

Wpływ redukcji modelu układu nośnego pojazdu na jego charakterystyki własne

Redukcja modelu układu nośnego pojazdu, poddanego analizie za pomocą metody elementów skończonych, jest stosowana w celu estymacji istotnych dla badanego układu częstotliwości drgań własnych i odpowiadających im postaci. Wybór metody redukcji decyduje o jakości wyników dynamicznej analizy układu. W pracy przeprowadzono badania numeryczne w zakresie oceny skuteczności wybranych metod redukcji modelu w rozwiązywaniu uogólnionego zagadnienia własnego dla przyjętego dyskretnego modelu układu nośnego.

1. Wprowadzenie

W analizie konstrukcji nośnej, prowadzonej za pomocą elementów skończonych, liczba stopni swobody układu osiąga dziesiątki tysięcy. Wyznaczenie częstotliwości drgań własnych oraz odpowiadających im postaci jest dla układu o tak znacznych wymiarach niecelowe. Konieczny jest wybór stopni swobody o podstawowym znaczeniu dla analizy badanego układu. Związane to jest z wyznaczeniem ograniczonej liczby najniższych częstotliwości drgań własnych i odpowiadającym im postaci. Procedurę związaną z takim działaniem nazwano redukcją układu [2].

Strategia redukcji w rozwiązywaniu uogólnionego zagadnienia własnego polega na przyjęciu podstawowych stopni swobody (*master*), istotnych dla oceny charakterystyk własnych układu, oraz pomocniczych stopni swobody układu (*slave*), które w modelu zostają pominięte.

Guyan [4] jako pierwszy zaproponował metodę statycznej redukcji układu, w której nie został uwzględniony wpływ składników bezwładnościowych modelu. Dynamiczna redukcja została zaproponowana w pracach [3 i 6]. Ze względu na zależność stosowanej w procesie redukcji macierzy transformacji od częstotliwości drgań układu, zaproponowano iteracyjne metody wyznaczania macierzy transformacji oraz zredukowanych postaci macierzy sztywności i bezwładności [7 i 8].

W artykule przeprowadzono badania numeryczne dyskretnego modelu układu nośnego pojazdu, których celem było określenie jakości stosowanych metod redukcji modelu odnośnie do wartości charakterystyk własnych w postaci częstotliwości i postaci drgań własnych. Badaniom poddano również wpływ sposobu redukcji układu na związki między wymuszeniem a odpowiedzią układu charakteryzowane zerami transmitancji [1 i 5].

Przedstawiono cztery metody przeprowadzenia redukcji modelu układu. Związane są one z odmiennym podejściem do tworzenia macierzy transformacji układu. W zależności od procedury tworzenia macierzy transformacji, wprowadzono ich podział na metody jednokrokowe, dwukrokowe i wielokrokowe.

W metodach jednokrokowych generowana jest macierz transformacji, która następnie wykorzystywana jest do wyznaczenia zredukowanych macierzy sztywności i bezwładności. W metodach dwukrokowych wartości uzyskane za pomocą metody jednokrokowej przyjmowane są jako pierwotne estymacje zredukowanego układu, a następnie wprowadzane są składniki kompensujące pominięte elementy bezwładnościowe. W metodach wielokrokowych stosowane są procedury iteracyjne dla wyznaczenia macierzy transformacji oraz zredukowanych macierzy sztywności i bezwładności.

2. Istota redukcji dyskretnego modelu układu nośnego

Równanie ruchu dyskretnego, liniowego, zachowawczego, stacjonarnego modelu układu mechanicznego o n stopniach swobody przedstawiono w postaci:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{f} \quad (1)$$

a równanie wyjść jako:

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{q} \quad (2)$$

gdzie:

$\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{q}}$ – wektory współrzędnych i przyspieszeń uogólnionych ($\mathbf{q} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$),

\mathbf{f} – wektor wymuszeń w postaci sił ($\mathbf{f} \in \mathcal{R}^{r \times 1}$),

\mathbf{y} – wektor wielkości mierzonych w postaci przemieszczeń ($\mathbf{y} \in \mathcal{R}^{p \times 1}$),

\mathbf{M}, \mathbf{K} – macierze bezwładności i sztywności
($\mathbf{M}, \mathbf{K} \in \mathcal{R}^{n \times n}$) spełniające warunki:
 $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T > 0, \mathbf{K} = \mathbf{K}^T \geq 0$,

\mathbf{B} – macierz wejść rzędu r ($\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{n \times r}$),

\mathbf{D} – macierz wyjść rzędu $p \times n$ ($\mathbf{D} \in \mathcal{R}^{p \times n}$).

W celu przeprowadzenia analizy drgań własnych układu przyjęto zerową macierz wejść ($\mathbf{B} = \mathbf{0}$). Równania opisujące uogólnione zagadnienie własne mają postać:

$$\mathbf{K}\Psi = \mathbf{M}\Psi\Lambda \quad (3)$$

gdzie:

Λ – macierz wartości własnych o wymiarach $n \times n$,
 Ψ – macierz wektorów własnych o wymiarach $n \times n$,
przy spełnieniu warunków ortogonalności

$$\Psi^T \mathbf{K} \Psi = \Lambda \quad (4)$$

$$\Psi^T \mathbf{M} \Psi = \mathbf{I} \quad (5)$$

gdzie: \mathbf{I} jest macierzą jednostkową.

Po wprowadzeniu podziału współrzędnych uogólnionych \mathbf{q} na współrzędne podstawowe \mathbf{q}_m (*master*) oraz na współrzędne pomocnicze \mathbf{q}_s (*slave*), równanie (1) przedstawiono w postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_m \\ \ddot{\mathbf{q}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{f} \quad (6)$$

Odpowiadające wyrażeniu (6) równanie uogólnionego zagadnienia własnego zapisano wzorem:

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Psi_m \\ \Psi_s \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (7)$$

gdzie: λ jest wartością własną układu.

Z zależności (7) uzyskano związek między wektorem Ψ_s a wektorem Ψ_m :

$$\Psi_s = -(\mathbf{K}_{ss} - \lambda \mathbf{M}_{ss})^{-1} (\mathbf{K}_{ms}^T - \lambda \mathbf{M}_{ms}^T) \Psi_m = \mathbf{t} \Psi_m \quad (8)$$

gdzie: \mathbf{t} jest macierzą transformacji pomiędzy Ψ_m oraz Ψ_s .

Związek między wektorem Ψ o wymiarach $n \times 1$, reprezentującym postać drgań własnych układu, a wektorem Ψ_m o wymiarach $m \times 1$ odpowiadającym kierunkom współrzędnych podstawowych \mathbf{q}_m przedstawiono w postaci:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_m \\ \Psi_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \Psi_m = \mathbf{T} \Psi_m \quad (9)$$

gdzie: \mathbf{T} jest macierzą transformacji pomiędzy Ψ oraz Ψ_m , a \mathbf{I}_m jest macierzą jednostkową rzędu m .

Podstawiając równanie (9) do równania (3), a następnie mnożąc lewostronnie przez \mathbf{T}^T uzyskano równanie opisujące uogólniony problem własny zredukowanego układu w postaci:

$$(\mathbf{K}_R - \lambda \mathbf{M}_R) \Psi_m = \mathbf{0} \quad (10)$$

gdzie: macierze sztywności \mathbf{K}_R i bezwładności \mathbf{M}_R układu po redukcji przedstawiono zależnościami:

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \quad (11)$$

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \quad (12)$$

Rozwiązanie uogólnionego zagadnienia własnego dla zredukowanego układu (10) wymaga znajomości macierzy transformacji \mathbf{t} zapisanej wzorem

$$\mathbf{t} = -(\mathbf{K}_{ss} - \lambda \mathbf{M}_{ss})^{-1} (\mathbf{K}_{ms}^T - \lambda \mathbf{M}_{ms}^T) \quad (13)$$

W celu zbadania wpływu redukcji na działanie układu konieczne jest określenie zależności między wymuszeniem \mathbf{f} , a odpowiedzią \mathbf{y} – równania (1) oraz (2). Po przeprowadzeniu transformacji Laplace'a oraz przyjęciu zerowych warunków początkowych

$\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$ uzyskano związek między transformacjami wektora wyjścia i wektora wejścia w postaci:

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(s) \mathbf{f}(s) \quad (14)$$

Transmitancję operatorową $\mathbf{H}(s)$ wyznaczono jako:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{D}(\mathbf{K} + s^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{D} \mathbf{G}(s) \mathbf{B} \quad (15)$$

gdzie: $\mathbf{G}(s)$ jest podatnością dynamiczną układu.

Transmitancja wyrażona za pomocą zależności (15) jest wymierną macierzą, której elementy $h_{ij}(s)$ są przyczynowymi funkcjami wymiernymi

$$h_{ij}(s) = \frac{a_{ij}(s)}{b_{ij}(s)}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, r \quad (16)$$

gdzie:

$a_{ij}(s)$ – licznik w postaci wielomianu zmiennej operatorowej,

$b_{ij}(s)$ – mianownik w postaci wielomianu zmiennej operatorowej.

W badaniach przyjęto, że w układzie występuje jedno wejście w postaci siły przyłożonej na kierunku wybranej współrzędnej uogólnionej oraz jedno wyjście w postaci przemieszczenia mierzonego na kierunku wybranej współrzędnej uogólnionej.

Przy tych założeniach zera transmitancji są równoważne pierwiastkom wielomianów występujących w licznikach odpowiednich skalarnych funkcji $h_{ij}(s)$ macierzy $\mathbf{H}(s)$, a bieguny są pierwiastkami wielomianów występujących w mianownikach tych funkcji.

3. Badania numeryczne oceny jakości wybranych metod redukcji modelu

Do badań przyjęto dyskretny model układu przedstawiony na rysunku 1.

Model opisano dziesięciowymiarowym wektorem współrzędnych uogólnionych \mathbf{q} .

$$\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad \dots \quad q_{10}(t)]^T \quad (17)$$

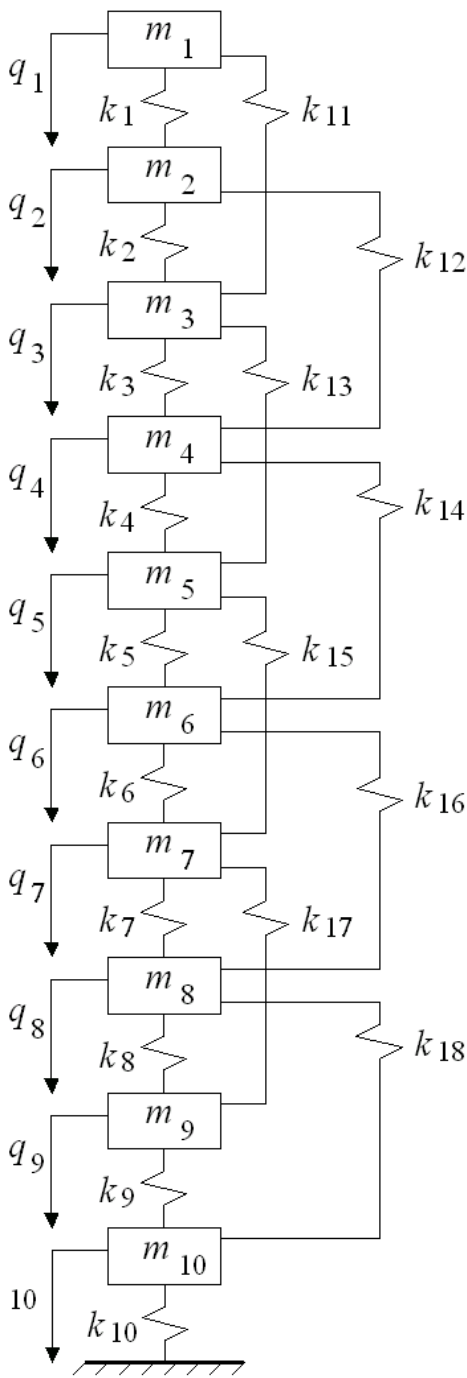
Macierz mas \mathbf{M} modelu ma postać:

$$\mathbf{M} = \text{diag}([m_1 \quad m_2 \quad \dots \quad m_{10}]) \quad (18)$$

gdzie *diag* oznacza macierz diagonalną.

Macierz sztywności \mathbf{K} przedstawiono wzorem:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & -k_1 & -k_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & K_2 & -k_2 & -k_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{11} & -k_2 & K_3 & -k_3 & -k_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{12} & -k_3 & K_4 & -k_4 & -k_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{13} & -k_4 & K_5 & -k_5 & -k_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{14} & -k_5 & K_6 & -k_6 & -k_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{15} & -k_6 & K_7 & -k_7 & -k_{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{16} & -k_7 & K_8 & -k_8 & -k_{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{17} & -k_8 & K_9 & -k_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{18} & -k_9 & K_{10} \end{bmatrix} \quad (19)$$



Rys. 1. Model układu przyjęty do badań

gdzie:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= k_1 + k_{11}, \\
 K_2 &= k_1 + k_2 + k_{12}, \\
 K_3 &= k_2 + k_3 + k_{11} + k_{13}, \\
 K_4 &= k_3 + k_4 + k_{12} + k_{14}, \\
 K_5 &= k_4 + k_5 + k_{13} + k_{15}, \\
 K_6 &= k_5 + k_6 + k_{14} + k_{16}, \\
 K_7 &= k_6 + k_7 + k_{15} + k_{17}, \\
 K_8 &= k_7 + k_8 + k_{16} + k_{18}, \\
 K_9 &= k_8 + k_9 + k_{17}, \\
 K_{10} &= k_9 + k_{10} + k_{18}.
 \end{aligned}$$

Po przeprowadzeniu wstępnych obliczeń numerycznych, przyjęto następujące wartości stałych charakterystyk masowych [kg] i sztywnościowych 10^5 [N/m] modelu:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 10, m_2 = 30, m_3 = 60, m_4 = 30, m_5 = 40, m_6 = 30, m_7 = 20, m_8 = 30, \\
 m_9 &= 10, m_{10} = 20, \\
 k_1 &= 5, k_2 = 2, k_3 = 4, k_4 = 3, k_5 = 5, k_6 = 3, k_7 = 4, k_8 = 6, k_9 = 5, k_{10} = 7, \\
 k_{11} &= k_{12} = k_{13} = k_{14} = k_{15} = k_{16} = k_{17} = k_{18} = 3.
 \end{aligned}$$

Do badań przyjęto **dwa warianty** modelu, oznaczone odpowiednio **A** oraz **B**. W wariantcie **A** przyjęto wektor współrzędnych uogólnionych jak w równaniu (17). W wariantcie **B** przyjęto wektor współrzędnych uogólnionych, których kolejność została ustalona według rosnącej wartości ilorazów wartości diagonalnych elementów macierzy sztywności do wartości diagonalnych elementów macierzy mas. Wektor współrzędnych uogólnionych dla modelu **A** ma postać:

$${}^A \mathbf{q}(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ q_3(t) \ q_4(t) \ q_5(t) \ q_6(t) \ q_7(t) \ q_8(t) \ q_9(t) \ q_{10}(t)]^T \quad (20)$$

a wektor współrzędnych uogólnionych dla modelu **B** ma postać:

$${}^B \mathbf{q}(t) = [q_3(t) \ q_2(t) \ q_5(t) \ q_4(t) \ q_6(t) \ q_8(t) \ q_7(t) \ q_{10}(t) \ q_1(t) \ q_9(t)]^T \quad (21)$$

Po rozwiązaniu [9] uogólnionego zagadnienia własnego (3), dla modelu reprezentowanego macierzami ${}^A \mathbf{M}$ oraz ${}^A \mathbf{K}$, uzyskano wartości własne ${}^A \Lambda$:

$${}^A \Lambda = \text{diag}([29,1 \ 101,6 \ 161,0 \ 175,0 \ 222,5 \ 241,3 \ 270,0 \ 287,5 \ 308,9 \ 406,2])$$

oraz macierz wektorów własnych ${}^A \Psi$:

$${}^A \Psi = \begin{bmatrix} -1,00 & -0,79 & 0,72 & -0,19 & 0,38 & -0,20 & -0,08 & -0,01 & -1,00 & 0,01 \\ -0,99 & -0,78 & 1,00 & -0,79 & 0,20 & -0,01 & -0,01 & 0,01 & 0,27 & -0,01 \\ -0,97 & -0,54 & -0,36 & 1,00 & 0,04 & -0,11 & -0,01 & -0,01 & 0,06 & 0,01 \\ -0,92 & -0,11 & -0,22 & -0,54 & -1,00 & 0,45 & 0,17 & -0,02 & -0,07 & 0,01 \\ -0,84 & 0,43 & -0,66 & -0,66 & 0,55 & 0,48 & -0,09 & 0,17 & -0,01 & -0,01 \\ -0,77 & 0,69 & -0,24 & -0,56 & -0,20 & -1,00 & -0,41 & -0,09 & 0,01 & -0,02 \\ -0,66 & 0,92 & 0,19 & 0,11 & 0,21 & -0,18 & 1,00 & -0,95 & -0,01 & 0,12 \\ -0,54 & 1,00 & 0,61 & 0,63 & -0,08 & 0,07 & 0,06 & 1,00 & -0,01 & 0,14 \\ -0,47 & 0,89 & 0,59 & 0,64 & -0,02 & 0,32 & -0,11 & -0,30 & -0,01 & -1,00 \\ -0,27 & 0,57 & 0,49 & 0,57 & -0,07 & 0,55 & -0,83 & -0,97 & 0,01 & 0,25 \end{bmatrix}$$

W celu wyznaczenia zer transmitancji modelu (15) przyjęto wektor $\mathbf{B} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ oraz wektor $\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$. Uzyskano zera transmitancji modelu ${}^A \mathbf{Z}$:

$${}^A \mathbf{Z} = [59,3 \ 119,8 \ 173,4 \ 180,4 \ 227,2 \ 242,4 \ 270,1 \ 287,5 \ 406,2]$$

Po rozwiązaniu uogólnionego zagadnienia własnego (3), dla modelu reprezentowanego macierzami ${}^B \mathbf{M}$ oraz ${}^B \mathbf{K}$, uzyskano wartości własne ${}^B \Lambda$:

$${}^B \Lambda = \text{diag}([29,1 \ 101,6 \ 161,0 \ 175,0 \ 222,5 \ 241,3 \ 270,0 \ 287,5 \ 308,9 \ 406,2]) = {}^A \Lambda$$

oraz macierz wektorów własnych ${}^B \Psi$:

$${}^B \Psi = \begin{bmatrix} -0,47 & 0,89 & 0,59 & -0,64 & 0,02 & 0,32 & -0,11 & -0,30 & 0,01 & 1,00 \\ -1,00 & -0,79 & 0,72 & 0,19 & -0,38 & -0,20 & -0,08 & -0,01 & 1,00 & -0,01 \\ -0,27 & 0,57 & 0,49 & -0,57 & 0,07 & 0,55 & -0,83 & -0,97 & -0,01 & -0,25 \\ -0,66 & 0,92 & 0,19 & -0,11 & -0,21 & -0,18 & 1,00 & -0,95 & 0,01 & -0,12 \\ -0,54 & 1,00 & 0,61 & -0,63 & 0,08 & 0,07 & 0,06 & 1,00 & 0,01 & -0,14 \\ -0,77 & 0,69 & -0,24 & 0,56 & 0,20 & -1,00 & -0,41 & -0,09 & -0,01 & 0,02 \\ -0,92 & -0,11 & -0,22 & 0,54 & 1,00 & 0,45 & 0,17 & -0,02 & 0,07 & -0,01 \\ -0,84 & 0,43 & -0,66 & 0,66 & -0,55 & 0,48 & -0,09 & 0,17 & 0,01 & 0,01 \\ -0,99 & -0,78 & 1,00 & 0,79 & -0,20 & -0,02 & -0,01 & 0,01 & -0,27 & 0,01 \\ -0,97 & -0,54 & -0,36 & -1,00 & -0,04 & -0,11 & -0,01 & -0,01 & -0,06 & -0,01 \end{bmatrix}$$

W celu wyznaczenia zer transmitancji modelu (15) przyjęto wektor $\mathbf{B} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ oraz wektor $\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$. Uzyskano zera transmitancji modelu ${}^B\mathbf{Z}$:

$${}^B\mathbf{Z} = [40,1 \ 125,9 \ 168,6 \ 202,0 \ 222,6 \ 248,8 \ 270,9 \ 290,8 \ 308,9]$$

Dla każdego z modeli, analizie numerycznej poddano trzy warianty zredukowanych wektorów uogólnionych (20) i (21), przyjmując odpowiednio osiem pierwszych ${}^A\mathbf{q}_8$ i ${}^B\mathbf{q}_8$, sześć pierwszych ${}^A\mathbf{q}_6$ i ${}^B\mathbf{q}_6$ oraz cztery pierwsze ${}^A\mathbf{q}_4$ i ${}^B\mathbf{q}_4$ współrzędne uogólnione.

Analizę numeryczną w zakresie wyznaczenia macierzy redukcji, zredukowanych macierzy sztywności i bezwładności modelu przeprowadzono z zastosowaniem czterech metod [3,4,7 i 8].

1 METODA (metoda Guyan'a)

W metodzie [3] nie uwzględniono w (13) wyrażeń związanych z wartościami własnymi. Macierz transformacji \mathbf{t}_I ma postać:

$$\mathbf{t}_I = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{ms}^T = \mathbf{t}_G \quad (22)$$

Zredukowaną macierz sztywności $\mathbf{K}_I = \mathbf{K}_G$ zapisano w postaci:

$$\mathbf{K}_I = \mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{ms}^T \quad (23)$$

a zredukowaną macierz bezwładności $\mathbf{M}_I = \mathbf{M}_G$ w postaci:

$$\mathbf{M}_I = \mathbf{M}_{mm} - \mathbf{M}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{ms}^T - \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{M}_{ms}^T + \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{M}_{ss}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{ms}^T \quad (24)$$

Po podstawieniu zredukowanych macierzy bezwładności \mathbf{M}_I oraz sztywności \mathbf{K}_I do równania na uogólniony problem własny (10) wyznaczono wartości własne i wektory własne. Częstotliwości odpowiadające wyznaczonym wartościom własnym zebrano w tabeli 1.

W celu porównania postaci drgań własnych (odpowiadającym wektorom własnym) wyznaczonych dla modelu podstawowego (3) oraz dla modelu zredukowanego (9) wprowadzono miarę w postaci ilorazu kolejnych współrzędnych wektorów własnych. Dla wektorów podobnych wartości tych ilorazów są sobie równe. W tabeli 2 przedstawiono miary podobieństwa postaci drgań własnych odpowiadających pierwszej częstotliwości drgań własnych (miar dla kolejnych postaci drgań własnych nie przedstawiono, ponieważ nie wykazywały podobieństwa).

Macierz transformacji ${}^A\mathbf{T}_{I4}$ uzyskana przy zastosowaniu I metody dla wariantu redukcji do wektora współrzędnych uogólnionych ${}^A\mathbf{q}_4$ oraz macierz transformacji ${}^B\mathbf{T}_{I4}$ uzyskana przy zastosowaniu I metody dla wariantu redukcji do wektora współrzędnych uogólnionych ${}^B\mathbf{q}_4$ mają postać:

Częstotliwości drgań własnych [rad/s] modelu podstawowego oraz wariantów zredukowanych modeli ${}^A\mathbf{q}_8$, ${}^A\mathbf{q}_6$, ${}^A\mathbf{q}_4$, ${}^B\mathbf{q}_8$, ${}^B\mathbf{q}_6$ oraz ${}^B\mathbf{q}_4$ przy zastosowaniu I metody

i	λ_i	Tabela 1					
		${}^A\lambda_{I8i}$	${}^B\lambda_{I8i}$	${}^A\lambda_{I6i}$	${}^B\lambda_{I6i}$	${}^A\lambda_{I4i}$	${}^B\lambda_{I4i}$
1	29,19	29,19	29,48	29,26	30,07	29,64	30,66
2	101,64	102,43	108,36	112,52	111,72	-	115,93
3	161,05	163,03	-	168,50	-	156,20	-
4	175,04	177,52	171,78	-	188,45	177,01	-
5	222,55	222,62	226,39	222,42	-	-	-
6	241,37	245,82	239,38	224,44	-	-	234,57
7	270,03	278,79	270,04	-	266,64	-	-
8	287,53	-	287,41	-	283,44	-	-
9	308,98	308,98	-	308,9	-	308,69	-
10	406,26	-	406,26	-	406,04	-	368,54

$${}^A\mathbf{T}_{I4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0,32 & 0,50 \\ 0 & 0 & 0,18 & 0,56 \\ 0 & 0 & 0,19 & 0,43 \\ 0 & 0 & 0,14 & 0,36 \\ 0 & 0 & 0,12 & 0,31 \\ 0 & 0 & 0,07 & 0,17 \end{bmatrix}$$

Miara podobieństwa pierwszej postaci drgań własnych modelu podstawowego do pierwszej postaci drgań własnych wariantów zredukowanych modeli ${}^A\mathbf{q}_8$, ${}^A\mathbf{q}_6$, ${}^A\mathbf{q}_4$, ${}^B\mathbf{q}_8$, ${}^B\mathbf{q}_6$ oraz ${}^B\mathbf{q}_4$ przy zastosowaniu I metody

i	Tabela 2					
	$\frac{{}^A\psi_{1i}}{{}^A\psi_{I8i}}$	$\frac{{}^A\psi_{1i}}{{}^A\psi_{I6i}}$	$\frac{{}^A\psi_{1i}}{{}^A\psi_{I4i}}$	$\frac{{}^B\psi_{1i}}{{}^B\psi_{I8i}}$	$\frac{{}^B\psi_{1i}}{{}^B\psi_{I6i}}$	$\frac{{}^B\psi_{1i}}{{}^B\psi_{I4i}}$
1	0,999	0,994	0,967	0,978	0,937	0,902
2	0,999	0,994	0,967	0,981	0,943	0,906
3	0,999	0,994	0,968	0,977	0,936	0,901
4	0,999	0,994	0,969	0,978	0,938	0,903
5	0,999	0,995	1,043	0,978	0,937	0,944
6	0,999	0,995	1,060	0,979	0,940	1,007
7	0,999	1,031	1,091	0,980	1,024	1,034
8	0,999	1,048	1,111	0,979	1,007	1,025
9	1,009	1,052	1,115	1,016	1,009	0,989
10	1,017	1,062	1,126	1,030	1,039	1,031

$${}^B\mathbf{T}_{I4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,39 & 0,04 & 0,19 & 0,35 \\ 0,12 & 0,23 & 0,06 & 0,58 \\ 0,06 & 0,50 & 0,03 & 0,40 \\ 0,06 & 0,32 & 0,03 & 0,57 \\ 0,02 & 0,77 & 0,01 & 0,18 \\ 0,04 & 0,62 & 0,02 & 0,30 \end{bmatrix}$$

Po podstawieniu zredukowanych macierzy bezwładności \mathbf{M}_I oraz sztywności \mathbf{K}_I do równania (15) wyznaczono zera transmitancji badanych wariantów zredukowanych modeli, które zebrano w tabeli 3.

Zera transmitancji modelu podstawowego oraz wariantów zredukowanych modeli ${}^A q_8, {}^A q_6, {}^A q_4, {}^B q_8, {}^B q_6$ oraz ${}^B q_4$ przy zastosowaniu I metody

Tabela 3

i	ζ_i	${}^A \zeta_{18i}$	${}^B \zeta_{18i}$	${}^A \zeta_{16i}$	${}^B \zeta_{16i}$	${}^A \zeta_{14i}$	${}^B \zeta_{14i}$
1	59,30	59,37	41,12	60,57	42,94	66,43	44,54
2	119,87	121,14	136,27	134,54	140,69	-	-
3	173,47	177,34	-	-	-	176,70	162,47
4	180,46	180,66	201,30	180,35	-	190,44	-
5	227,25	227,26	226,70	224,42	222,18	-	-
6	242,42	246,88	247,29	229,24	-	-	-
7	270,14	278,81	270,93	-	267,25	-	265,47
8	287,53	-	290,72	-	287,72	-	-
9	406,26	-	-	-	-	-	-

II METODA

W metodzie [3] macierz transformacji utworzono przez zastąpienie członów związanych z bezwładnością, wielkościami o charakterze pseudo-statycznego obciążenia. Przekształcając równanie w wyrażeniu (6), przy przyjęciu wymuszenia o charakterze harmonicznym o częstotliwości ω uzyskano związek:

$$[\mathbf{K}_{ss} - \omega^2 \mathbf{M}_{ss}] \boldsymbol{\psi}_s = -[\mathbf{K}_{sm} - \omega^2 \mathbf{M}_{sm}] \boldsymbol{\psi}_m \quad (25)$$

Po przekształceniu (20) uzyskano zależność między wektorem $\boldsymbol{\psi}_s$, a wektorem $\boldsymbol{\psi}_m$

$$\boldsymbol{\psi}_s = -[\mathbf{K}_{ss} - \omega^2 \mathbf{M}_{ss}]^{-1} [\mathbf{K}_{sm} - \omega^2 \mathbf{M}_{sm}] \boldsymbol{\psi}_m \quad (26)$$

W wyniku zastosowania rozkładu macierzy podatności w szereg dwumianowy otrzymano przekształconą zależność:

$$\boldsymbol{\psi}_s = -\mathbf{K}_{ss}^{-1} [\mathbf{I} - \omega^2 \mathbf{M}_{ss} \mathbf{K}_{ss}^{-1}]^{-1} [\mathbf{K}_{sm} - \omega^2 \mathbf{M}_{sm}] \boldsymbol{\psi}_m \quad (27)$$

a po wprowadzeniu błędu względem ω związek:

$$\boldsymbol{\psi}_s = -\mathbf{K}_{ss}^{-1} [\mathbf{K}_{sm} + \omega^2 (\mathbf{M}_{ss} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} - \mathbf{M}_{sm}) + \mathbf{o}(\omega^4)] \boldsymbol{\psi}_m \quad (28)$$

gdzie: $\mathbf{o}(\omega^4)$ oznacza błąd czwartego rzędu względem ω . Zakładając, że przy przyjęciu wyrazów pierwszego rzędu ze względu na ω^2 spełnione są równania:

$$\omega^2 \mathbf{M}_G \boldsymbol{\psi}_m = \mathbf{K}_G \boldsymbol{\psi}_m \quad (29)$$

$$\omega^2 \boldsymbol{\psi}_m = \mathbf{M}_G^{-1} \mathbf{K}_G \boldsymbol{\psi}_m \quad (30)$$

uzyskano macierz transformacji \mathbf{t}_{II} :

$$\mathbf{t}_{II} = -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} + \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{sm} - \mathbf{M}_{ss} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm}) \mathbf{M}_G^{-1} \mathbf{K}_G \quad (31)$$

Macierz sztywności \mathbf{K}_{II} i bezwładności \mathbf{M}_{II} zredukowanego układu wyznaczono według związków:

$$\mathbf{K}_{II} = \mathbf{T}_{II}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{II} \quad (32)$$

$$\mathbf{M}_{II} = \mathbf{T}_{II}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{II} \quad (33)$$

gdzie:

$$\mathbf{T}_{II} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{t}_{II} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Po podstawieniu zredukowanych macierzy bezwładności \mathbf{M}_{II} oraz sztywności \mathbf{K}_{II} do równania na uogólniony problem własny (10) wyznaczono wartości własne i wektory własne. Częstotliwości odpowiadające wyznaczonym wartościom własnym zebrano w tabeli 4.

Częstotliwości drgań własnych [rad/s] modelu podstawowego oraz wariantów zredukowanych modeli ${}^A q_8, {}^A q_6, {}^A q_4, {}^B q_8, {}^B q_6$ oraz ${}^B q_4$ przy zastosowaniu II metody

Tabela 4

i	λ_i	${}^A \lambda_{118i}$	${}^B \lambda_{118i}$	${}^A \lambda_{116i}$	${}^B \lambda_{116i}$	${}^A \lambda_{114i}$	${}^B \lambda_{114i}$
1	29,19	29,19	29,19	29,19	29,19	29,19	29,19
2	101,64	101,65	101,82	101,89	102,75	110,82	101,99
3	161,05	161,31	164,18	-	166,41	-	-
4	175,04	175,38	-	170,46	197,39	169,22	186,08
5	222,55	222,58	223,55	-	222,91	-	-
6	241,37	243,91	229,93	-	-	-	-
7	270,03	277,51	270,01	262,56	-	-	-
8	287,53	-	286,82	278,89	-	-	-
9	308,98	308,98	-	-	308,89	307,37	311,97
10	406,26	-	406,25	404,27	-	-	-

Miara podobieństwa pierwszej postaci drgań własnych modelu podstawowego do pierwszej postaci drgań własnych wariantów zredukowanych modeli ${}^A\mathbf{q}_8$, ${}^A\mathbf{q}_6$, ${}^A\mathbf{q}_4$, ${}^B\mathbf{q}_8$, ${}^B\mathbf{q}_6$ oraz ${}^B\mathbf{q}_4$ przy zastosowaniu II metody

Tabela 5

i	$\frac{{}^A\psi_{1i}}{{}^A\psi_{II8i}}$	$\frac{{}^A\psi_{1i}}{{}^A\psi_{II6i}}$	$\frac{{}^A\psi_{1i}}{{}^A\psi_{II4i}}$	$\frac{{}^B\psi_{1i}}{{}^B\psi_{II8i}}$	$\frac{{}^B\psi_{1i}}{{}^B\psi_{II6i}}$	$\frac{{}^B\psi_{1i}}{{}^B\psi_{II4i}}$
1	1,000	1,000	0,999	1,000	1,000	0,999
2	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,998
3	1,000	1,000	0,999	1,000	1,000	0,999
4	1,000	1,000	0,997	1,000	0,999	0,998
5	1,000	0,999	1,000	1,000	1,000	0,999
6	1,000	0,999	1,000	0,999	0,999	1,000
7	1,000	1,000	1,002	0,999	1,000	1,000
8	1,000	1,000	1,003	0,999	1,000	1,000
9	1,000	1,000	1,003	0,999	0,999	0,999
10	1,000	1,000	1,004	1,000	1,000	1,000

$${}^B\mathbf{T}_{II4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,76 & -0,01 & 0,05 & 0,26 \\ -0,06 & 0,18 & -0,04 & 0,95 \\ -0,19 & 0,60 & -0,04 & 0,63 \\ -0,30 & 0,31 & -0,04 & 1,04 \\ -0,02 & 0,97 & -0,01 & 0,05 \\ -0,17 & 0,80 & -0,02 & 0,38 \end{bmatrix}$$

Po podstawieniu zredukowanych macierzy bezwładności \mathbf{M}_{II} oraz sztywności \mathbf{K}_{II} do równania (15) wyznaczono zera transmitancji badanych wariantów zredukowanych modeli, które zebrano w tabeli 6.

W celu porównania postaci drgań własnych (odpowiadającym wektorom własnym) wyznaczonych dla modelu podstawowego (3) oraz dla modelu zredukowanego (9) wprowadzono miarę w postaci ilorazu kolejnych współrzędnych wektorów własnych. Dla wektorów podobnych wartości tych ilorazów są sobie równe. W tabeli 5 przedstawiono miary podobieństwa postaci drgań własnych odpowiadających pierwszej częstotliwości drgań własnych (miar dla kolejnych postaci drgań własnych nie przedstawiono, ponieważ nie wykazywały podobieństwa).

Macierz transformacji ${}^A\mathbf{T}_{II4}$ uzyskana przy zastosowaniu II metody dla wariantu redukcji do wektora współrzędnych uogólnionych ${}^A\mathbf{q}_4$ oraz macierz transformacji ${}^B\mathbf{T}_{II4}$ uzyskana przy zastosowaniu II metody dla wariantu redukcji do wektora współrzędnych uogólnionych ${}^B\mathbf{q}_4$ mają postać:

$${}^A\mathbf{T}_{II4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,05 & -0,25 & 0,13 & 1,10 \\ -0,05 & -0,28 & -0,09 & 1,29 \\ -0,05 & -0,31 & -0,10 & 1,22 \\ -0,05 & -0,29 & -0,14 & 1,12 \\ -0,04 & -0,26 & -0,12 & 0,98 \\ -0,02 & -0,16 & -0,08 & 0,58 \end{bmatrix}$$

Zera transmitancji modelu podstawowego oraz wariantów zredukowanych modeli ${}^A\mathbf{q}_8$, ${}^A\mathbf{q}_6$, ${}^A\mathbf{q}_4$, ${}^B\mathbf{q}_8$, ${}^B\mathbf{q}_6$ oraz ${}^B\mathbf{q}_4$ przy zastosowaniu II metody

Tabela 6

j	ζ_j	${}^A\zeta_{II8j}$	${}^B\zeta_{II8j}$	${}^A\zeta_{II6j}$	${}^B\zeta_{II6j}$	${}^A\zeta_{II4j}$	${}^B\zeta_{II4j}$
1	40,19	59,30	40,19	59,32	40,19	59,49	41,99
2	125,93	119,92	126,36	122,72	126,78	138,28	134,78
3	168,67	174,07	-	180,28	-	-	-
4	202,00	180,48	194,89	200,54	210,94	181,25	-
5	222,60	227,25	223,58	227,75	-	-	-
6	248,87	245,02	240,81	-	-	-	-
7	270,93	277,54	270,92	-	262,80	-	269,94
8	290,80	-	290,31	-	284,26	-	-
9	308,98	-	-	-	-	-	-

III METODA

W metodzie [7] zamiast aproksymacji w postaci pominięcia w równaniu macierzy transformacji składników wyższego rzędu względem częstotliwości, wprowadzono iteracyjny sposób jej określania. Mnożąc wyrażenie (13) przez wyrażenie $(\mathbf{K}_{ss} - \lambda\mathbf{M}_{ss})$ uzyskano po przekształceniach:

$$\mathbf{t} = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{ms}^T + \lambda\mathbf{K}_{ss}^{-1}(\mathbf{M}_{ms}^T + \mathbf{M}_{ss}\mathbf{t}) \quad (35)$$

Równanie (35) świadczy o zasadności stosowania iteracyjnej formy znajdowania postaci macierzy transformacji \mathbf{t} .

Równanie reprezentujące uogólnione zagadnienie własne dla modelu o m wektorach własnych ma postać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{mm} \\ \Psi_{sm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{mm} \\ \Psi_{sm} \end{bmatrix} \Lambda_{mm} \quad (36)$$

Po przekształceniu drugiego równania z zależności (36) uzyskano związek między macierzami Ψ_{mm} oraz Ψ_{sm} .

$$\Psi_{sm} = [-\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{ms}^T + \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ms}^T + \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}) \Psi_{mm} \Lambda_{mm} \Psi_{mm}^{-1}] \Psi_{mm} \quad (37)$$

Macierz transformacji \mathbf{t}_{III} oznaczono zatem jako:

$$\mathbf{t}_{III} = \mathbf{t}_G + \mathbf{t}_d \quad (38)$$

gdzie:

$$\mathbf{t}_d = \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ms}^T + \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}) \Psi_{mm} \Lambda_{mm} \Psi_{mm}^{-1} \quad (39)$$

Oznaczając macierz transformacji \mathbf{T} jako:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{mm} \\ \mathbf{t}_G + \mathbf{t}_d \end{bmatrix} \quad (40)$$

wyznaczono zgodnie ze wzorami (11) oraz (12) macierz sztywności \mathbf{K}_R oraz macierz bezwładności \mathbf{M}_R . Po podstawieniu wyznaczonych \mathbf{K}_R oraz \mathbf{M}_R do równania (10) na uogólnione zagadnienie własne i wykonaniu odpowiednich przekształceń uzyskano związek $\mathbf{K}_G \Psi_{mm} = [\mathbf{M}_G + (\mathbf{M}_{ms} + \mathbf{t}_G^T \mathbf{M}_{ss}) \mathbf{t}_d] \Psi_{mm} \Lambda_{mm} = \mathbf{M}_d \Psi_{mm} \Lambda_{mm}$ (41)

Ze wzoru (41) uzyskano

$$\Psi_{mm} \Lambda_{mm} \Psi_{mm}^{-1} = \mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{K}_G \quad (42)$$

Po wykorzystaniu związku (39) w równaniu (36) uzyskano ostateczną postać wzoru na macierz transformacji \mathbf{t}_d :

$$\mathbf{t}_d = \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ms}^T + \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}) \mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{K}_G \quad (43)$$

Macierz transformacji \mathbf{t}_{III} zapisano w postaci schematu iteracyjnego

$$\mathbf{t}_{III}^{(k)} = \mathbf{t}_G + \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ms}^T + \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}_{III}^{(k-1)}) [\mathbf{M}_d^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{K}_G \quad (44)$$

Macierz transformacji $\mathbf{T}_{III}^{(k)}$ ma postać:

$$\mathbf{T}_{III}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{mm} \\ \mathbf{t}_{III}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Macierz $\mathbf{M}_d^{(k-1)}$ przedstawiono związkiem:

$$\mathbf{M}_d^{(k-1)} = \mathbf{M}_G + (\mathbf{M}_{ms} + \mathbf{t}_G^T \mathbf{M}_{ss}) \mathbf{t}_d^{(k-1)} \quad (46)$$

Jako warunek zakończenia procedury iteracyjnej przyjęto spełnienie nierówności:

$$\left| \frac{\lambda_j^{(i+k)} - \lambda_j^{(i)}}{\lambda_j^{(i+k)}} \right| < \varepsilon_j \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, m \quad (47)$$

gdzie ε_j jest zadaną wartością determinującą dokładność wyników.

Po podstawieniu zredukowanych macierzy bezwładności ${}^A \mathbf{M}_{III}$ oraz sztywności ${}^A \mathbf{K}_{III}$ do równania na uogólniony problem własny (10) wyznaczono wartości własne i wektory własne. Częstotliwości odpowiadające wyznaczonym wartościom własnym zebrano w tabeli 7 – indeks (k) przy ${}^A \lambda^{(k)}$ oznacza numer iteracji.

Częstotliwości drgań własnych [rad/s] modelu podstawowego oraz wariantów zredukowanych modeli ${}^A \mathbf{q}_8$, ${}^A \mathbf{q}_6$ oraz ${}^A \mathbf{q}_4$ przy zastosowaniu III metody

Tabela 7

i	λ_i	${}^A \lambda_{III8i}^{(1)}$	${}^A \lambda_{III8i}^{(2)}$	${}^A \lambda_{III8i}^{(k)}$	${}^A \lambda_{III6i}^{(1)}$	${}^A \lambda_{III6i}^{(2)}$	${}^A \lambda_{III6i}^{(k)}$	${}^A \lambda_{III4i}^{(1)}$	${}^A \lambda_{III4i}^{(2)}$	${}^A \lambda_{III4i}^{(k)}$
1	29,19	29,19	29,19	29,19	29,26	29,19	29,19	29,64	29,21	29,19
2	101,64	102,43	101,74	101,64	112,52	105,45	101,64	-	128,17	101,64
3	161,05	163,03	161,78	161,05	168,50	167,53	161,05	156,20	-	161,05
4	175,04	177,52	175,94	175,04	-	-	175,04	177,01	170,84	175,04
5	222,55	222,62	222,59	222,55	222,42	210,32	222,55	-	-	-
6	241,37	245,82	244,71	241,37	224,44	223,09	241,37	-	-	-
7	270,03	278,79	278,13	270,03	-	-	-	-	-	-
8	287,53	-	-	287,54	-	-	-	-	-	-
9	308,98	308,98	308,98	-	308,96	308,93	-	308,69	308,29	-
10	406,26	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Miara podobieństwa postaci drgań własnych modelu podstawowego do postaci drgań własnych zredukowanego modelu ${}^A \mathbf{q}_8$ przy zastosowaniu III metody

Tabela 8

i	$\frac{{}^A \psi_{1i}}{{}^A \psi_{III8i}}$	$\frac{{}^A \psi_{2i}}{{}^A \psi_{III8i}}$	$\frac{{}^A \psi_{3i}}{{}^A \psi_{III8i}}$	$\frac{{}^A \psi_{4i}}{{}^A \psi_{III8i}}$	$\frac{{}^A \psi_{5i}}{{}^A \psi_{III8i}}$	$\frac{{}^A \psi_{6i}}{{}^A \psi_{III8i}}$	$\frac{{}^A \psi_{7i}}{{}^A \psi_{III8i}}$	$\frac{{}^A \psi_{8i}}{{}^A \psi_{III8i}}$
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998
2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Miara podobieństwa postaci drgań własnych modelu podstawowego do postaci drgań własnych zredukowanego modelu Aq_6 przy zastosowaniu III metody

Tabela 9

i	$\frac{{}^A\psi_{1i}}{{}^A\psi_{III61i}}$	$\frac{{}^A\psi_{2i}}{{}^A\psi_{III62i}}$	$\frac{{}^A\psi_{3i}}{{}^A\psi_{III63i}}$	$\frac{{}^A\psi_{4i}}{{}^A\psi_{III64i}}$	$\frac{{}^A\psi_{5i}}{{}^A\psi_{III65i}}$	$\frac{{}^A\psi_{6i}}{{}^A\psi_{III66i}}$
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
2	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
3	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
4	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
6	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
8	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
10	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

W celu porównania postaci drgań własnych (odpowiadającym wektorom własnym) wyznaczonych dla modelu podstawowego (3) oraz dla modelu zredukowanego (9) wprowadzono miarę w postaci ilorazu kolejnych współrzędnych wektorów własnych. Dla wektorów podobnych wartości tych ilorazów są sobie równe. Miary podobieństwa postaci drgań własnych odpowiadających kolejnym częstotliwościom drgań własnych dla wariantu modelu Aq_8 przedstawiono w tabeli 8, dla wariantu modelu Aq_6 w tabeli 9, a dla wariantu modelu Aq_4 w tabeli 10.

Macierz transformacji ${}^A\mathbf{T}_{III4}$ uzyskana przy zastosowaniu III metody dla wariantu redukcji do wektora współrzędnych uogólnionych Aq_4 ma postać:

$${}^A\mathbf{T}_{III4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15,40 & -12,91 & -5,61 & 4,13 \\ 50,09 & -40,82 & -17,85 & 9,56 \\ 94,71 & -76,75 & -33,25 & 16,22 \\ 124,88 & -100,95 & -43,63 & 20,54 \\ 114,78 & -92,77 & -40,07 & 18,80 \\ 80,76 & -65,22 & -28,13 & 13,03 \end{pmatrix}$$

Miara podobieństwa postaci drgań własnych modelu podstawowego do postaci drgań własnych zredukowanego modelu Aq_4 przy zastosowaniu III metody

Tabela 10

i	$\frac{{}^A\psi_{1i}}{{}^A\psi_{III41i}}$	$\frac{{}^A\psi_{2i}}{{}^A\psi_{III42i}}$	$\frac{{}^A\psi_{3i}}{{}^A\psi_{III43i}}$	$\frac{{}^A\psi_{4i}}{{}^A\psi_{III44i}}$
1	1,000	1,000	1,000	1,000
2	1,000	1,000	1,000	1,000
3	1,000	1,000	1,000	1,000
4	1,000	1,000	1,000	1,000
5	1,000	1,000	1,000	1,000
6	1,000	1,000	1,000	1,000
7	1,000	1,000	1,000	1,000
8	1,000	1,000	1,000	1,000
9	1,000	1,000	1,000	1,000
10	1,000	1,000	1,000	1,000

Po podstawieniu zredukowanych macierzy bezwładności ${}^A\mathbf{M}_{III}$ oraz sztywności ${}^A\mathbf{K}_{III}$ do równania (15) wyznaczono zera transmitancji badanych wariantów zredukowanych modeli, które zebrano w tabeli 11.

Po podstawieniu zredukowanych macierzy bezwładności ${}^B\mathbf{M}_{III}$ oraz sztywności ${}^B\mathbf{K}_{III}$ do równania na uogólniony problem własny (10) wyznaczono wartości własne i wektory własne. Częstotliwości odpowiadające wyznaczonym wartościom własnym zebrano w tabeli 12 – indeks (k) przy ${}^B\lambda^{(k)}$ oznacza numer iteracji.

Zera transmitancji modelu podstawowego oraz zredukowanych modeli Aq_8 , Aq_6 oraz Aq_4 przy zastosowaniu III metody

Tabela 11

j	ζ_j	${}^A\zeta_{III8i}^{(1)}$	${}^A\zeta_{III8i}^{(2)}$	${}^A\zeta_{III8i}^{(k)}$	${}^A\zeta_{III6i}^{(1)}$	${}^A\zeta_{III6i}^{(2)}$	${}^A\zeta_{III6i}^{(k)}$	${}^A\zeta_{III4i}^{(1)}$	${}^A\zeta_{III4i}^{(2)}$	${}^A\zeta_{III4i}^{(k)}$
1	59,30	59,37	59,30	69,70	60,57	59,46	69,74	66,43	60,64	70,90
2	119,87	121,14	120,11	134,93	134,54	126,88	134,98	-	-	137,05
3	173,47	177,34	175,00	174,53	-	-	174,53	176,70	157,62	174,58
4	180,46	180,66	180,51	-	180,35	180,32	-	190,44	182,30	-
5	227,25	227,26	227,25	210,18	224,42	212,92	210,28	-	-	-
6	242,42	246,88	245,80	239,42	229,24	228,03	239,45	-	-	-
7	270,14	278,81	278,15	269,37	-	-	--	-	-	-
8	287,53	-	-	287,53	-	-	-	-	-	-
9	406,26	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Częstotliwości drgań własnych [rad/s] modelu podstawowego oraz zredukowanych modeli ${}^B q_8, {}^B q_6$ oraz ${}^B q_4$ przy zastosowaniu III metody

Tabela 12

i	λ_i	${}^B \lambda_{III8i}^{(1)}$	${}^B \lambda_{III8i}^{(2)}$	${}^B \lambda_{III8i}^{(k)}$	${}^B \lambda_{III6i}^{(1)}$	${}^B \lambda_{III6i}^{(2)}$	${}^B \lambda_{III6i}^{(k)}$	${}^B \lambda_{III4i}^{(1)}$	${}^B \lambda_{III4i}^{(2)}$	${}^B \lambda_{III4i}^{(k)}$
1	29,19	29,48	29,20	29,19	30,07	29,20	29,19	30,66	29,21	29,19
2	101,64	108,36	102,70	101,64	111,72	103,15	101,64	115,93	103,80	101,64
3	161,05	-	166,18	161,05	-	-	161,05	-	-	161,05
4	175,04	171,78	-	175,04	188,45	176,97	175,04	-	-	175,04
5	222,55	226,39	224,52	222,55	-	-	222,55	-	209,55	-
6	241,37	239,38	235,54	241,37	-	-	241,37	234,57	-	-
7	270,03	270,04	270,03	270,03	266,64	264,98	-	-	-	-
8	287,53	287,41	287,22	287,53	283,44	281,44	-	-	-	-
9	308,98	-	-	-	-	-	-	-	339,81	-
10	406,26	406,26	406,25	-	406,04	405,59	-	368,54	-	-

W celu porównania postaci drgań własnych (odpowiadającym wektorom własnym) wyznaczonych dla modelu podstawowego (3) oraz dla modelu zredukowanego (9) wprowadzono miarę w postaci ilorazu kolejnych współrzędnych wektorów własnych. Dla wektorów podobnych wartości tych ilorazów są sobie

równe. Miary podobieństwa postaci drgań własnych odpowiadających kolejnym częstotliwościom drgań własnych dla wariantu modelu ${}^B q_8$ przedstawiono w tabeli 13, dla wariantu modelu ${}^B q_6$ w tabeli 14, a dla wariantu modelu ${}^B q_4$ w tabeli 15.

Miara podobieństwa postaci drgań własnych modelu podstawowego do postaci drgań własnych zredukowanego modelu ${}^B q_8$ przy zastosowaniu III metody

Tabela 13

i	$\frac{{}^B \psi_{1i}}{{}^B \psi_{III81i}}$	$\frac{{}^B \psi_{2i}}{{}^B \psi_{III82i}}$	$\frac{{}^B \psi_{3i}}{{}^B \psi_{III83i}}$	$\frac{{}^B \psi_{4i}}{{}^B \psi_{III84i}}$	$\frac{{}^B \psi_{5i}}{{}^B \psi_{III85i}}$	$\frac{{}^B \psi_{6i}}{{}^B \psi_{III86i}}$	$\frac{{}^B \psi_{7i}}{{}^B \psi_{III87i}}$	$\frac{{}^B \psi_{8i}}{{}^B \psi_{III88i}}$
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,838
3	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
4	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
6	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996
8	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,001	0,963
10	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,005

Miara podobieństwa postaci drgań własnych modelu podstawowego do postaci drgań własnych zredukowanego modelu ${}^B q_6$ przy zastosowaniu III metody

Tabela 14

i	$\frac{{}^B \psi_{1i}}{{}^B \psi_{III61i}}$	$\frac{{}^B \psi_{2i}}{{}^B \psi_{III62i}}$	$\frac{{}^B \psi_{3i}}{{}^B \psi_{III63i}}$	$\frac{{}^B \psi_{4i}}{{}^B \psi_{III64i}}$	$\frac{{}^B \psi_{5i}}{{}^B \psi_{III65i}}$	$\frac{{}^B \psi_{6i}}{{}^B \psi_{III66i}}$
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
3	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
4	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
6	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
8	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
10	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Miara podobieństwa postaci drgań własnych modelu podstawowego do postaci drgań własnych zredukowanego modelu ${}^B q_4$ przy zastosowaniu III metody

Tabela 15

i	$\frac{{}^B \psi_{1i}}{{}^B \psi_{III41i}}$	$\frac{{}^B \psi_{2i}}{{}^B \psi_{III42i}}$	$\frac{{}^B \psi_{3i}}{{}^B \psi_{III43i}}$	$\frac{{}^B \psi_{4i}}{{}^B \psi_{III44i}}$
1	1,000	1,000	1,000	1,000
2	1,000	1,000	1,000	1,000
3	1,000	1,000	1,000	1,000
4	1,000	1,000	1,000	1,000
5	1,000	1,000	1,000	1,000
6	1,000	1,000	1,000	1,000
7	1,000	1,000	1,000	1,000
8	1,000	1,000	1,000	1,000
9	1,000	1,000	1,000	1,000
10	1,000	1,000	1,000	1,000

Zera transmitancji modelu podstawowego oraz zredukowanych modeli ${}^B\mathbf{q}_8$, ${}^B\mathbf{q}_6$ oraz ${}^B\mathbf{q}_4$ przy zastosowaniu III metody

Tabela 16

j	ζ_j	${}^B\zeta_{III8i}^{(1)}$	${}^B\zeta_{III8i}^{(2)}$	${}^B\zeta_{III8i}^{(k)}$	${}^B\zeta_{III6i}^{(1)}$	${}^B\zeta_{III6i}^{(2)}$	${}^B\zeta_{III6i}^{(k)}$	${}^B\zeta_{III4i}^{(1)}$	${}^B\zeta_{III4i}^{(2)}$	${}^B\zeta_{III4i}^{(k)}$
1	40,19	41,12	40,22	44,07	42,94	40,27	44,28	44,54	40,52	44,66
2	125,93	136,27	128,03	135,43	140,69	129,50	135,91	-	141,90	136,84
3	168,67	-	-	169,97	-	-	170,03	162,47	-	170,16
4	202,00	201,30	197,90	-	-	-	-	-	-	-
5	222,60	226,70	224,58	222,45	222,18	216,20	222,46	-	-	-
6	248,87	247,29	244,76	230,98	-	-	232,19	-	-	-
7	270,93	270,93	270,93	268,18	267,25	265,43	-	265,47	267,34	-
8	290,80	290,72	290,59	281,62	287,72	286,19	-	-	-	-
9	308,98	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Macierz transformacji ${}^B\mathbf{T}_{III4}$ uzyskana przy zastosowaniu III metody dla wariantu redukcji do wektora współrzędnych uogólnionych ${}^B\mathbf{q}_4$ ma postać:

$${}^B\mathbf{T}_{III4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1,94 & 0,01 & -1,03 & -0,15 \\ 0,99 & 0,06 & -2,32 & 1,30 \\ -14,53 & 0,39 & 14,34 & 5,38 \\ -18,50 & 0,01 & 18,08 & 7,16 \\ 34,49 & 1,25 & -37,47 & -9,86 \\ -86,71 & 0,14 & 93,49 & 25,36 \end{bmatrix}$$

Po podstawieniu zredukowanych macierzy bezwładności ${}^B\mathbf{M}_{III}$ oraz sztywności ${}^B\mathbf{K}_{III}$ do równania (15) wyznaczono zera transmitancji badanych wariantów zredukowanych modeli, które zebrano w tabeli 16.

IV METODA

W metodzie [8] do wyznaczania macierzy transformacji macierzy \mathbf{t} wykorzystano pierwszy krok metody równoczesnej iteracji wektorowej [2], stosowanej w rozwiązywaniu uogólnionego zagadnienia własnego. Równanie charakteryzujące warunek ortogonalności (4) przy przyjętym podziale wektora zmiennych uogólnionych na zmienne podstawowe Ψ_m i zmienne pomocnicze Ψ_s przedstawiono w postaci:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{mm}^T & \Psi_{sm}^T \\ \Psi_{ms}^T & \Psi_{ss}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{mm} & \Psi_{ms} \\ \Psi_{sm} & \Psi_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{mm} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{ss} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Macierz transformacji \mathbf{t} między zmiennymi Ψ_m i zmiennymi pomocniczymi Ψ_s ma postać (9). Aproxymację i -tą pierwszych m wektorów własnych oznaczono macierzą $\Psi_m^{(i)}$, którą przedstawiono w postaci:

$$\Psi_m^{(i)} = \begin{bmatrix} \Psi_{mm}^{(i)} \\ \Psi_{sm}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{mm} \\ \mathbf{t}^{(i)} \end{bmatrix} \Psi_{mm}^{(i)} \quad (49)$$

gdzie macierz $\mathbf{t}^{(i)}$ jest określona równaniem:

$$\mathbf{t}^{(i)} = \Psi_{sm}^{(i)} (\Psi_{mm}^{(i)})^{-1} \quad (50)$$

W celu wyznaczenia kolejnej aproksymacji macierzy $\Psi_m^{(i+1)}$ zastosowano pierwszy etap metody równoczesnej iteracji wektorowej wyznaczając podprzestrzeń $\mathbf{X}_m^{(i+1)}$

$$\mathbf{X}_m^{(i+1)} = \mathbf{C} \Psi_m^{(i)} \quad (51)$$

gdzie macierz \mathbf{C} ma postać:

$$\mathbf{C} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \quad (52)$$

Stwierdzono, że drugi etap metody, związany z procesem ortonormalizacji nie wpływa na postać macierzy transformacji \mathbf{t} . W związku z tym, kolejną aproksymację macierzy $\mathbf{t}^{(i+1)}$ wyrażono związkami:

$$\mathbf{t}^{(i+1)} = \mathbf{X}_{sm}^{(i+1)} (\mathbf{X}_{mm}^{(i+1)})^{-1} \quad (53)$$

Przedstawiając wyrażenie (51) w postaci odpowiadającej równaniu (48) i uwzględniając (49) uzyskano zależność:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{mm}^{(i+1)} \\ \mathbf{X}_{sm}^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{mm} & \mathbf{C}_{ms} \\ \mathbf{C}_{sm} & \mathbf{C}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t}^{(i)} \end{bmatrix} \Psi_{mm}^{(i)} \quad (54)$$

Po podstawieniu wielkości $\mathbf{X}_{mm}^{(i+1)}$ oraz $\mathbf{X}_{sm}^{(i+1)}$ wyznaczonych ze związku (54) do równania (53) uzyskano wyrażenie na $i+1$ -szą iterację macierzy transformacji $\mathbf{t}^{(i+1)}$:

$$\mathbf{t}_{IV}^{(i+1)} = (\mathbf{C}_{sm} + \mathbf{C}_{ss} \mathbf{t}_{IV}^{(i)}) (\mathbf{C}_{mm} + \mathbf{C}_{ms} \mathbf{t}_{IV}^{(i)})^{-1} \quad (55)$$

Macierz transformacji $\mathbf{t}^{(0)}$ dla pierwszego kroku iteracji ma postać:

$$\mathbf{t}_{IV}^{(0)} = \mathbf{C}_{sm} \mathbf{C}_{mm}^{-1} \quad (56)$$

Zredukowaną macierz sztywności \mathbf{K}_{IV} zapisano równaniem:

$$\mathbf{K}_{IV}^{(i+k)} = \mathbf{K}_{mm} + (\mathbf{t}_{IV}^{(i+k)})^T \mathbf{K}_{sm} + \mathbf{K}_{ms} \mathbf{t}_{IV}^{(i+k)} + (\mathbf{t}_{IV}^{(i+k)})^T \mathbf{K}_{ss} \mathbf{t}_{IV}^{(i+k)} \quad (57)$$

a zredukowaną macierz bezwładności \mathbf{M}_{IV} zapisano równaniem:

$$\mathbf{M}_{IV}^{(i+k)} = \mathbf{M}_{mm} + (\mathbf{t}_{IV}^{(i+k)})^T \mathbf{M}_{sm} + \mathbf{M}_{ms} \mathbf{t}_{IV}^{(i+k)} + (\mathbf{t}_{IV}^{(i+k)})^T \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}_{IV}^{(i+k)} \quad (58)$$

Jako warunek zakończenia procedury iteracyjnej przyjęto spełnienie nierówności:

$$\left| \frac{\lambda_j^{(i+k)} - \lambda_j^{(i)}}{\lambda_j^{(i+k)}} \right| < \varepsilon_j \text{ dla } j = 1, 2, \dots, m \quad (59)$$

gdzie ε_j jest zadaną wartością determinującą dokładność wyników.

Po podstawieniu zredukowanych macierzy bezwładności ${}^A\mathbf{M}_{IV}$ i ${}^B\mathbf{M}_{IV}$ oraz sztywności ${}^A\mathbf{K}_{IV}$ i ${}^B\mathbf{K}_{IV}$ do równania na uogólniony problem własny (10) wyznaczono wartości własne i wektory własne. Częstotliwości odpowiadające wyznaczonym wartościom własnym zebrano w tabeli 17 – indeks (1) przy $\lambda^{(1)}$ oznacza numer iteracji.

W celu porównania postaci drgań własnych (odpowiadającym wektorom własnym) wyznaczonych dla modelu podstawowego (3) oraz dla modelu zredukowanego (9) wprowadzono miarę w postaci ilorazu kolejnych współrzędnych wektorów własnych. Dla wektorów podobnych wartości tych ilorazów są sobie równe. Miary podobieństwa postaci drgań własnych odpowiadających kolejnym częstotliwościom drgań własnych dla wariantu modelu ${}^A\mathbf{q}_8$ przedstawiono w tabeli 18, dla wariantu modelu ${}^A\mathbf{q}_6$ w tabeli 19, a dla wariantu modelu ${}^A\mathbf{q}_4$ w tabeli 20.

Częstotliwości drgań własnych [rad/s] modelu podstawowego oraz wariantów zredukowanych modeli ${}^A\mathbf{q}_8$, ${}^A\mathbf{q}_6$, ${}^A\mathbf{q}_4$, ${}^B\mathbf{q}_8$, ${}^B\mathbf{q}_6$ oraz ${}^B\mathbf{q}_4$ przy zastosowaniu IV metody

Tabela 17

i	λ_{IVi}	${}^A\lambda_{IV8i}^{(1)}$	${}^B\lambda_{IV8i}^{(1)}$	${}^{A,B}\lambda_{IV8i}$	${}^A\lambda_{IV6i}^{(1)}$	${}^B\lambda_{IV6i}^{(1)}$	${}^{A,B}\lambda_{IV6i}$	${}^A\lambda_{IV4i}^{(1)}$	${}^B\lambda_{IV4i}^{(1)}$	${}^{A,B}\lambda_{IV4i}$
1	29,19	29,19	29,48	29,19	29,26	30,07	29,19	29,64	30,66	29,19
2	101,64	102,43	108,36	101,64	112,52	111,72	101,64	156,20	115,93	101,64
3	161,05	163,03	171,78	161,05	168,50	188,45	161,05	177,01	234,57	161,05
4	175,04	177,52	226,39	175,04	222,42	266,64	175,04	308,69	368,54	175,04
5	222,55	222,62	239,38	222,55	224,44	283,44	222,55	-	-	-
6	241,37	245,82	270,04	241,37	308,96	406,04	241,37	-	-	-
7	270,03	278,79	287,41	270,03	-	-	-	-	-	-
8	287,53	308,98	406,26	287,53	-	-	-	-	-	-
9	308,98			-			-			-
10	406,26			-			-			-

Miara podobieństwa postaci drgań własnych modelu podstawowego do postaci drgań własnych zredukowanego modelu ${}^A\mathbf{q}_8$ przy zastosowaniu IV metody

Tabela 18

i	$\frac{{}^A\psi_{IV1i}}{{}^A\psi_{IV81i}}$	$\frac{{}^A\psi_{IV2i}}{{}^A\psi_{IV82i}}$	$\frac{{}^A\psi_{IV3i}}{{}^A\psi_{IV83i}}$	$\frac{{}^A\psi_{IV4i}}{{}^A\psi_{IV84i}}$	$\frac{{}^A\psi_{IV5i}}{{}^A\psi_{IV85i}}$	$\frac{{}^A\psi_{IV6i}}{{}^A\psi_{IV86i}}$	$\frac{{}^A\psi_{IV7i}}{{}^A\psi_{IV87i}}$	$\frac{{}^A\psi_{IV8i}}{{}^A\psi_{IV88i}}$
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,158
2	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,489
3	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,001	1,168
4	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,908
5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
6	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,005
7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
8	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
10	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Miara podobieństwa postaci drgań własnych modelu podstawowego do postaci drgań własnych zredukowanego modelu ${}^A\mathbf{q}_6$ przy zastosowaniu IV metody

Tabela 19

i	$\frac{{}^A\psi_{IV1i}}{{}^A\psi_{IV61i}}$	$\frac{{}^A\psi_{IV2i}}{{}^A\psi_{IV62i}}$	$\frac{{}^A\psi_{IV3i}}{{}^A\psi_{IV63i}}$	$\frac{{}^A\psi_{IV4i}}{{}^A\psi_{IV64i}}$	$\frac{{}^A\psi_{IV5i}}{{}^A\psi_{IV65i}}$	$\frac{{}^A\psi_{IV6i}}{{}^A\psi_{IV66i}}$
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,983
2	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,037
3	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,001
4	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,997
5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,001
6	1,000	1,000	1,000	1,000	1,001	0,996
7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,002	1,042
8	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,991
9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,002	1,002
10	1,000	1,000	1,000	1,000	1,005	1,011

Miara podobieństwa postaci drgań własnych modelu podstawowego do postaci drgań własnych zredukowanego modelu ${}^A\mathbf{q}_4$ przy zastosowaniu IV metody

Tabela 20

i	$\frac{{}^A\psi_{IV1i}}{{}^A\psi_{IV41i}}$	$\frac{{}^A\psi_{IV2i}}{{}^A\psi_{IV42i}}$	$\frac{{}^A\psi_{IV3i}}{{}^A\psi_{IV43i}}$	$\frac{{}^A\psi_{IV4i}}{{}^A\psi_{IV44i}}$
1	1,000	1,000	0,999	1,010
2	1,000	1,000	0,999	1,001
3	1,000	1,000	1,000	0,999
4	1,000	1,000	0,997	0,990
5	1,000	1,000	1,000	1,003
6	1,000	1,000	0,999	0,999
7	1,000	1,000	0,999	0,990
8	1,000	1,000	1,000	1,000
9	1,000	1,000	1,000	1,000
10	1,000	1,000	1,000	1,001

$${}^A\mathbf{T}_{IV4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1,94 & 0,01 & -1,03 & -0,15 \\ 0,92 & 0,06 & -2,24 & 1,32 \\ -14,22 & 0,39 & 13,99 & 5,29 \\ -18,12 & 0,01 & 17,66 & 7,06 \\ 33,28 & 1,24 & -36,13 & -9,52 \\ -83,77 & 0,16 & 90,25 & 24,55 \end{bmatrix}$$

Macierz transformacji ${}^A\mathbf{T}_{IV4}$ uzyskana przy zastosowaniu IV metody dla wariantu redukcji do wektora współrzędnych uogólnionych ${}^A\mathbf{q}_4$ ma postać:

W celu porównania postaci drgań własnych (odpowiadającym wektorom własnym) wyznaczonych dla modelu podstawowego (3) oraz dla modelu zredukowanego (9) wprowadzono miarę w postaci ilorazu kolejnych współrzędnych wektorów własnych. Dla wektorów podobnych wartości tych ilorazów są sobie równe. Miary podobieństwa postaci drgań własnych odpowiadających kolejnym częstotliwościom drgań własnych dla wariantu modelu ${}^B\mathbf{q}_8$ przedstawiono w tabeli 21, dla wariantu modelu ${}^B\mathbf{q}_6$ w tabeli 22, a dla wariantu modelu ${}^B\mathbf{q}_4$ w tabeli 23.

Miara podobieństwa postaci drgań własnych modelu podstawowego do postaci drgań własnych zredukowanego modelu ${}^B\mathbf{q}_8$ przy zastosowaniu IV metody

Tabela 21

i	$\frac{{}^B\psi_{IV1i}}{{}^B\psi_{IV81i}}$	$\frac{{}^B\psi_{IV2i}}{{}^B\psi_{IV82i}}$	$\frac{{}^B\psi_{IV3i}}{{}^B\psi_{IV83i}}$	$\frac{{}^B\psi_{IV4i}}{{}^B\psi_{IV84i}}$	$\frac{{}^B\psi_{IV5i}}{{}^B\psi_{IV85i}}$	$\frac{{}^B\psi_{IV6i}}{{}^B\psi_{IV86i}}$	$\frac{{}^B\psi_{IV7i}}{{}^B\psi_{IV87i}}$	$\frac{{}^B\psi_{IV8i}}{{}^B\psi_{IV88i}}$
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,988
2	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,989	0,479
3	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	1,000	1,001
4	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,999
6	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,980
8	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,006	1,027	0,825
10	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,010	1,030

Miara podobieństwa postaci drgań własnych modelu podstawowego do postaci drgań własnych zredukowanego modelu ${}^B\mathbf{q}_6$

przy zastosowaniu IV metody

Tabela 22

i	$\frac{{}^B\psi_{IV1i}}{{}^B\psi_{IV61i}}$	$\frac{{}^B\psi_{IV2i}}{{}^B\psi_{IV62i}}$	$\frac{{}^B\psi_{IV3i}}{{}^B\psi_{IV63i}}$	$\frac{{}^B\psi_{IV4i}}{{}^B\psi_{IV64i}}$	$\frac{{}^B\psi_{IV5i}}{{}^B\psi_{IV65i}}$	$\frac{{}^B\psi_{IV6i}}{{}^B\psi_{IV66i}}$
1	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,995
2	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,001
3	1,000	1,000	1,000	1,000	0,990	0,989
4	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,997
5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,047
6	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	1,001
7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,001
8	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
10	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Miara podobieństwa postaci drgań własnych modelu podstawowego do postaci drgań własnych zredukowanego modelu ${}^B\mathbf{q}_4$ przy zastosowaniu IV metody

Tabela 23

i	$\frac{{}^B\psi_{IV1i}}{{}^B\psi_{IV41i}}$	$\frac{{}^B\psi_{IV2i}}{{}^B\psi_{IV42i}}$	$\frac{{}^B\psi_{IV3i}}{{}^B\psi_{IV43i}}$	$\frac{{}^B\psi_{IV4i}}{{}^B\psi_{IV44i}}$
1	1,000	1,000	1,000	0,998
2	1,000	1,000	1,000	0,997
3	1,000	1,000	1,000	0,996
4	1,000	1,000	0,999	1,007
5	1,000	1,000	1,000	0,999
6	1,000	1,000	1,000	0,995
7	1,000	1,000	1,000	1,001
8	1,000	1,000	0,999	1,002
9	1,000	1,000	1,000	1,000
10	1,000	1,000	1,000	1,000

Macierz transformacji ${}^B\mathbf{T}_{IV4}$ uzyskana przy zastosowaniu IV metody dla wariantu redukcji do wektora współrzędnych uogólnionych ${}^B\mathbf{q}_4$ ma postać:

$${}^B\mathbf{T}_{IV4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15,57 & -13,05 & -5,67 & 4,15 \\ 49,94 & -40,70 & -17,80 & 9,54 \\ 94,21 & -76,35 & -33,09 & 16,15 \\ 124,06 & -100,29 & -43,36 & 20,43 \\ 114,02 & -92,16 & -39,82 & 18,70 \\ 80,18 & -64,76 & -27,94 & 12,96 \end{bmatrix}$$

Po podstawieniu zredukowanych macierzy bezwładności ${}^A\mathbf{M}_{IV}$ i ${}^B\mathbf{M}_{IV}$ oraz sztywności ${}^A\mathbf{K}_{IV}$ i ${}^B\mathbf{K}_{IV}$ do równania (15) wyznaczono zera transmitancji badanych wariantów zredukowanych modeli, które zebrano w tabeli 24.

Zera transmitancji modelu podstawowego oraz wariantów zredukowanych modeli ${}^A\mathbf{q}_8$, ${}^A\mathbf{q}_6$, ${}^A\mathbf{q}_4$, ${}^B\mathbf{q}_8$, ${}^B\mathbf{q}_6$ oraz ${}^B\mathbf{q}_4$ przy zastosowaniu IV metody

Tabela 24

j	${}^A\zeta_j$	${}^A\zeta_{IV8i}$	${}^A\zeta_{IV6i}$	${}^A\zeta_{IV4i}$	${}^B\zeta_j$	${}^B\zeta_{IV8i}$	${}^B\zeta_{IV6i}$	${}^B\zeta_{IV4i}$
1	59,30	69,70	69,73	70,90	40,19	44,07	44,28	44,66
2	119,87	134,92	134,97	137,05	125,93	135,42	135,90	136,83
3	173,47	174,53	174,53	174,59	168,67	169,97	170,03	170,15
4	180,46	-	-	-	202,00	-	-	-
5	227,25	210,17	210,25	-	222,60	222,45	222,46	-
6	242,42	239,42	239,39	-	248,87	230,96	232,12	-
7	270,14	269,37	-	-	270,93	268,16	-	-
8	287,53	287,46	-	-	290,80	281,49	-	-
9	406,26	-	-	-	308,98	-	-	-

4. Omówienie wyników

Ocenę wybranych do badań metod redukcji modelu układu przeprowadzono ze względu na zdolność metody do wygenerowania macierzy transformacji, umożliwiającej zbudowanie zredukowanego modelu reprezentowanego z wymaganą dokładnością zadanymi częstotliwościami drgań własnych, odpowiadającymi im postaciami drgań własnych oraz zerami transmitancji. Dla oceny wyników zastosowano miarę w postaci względnego błędu procentowego $\frac{|a_i - \hat{a}_i|}{a_i} 100\%$, gdzie a_i dotyczy układu podstawowego, a \hat{a}_i dotyczy modelu zredukowanego. Dla metod iteracyjnych jako miarę oceny przyjęto liczbę iteracji niezbędnych do osiągnięcia wyników obliczeń z wymaganą dokładnością. W ocenie metod uwzględniono również ich elastyczność w odniesieniu do zmiany struktury modelu wywołanej zmianą kolejności numeracji zmiennych uogólnionych.

• **Ocena metod redukcji odnośnie do częstotliwości drgań własnych**

Pierwsza metoda nie umożliwia zbudowania zredukowanego modelu o wymaganych najniższych częstotliwościach drgań własnych. Na przykład (tabela 1), wyznaczona macierz transformacji dla wariantu ${}^A\mathbf{q}_6$ umożliwia wygenerowanie pierwszej, drugiej, trzeciej, piątej, szóstej i dziewiątej częstotliwości drgań własnych, a dla wariantu ${}^B\mathbf{q}_4$ – pierwszej, drugiej, szóstej i dziesiątej. Największy względny błąd dla pierwszej częstotliwości ma wartość 5%, a dla drugiej 14%.

• **Ocena metod redukcji odnośnie do częstotliwości drgań własnych**

Druga metoda (tabela 4) również nie umożliwia odtworzenia wymaganych najniższych częstotliwości. Na przykład, wyznaczona macierz transformacji dla wariantu ${}^A\mathbf{q}_6$ umożliwia wygenerowanie pierwszej, drugiej, czwartej, siódmej, ósmej i dziesiątej częstotliwości drgań własnych, a dla wariantu ${}^B\mathbf{q}_4$ – pierwszej, drugiej, czwartej i ósmej. Pierwsza częstotliwość drgań własnych odtworzona jest w zredukowanym modelu bezbłędnie, a największy względny błąd dla drugiej częstotliwości ma wartość 9%.

Trzecia metoda (tabela 7 dla wariantu *A*, tabela 12 dla wariantu *B*) oraz czwarta metoda (tabela 17) redukcji modelu układu umożliwiając zbudowanie zredukowanego modelu o wymaganych najniższych częstotliwościach, przy zerowych błędach dla wszystkich częstotliwości.

- **Ocena metod redukcji odnośnie do postaci drgań własnych**

Modele zredukowane zbudowane za pomocą pierwszej metody odtwarzają macierz postaci drgań własnych niedokładnie (tabela 2). Największy względny błąd dla pierwszej postaci drgań własnych, dla wariantu ${}^A\mathbf{q}_4$ wynosi 12% (na kierunku 10-tej współrzędnej uogólnionej), a dla wariantu ${}^B\mathbf{q}_4$ wynosi 10% (na kierunku trzeciej współrzędnej uogólnionej). Postacie drgań własnych odpowiadające wyższym częstotliwościom drgań własnych obarczone są znacznie większymi błędami.

Modele zredukowane budowane za pomocą drugiej metody (tabela 5) odtwarzają dokładnie postać drgań własnych odpowiadającą pierwszej częstotliwości drgań własnych (największy względny błąd wynosi 1%). Dla postaci odpowiadających wyższym częstotliwościom drgań własnych błąd jest znacznie większy.

Modele zredukowane zbudowane za pomocą trzeciej metody (tabele 8, 9 i 10 dla wariantu *A*, tabele 13, 14 i 15 dla wariantu *B*) oraz czwartej metody (tabele 18, 19 i 20 dla wariantu *A*, tabele 21, 22 i 23 dla wariantu *B*) redukcji odtwarzają macierz postaci drgań własnych dokładnie. Jedynie postać drgań odpowiadająca ósmej częstotliwości drgań własnych odtworzona jest błędnie, przy czym największy względny błąd ma wartość 17% (tabela 13) oraz 52% (tabela 21) na kierunku wybranej współrzędnej uogólnionej.

- **Ocena metod redukcji odnośnie do zer transmitancji**

Zera transmitancji dla zredukowanych modeli wyznaczonych z zastosowaniem wszystkich wybranych metod redukcji są odtwarzane niedokładnie w odniesieniu do zer transmitancji modelu układu. Wartość pierwszego zera transmitancji zredukowanego modelu z zastosowaniem pierwszej metody (tabela 3) obarczona jest największym względnym błędem o wartości 12% dla wariantu ${}^A\mathbf{q}_4$ oraz o wartości 28% dla wariantu ${}^B\mathbf{q}_6$. Wartość pierwszego zera transmitancji zredukowanego modelu z zastosowaniem drugiej metody (tabela 6) obarczona jest największym względnym błędem o wartości 48% dla wariantu ${}^A\mathbf{q}_8$ oraz o wartości 5% dla wariantu ${}^B\mathbf{q}_4$. Wartość pierwszego zera transmitancji zredukowanego modelu z zastosowaniem trzeciej metody (tabela 11) obarczona jest największym względnym błędem o wartości 19% dla wariantu ${}^A\mathbf{q}_4$ oraz o wartości 11% dla wariantu ${}^B\mathbf{q}_4$. Wartość pierwszego zera transmitancji zredukowanego modelu z zastosowaniem czwartej metody (tabela 16) obarczona jest największym względnym

błędem o wartości 20% dla wariantu ${}^A\mathbf{q}_4$ oraz o wartości 10% dla wariantu ${}^B\mathbf{q}_4$.

- **Ocena metod redukcji odnośnie do liczby iteracji**

Liczbę iteracji wykonanych przy badaniach zredukowanych modeli z zastosowaniem trzeciej i czwartej metody zebrano w tabeli 25. Jako warunek zakończenia procedury iteracyjnej przyjęto dla obu metod iteracyjnych błąd $\varepsilon_i = 0,00001$.

Liczba wykonanych iteracji dla wariantów zredukowanych modeli ${}^A\mathbf{q}_8$, ${}^A\mathbf{q}_6$, ${}^A\mathbf{q}_4$, ${}^B\mathbf{q}_8$, ${}^B\mathbf{q}_6$ oraz ${}^B\mathbf{q}_4$, przy zastosowaniu III i IV metody

Tabela 25

model metoda	${}^A\mathbf{q}_8$	${}^A\mathbf{q}_6$	${}^A\mathbf{q}_4$	${}^B\mathbf{q}_8$	${}^B\mathbf{q}_6$	${}^B\mathbf{q}_4$
III	119	39	24	26	41	24
IV	63	21	13	14	22	13

- **Ocena metod redukcji odnośnie do struktury zredukowanego modelu**

Przeprowadzone badania numeryczne wykazały znaczny wpływ struktury zredukowanego modelu na wyniki obliczeń przy zastosowaniu pierwszej i drugiej metody redukcji. Stwierdzono również niewielki wpływ struktury zredukowanego modelu na wyniki obliczeń otrzymanych przy zastosowaniu trzeciej i czwartej metody redukcji.

5. Podsumowanie

W artykule przeprowadzono badania numeryczne dla dyskretnego modelu układu nośnego, których celem było określenie jakości stosowanych metod redukcji modelu na charakterystyki własne w postaci częstotliwości i postaci drgań własnych. Badaniom poddano również wpływ sposobu redukcji modelu układu na związki między wymuszeniem a odpowiedzią, charakteryzowane zerami transmitancji zredukowanego modelu. Efektem przeprowadzonej analizy wyników jest przyjęcie zalecenia odnośnie do stosowania w dynamicznej analizie modeli układów nośnych, iteracyjnych metod redukcji modelu (III metoda oraz IV metoda). Stosując te metody uzyskano zgodne wartości częstotliwości drgań własnych modelu po redukcji oraz modelu podstawowego. Dokładność odwzorowania postaci drgań własnych zależy od zastosowanej metody oraz rozmiaru zredukowanego modelu.

Stwierdzono istotny wpływ podziału wektora współrzędnych uogólnionych na współrzędne podstawowe i współrzędne pomocnicze (co determinuje strukturę zredukowanych macierzy sztywności i mas) na dokładność odwzorowania postaci drgań własnych.

Mankamentem stosowania metod iteracyjnych jest to, że zredukowane macierze mas i sztywności mogą tracić sens fizyczny.

Oryginalną częścią pracy było zbadanie wpływu redukcji modelu układu na zera transmitancji zredukowanego układu. Stwierdzono, że żadna z badanych metod nie gwarantuje uzyskania wystarczająco dokładnych wyników. Zadanie wyznaczenia zer transmitancji jest istotne w badaniach zależności między wymuszeniem a odpowiedzią układu. Badania w tym zakresie są kontynuowane w kierunku potwierdzenia przedstawionych wniosków oraz zaproponowania metod redukcji modelu, gwarantujących odpowiednią jakość uzyskiwanych wyników odnośnie do zer transmitancji zredukowanego modelu.

Literatura

- [1] Barczak A.: *Zera i bieguny transmitancji a częstotliwości antyrezonansowe i rezonansowe układów nośnych pojazdów*, *Pojazdy Szynowe*, 1/2005.
- [2] Bathe K. J.: *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
- [3] Friswell M. I., Garvey S. D., Penny J. E.: *Model reduction using dynamic and Iterated IRS Techniques*, *Journal of Sound and Vibrations*, Vol. 186(2), 1995.
- [4] Guyan R. J.: *Reduction of stiffness and mass matrices*, *AIAA*, Vol. 3(2), 1965.
- [5] Mottershead J. E.: *Structural Modification for the Assignment of Zeros Using Measured Receptances*, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 68, 2001.
- [6] Paz M.: *Dynamic condensation method*, *AIAA*, Vol. 22(5), 1984.
- [7] Yong X., Rongming L.: *Improvement on the iterated IRS method for structural eigensolutions*, *Journal of Sound and Vibrations*, Vol. 270, 2004.
- [8] Zu-Qing Q., Zhi-Fang F.: *An iterative method for dynamic condensation of structural matrices*, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 14(4), 2000.
- [9] MATLAB, wersja 7.0.4.