znane ekspertom i kadrze inżynierskiej zajmującej się tematyką transportu szynowego, a w szczególności pojazdów dużej prędkości. Zjawiska dynamiczne związane z oddziaływaniem pojazdów szynowych dużej prędkości z torem są złożone i prawdopodobnie z tego względu powszechnie nieznane. W pracy zasygnalizowane zostały wybrane wyniki badań teoretycznych, numerycznych i eksperymentalnych przeprowadzone na obiekcie rzeczywistym lub symulującym układ pojazd-tor [24]. Uwzględniając fakt, że temat poprawnego doboru twardości układu koło/szyna pod kątem minimalizacji zużycia kół i szyn kolejowych, wpływu twardości kół na degradację toru [25] i zagadnień pokrewnych budził zainteresowanie podczas dyskusji na konferencjach i spotkaniach naukowych i branżowych pracę zaopatrzone w poszerzony przegląd literatury.

## Bibliografia

- [1] Elkins J.A., Carter A.; *Testing and analysis techniques for safety assessment of rail vehicle4s. Vehicle System Dynamics.* 1993 No.2, pp.185-208
- [2] Bogacz R, Frishmuth, K., Meinke P., Stefanidis J.; *Zur Stabilitaet des Spurkranzlaufs, Innotrans, BahnBau, Berlin 2002, CD*
- [3] Bogacz R., Meinke P.; *On evaluation of wheel sets and railway track quality. Scientific papers of Vehicle Institute, Warsaw Univ. of Technol. 1(60)/2006. pp.15-20.*
- [4] Matej J.; *Modelling and Computer Simulations of Bimodal Cars in Terms of Their Proneness to Derailment. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Mechanika 2010, z.234*
- [5] Bogacz R.; *O dynamicznym oddziaływaniu i zużyciu układu koło-szyna. Nowoczesne Technologie i Systemy Zarządzania w Kolejnictwie, Zakopane 2011, . pp. 43-54.*
- [6] Bogacz R.; *Recent Investigations in Dynamics of Continuous Systems Subjected to Moving Load, Vibration in Physical Systems.Vol. XXIII. Poznań, 2008, pp.35-47.*
- [7] Bogacz R., Frischmuth K. ; *On some new aspects of contact dynamics with application in railway engineering. J. Theor.and Appl. Mech., 50.1, Warsaw 2012, pp. 119-129*
- [8] Bogacz R., Kocjan M. and Kurnik W.; *Modeling and analysis of wave propagation in railway wheel rims. Machine Dynamics Problems Vol.30.1. 2006, pp.33-42.*
- [9] Bogacz R., Dzula S.; *Dynamic model of rolling non-symmetric wheel vibration, (in Polish) Scientific Papers, Radom Univ. of Technol.,1(17)2003, pp.39-46.*
- [10] Bogacz R.; *On dynamics and stability of continuous systems subjected to distributed moving load, Ing. Archiv. 1983, pp. 243-25.*
- [11] Bogacz R., Krzyżyński T. and Popp K.; *On the generalization of Mathews problem of the vibration of a beam on elastic foundation, Z. angew. Math. Mech. 69 (1989) 8, pp. 243-252.*
- [12] Bogacz R., Krzyżyński T. and Popp K.; *Application of Floquet's theorem to high-speed train/track dynamics, DSC-vol.56/DE/vol.86, Advanced automotive technologies, ASME Congress 1995, pp. 55-61.*
- [13] Bogacz R., Krzyzynski T. and Popp K.; *Wave propagation in two dynamically coupled periodic systems, Proc. International Simposium on Dynamic of Continua, Bad Honnef, Shaker Verlag 1998, pp. 55-64.*
- [14] R. Bogacz, K. Popp, *Dynamics and stability of train-track-systems, Proc. of the 2nd Intern. Conf. on Recent Advances in Structural Dynamics, Southampton 1984, pp. 711-726.*
- [15] Bogacz R., Krzyzynski T. and Popp K.; *On the application of a generalized Mathews problem to the stability analysis of hybrid transportation systems, in: Dynamical Problems in Mechanical Systems, Proc., R. Bogacz and K. Popp (eds.), Warsaw 1989, pp. 63-74.*
- [16] Bogacz R.; *On stability of interaction between continuous and lumped systems in stationary relative motion, in: Stability in the Mechanics of Continua, Schroeder F. H. (ed.), Proc. of IUTAM Symposium, Numbraecht, 1981, pp. 57-69.*
- [17] R. Bogacz, W. Czychuła and R. Konowrocki, *Influence of sleepers shape and fastening system on wheel-rail contact dynamics. ICDyn 2013, Sesimbra K08, 8p.*
- [18] C. Bajer, R. Bogacz, P. Tokaj, *Dynamics of classic and "Y-shaped" track.in: Simulation in R&D. Ed. A. Grzyb and A. Tylikowski, Krakow University of Technology 2004. pp.17-26*
- [19] Czychuła W., Bogacz R.; *Evaluation of interaction of freight car cast and forget steel wheels on track and rails. Modern Technologies and Systems Increasing the Efficiency of Managing Railway Transport. Kraków 2010. pp. 99- 109.*
- [20] Bogacz R., Kowalska Z., *Computer simulation of the interaction between a wheel and a corrugated rail, Eur. J. Mech. A/Solids 20, 2001, pp. 673-684.*
- [21] Bogacz R., Frischmuth K.; *On some new aspects of contact dynamics with application in railway engineering. J. Theor. and Appl. Mech., 50.1, Warsaw 2012, pp.119-130.*

- [22] Bogacz R., Ryczek B. *Frictional Phenomena in dynamical systems with external excitation*, *Meccanica - International Journal of the Italian Association and applied Mechanics*, Kluwer Ac. Press, 2003, pp.711-717.
- [23] Konowrocki R., Bogacz R. *Numerical analysis of vibration in a brake system for high speed train*. *Vibrations In Physical Systems*, Vol. XXV:235-240, Editors: Cz. Cempel, M. W. Dobry, Poznań 2012, ISBN 978-83-89333-43-8.
- [24] R. Bogacz, P. Meinke, *On evaluation of wheel sets and railway track quality*. *Scientific papers of Vehicle Institute, Warsaw Univ. of Technol.* 1(60)/2006. pp.15-20.
- [25] Lonsdale C., Bogacz R. and Norton M.; *Application of Pressure Poured Cast Wheel Technology for European Freight Service*. *Proc. of World Congress Railway Research*. Lille.,2011, pp. 23, 60.