

Zera i bieguny transmitancji a częstotliwości antyrezonansowe i rezonansowe układów nośnych pojazdów

W zastosowaniach praktycznych często pojawia się problem ograniczenia drgań urządzeń zamocowanych na elementach podatnych, przy założeniu, że układ w stanie ustalonym poddany jest obciążeniom o określonej częstotliwości. Znaczący to, że na kierunku wybranej współrzędnej uogólnionej przemieszczenia winny być minimalne. Odpowiada to analitycznemu zadaniu wyznaczenia zer odpowiedniej transmitancji układu. Wymagane wartości zer transmitancji układu uzyskano poddając układ modyfikacji przez zastosowanie pasywnych elementów sprężystych lub tłumieniowych.

1. Wprowadzenie.

Dynamika liniowego, stacjonarnego układu mechanicznego o wielu stopniach swobody oraz o wielu wejściach i wyjściach reprezentowana jest macierzą transmitancji operatorowych i widmowych. Elementy macierzy transmitancji są w takim przypadku przyczynowymi funkcjami wymiernymi zmiennej zespolonej. Miejsca zerowe mianowników macierzy transmitancji nazwano biegunami a miejsca zerowe liczników elementów macierzy transmitancji zerami. O ile badanie i interpretacja biegunów transmitancji dla układów mechanicznych są znane, o tyle badanie i interpretacje zer transmitancji dla układów mechanicznych przedstawiono w literaturze stosunkowo niedawno [3], gdzie omówiono fizyczną interpretację zer transmitancji jako częstotliwości anty-rezonansowych, czyli częstotliwości wymuszenia typu harmonicznego, przy których odpowiedź układu przyjmuje wartości bliskie zeru.

W pracach [4, 5] przedstawiono strukturalny aspekt interpretacji zer transmitancji. Stwierdzono, że zera transmitancji można interpretować jako bieguny układu uzyskanego z układu podstawowego. Wymaga to wprowadzenia więzów w postaci unieruchomienia na kierunkach współrzędnych uogólnionych zgodnych z kierunkami wymuszenia i odpowiedzi w badanym układzie.

W zastosowaniach praktycznych często pojawia się problem ograniczenia drgań maszyn, silników czy innych urządzeń zamocowanych na elementach podatnych przy założeniu, że układ w stanie ustalonym poddany jest wymuszeniu o stałej częstotliwości.

W procesie projektowania celem jest określenie struktury układu i charakterystyk sztywnościowo-tłumieniowych elementów podparcia dla uzyskania minimum odpowiedzi na kierunku określonej współrzędnej uogólnionej przy zadanej eksploatacyjnej częstotliwości wymuszenia.

Celem artykułu jest badanie (na wybranym przykładzie) wpływu modyfikacji struktury układu poprzez wprowadzenie pasywnych elementów sprężystych (sprężyna śrubowa) lub tłumiących (tłumik wiskotyczny) na wartości biegunów i zer elementów macierzy transmitancji, a tym samym na wartości częstotliwości rezonansowych i antyrezonansowych.

2. Transmitancja jako formalizm modelowania procesów zachodzących w liniowych układach mechanicznych.

Równania ruchu dyskretnego, liniowego, stacjonarnego modelu układu mechanicznego o n stopniach swobody, przedstawiono w postaci :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{f} \quad (1)$$

a równanie wyjść jako:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{q} \quad (2)$$

gdzie:

\mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$ - wektory współrzędnych, prędkości i przyspieszeń uogólnionych ($\mathbf{q} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$),
 \mathbf{f} - wektor wymuszeń w postaci sił ($\mathbf{f} \in \mathcal{R}^{m \times 1}$),
 \mathbf{y} - wektor wielkości mierzonych w postaci przemieszczeń ($\mathbf{y} \in \mathcal{R}^{p \times 1}$),

\mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K} - macierze bezwładności, tłumienia i sztywności ($\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K} \in \mathcal{R}^{n \times n}$),

\mathbf{B} - macierz wejść rzędu m ($\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{n \times m}$),

\mathbf{C} - macierz wyjść rzędu p ($\mathbf{C} \in \mathcal{R}^{p \times m}$),

przy czym macierze \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K} spełniają warunki:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^T > 0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}^T \geq 0, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}^T \geq 0$$

Po przeprowadzeniu transformacji Laplace'a, co zapisano zależnością

$$[\mathbf{y}(s), \mathbf{f}(s)] = \int_0^{\infty} [\mathbf{y}(t), \mathbf{f}(t)] \cdot e^{-st} dt \quad (3)$$

oraz przyjęciu zerowych warunków początkowych $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$ uzyskano związek między transformatami wektora wyjścia i wektora wejścia w postaci:

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(s) \cdot \mathbf{f}(s) \quad (4)$$

Transmitancję operatorową $\mathbf{H}(s)$ wyznaczono jako:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{K} + s \cdot \mathbf{D} + s^2 \cdot \mathbf{M})^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{Z}(s) \cdot \mathbf{B} \quad (5)$$

gdzie $\mathbf{Z}(s)$ jest zespoloną podatnością dynamiczną układu.

2.1. Zera i bieguny transmitancji.

Transmitancja wyrażona za pomocą zależności (5) jest macierzą wymierną, przyczynową, której elementy $h_{ij}(s)$ są przyczynowymi funkcjami wymiernymi

$$h_{ij}(s) = \frac{a_{ij}(s)}{b_{ij}(s)}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, m \quad (6)$$

gdzie

$a_{ij}(s)$ - licznik w postaci wielomianu zmiennej operatorowej,

$b_{ij}(s)$ - mianownik w postaci wielomianu zmiennej operatorowej.

Każdą przyczynową macierz wymierną można przekształcić za pomocą macierzy unimodularnych do kanonicznej postaci McMillana $\mathbf{H}_M(s)$ [1].

$$\mathbf{H}_M(s) = \begin{bmatrix} \text{diag} \left[\frac{m_1(s)}{v_1(s)}, \dots, \frac{m_r(s)}{v_r(s)} \right] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7)$$

gdzie r jest rzędem macierzy, a wielomiany $m_i(s)$ oraz $v_i(s)$ są względnie pierwsze oraz wielomiany $m_{i+1}(s)$ (odpowiednio $v_i(s)$) dzielą się bez reszty przez wielomiany $m_i(s)$ (odpowiednio $v_{i+1}(s)$).

Miejsca zerowe wielomianu w liczniku

$$m(s) = m_1(s) \cdot \dots \cdot m_r(s) \quad (8)$$

nazywamy zerami z_j (skończonymi) macierzy transmitancji (5). Wielomian $m(s)$ jest równy największemu wspólnemu dzielnikowi liczników wszystkich minorów stopnia r macierzy transmitancji (5) sprowadzonych do wspólnego mianownika [2].

Miejsca zerowe wielomianu w mianowniku

$$v(s) = v_1(s) \cdot \dots \cdot v_r(s) \quad (9)$$

nazywamy biegunami p_i (skończonymi) macierzy transmitancji (5). Wielomian $v(s)$ jest równy najmniejszemu wspólnemu mianownikowi wszystkich niezerowych minorów wszystkich stopni macierzy transmitancji (5) [2].

Liczbę $S = Z$ nazywamy zerem transmisyjnym macierzy $\mathbf{H}(s)$, jeżeli wektor odpowiedzi układu poddanego wymuszeniu o postaci

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{k}(t) \cdot e^{zt} \quad (10)$$

gdzie $\mathbf{k} \in \mathfrak{R}^{m \times 1}$

jest równy zeru dla $t > 0$, czyli gdy równanie (2) przyjmie postać

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (11)$$

Zatem znalezienie wartości zer transmisyjnych macierzy transmitancji jest istotne z praktycznego punktu widzenia, ponieważ umożliwia wyznaczenie wektora odpowiedzi o składowych równych 0 (zero), na wymuszenie charakteryzowane przez zera transmisyjne (10).

2.2. Strukturalna i fizyczna interpretacja zer transmisyjnych oraz biegunów

W dalszych badaniach przyjęto macierze \mathbf{C} oraz \mathbf{B} jako

macierze jednostkowe, przy czym $\mathbf{C}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$.

Transmitancja operatorowa układu przyjmie zatem postać:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{Z}(s) \quad (12)$$

Elementy $h_{ij}(s)$ macierzy (12) spełniają zależność

$$[h_{ij}(s)] = \frac{\hat{\mathbf{H}}(s)}{|\mathbf{H}(s)|} \quad (13)$$

gdzie:

$\hat{\mathbf{H}}(s)$ - transponowana macierz dopełnień algebraicznych, które elementy mają postać $\hat{h}_{ij}(s) = (-1)^{i+j} |\mathbf{H}^{ji}(s)|$,

$|\mathbf{H}(s)|$ - wyznacznik macierzy transmitancji.

Podmacierze $\mathbf{H}^{ji}(s)$ uzyskano poprzez skreślenie j -tego rzędu oraz i -tej kolumny w macierzy transmitancji $\mathbf{H}(s)$. Bieguny macierzy transmitancji są pierwiastkami wielomianu $|\mathbf{H}(s)| = 0$. Zera macierzy transmitancji wyznaczane są według zależności (7) oraz (8).

W badaniach przyjęto, że w układzie występuje jedno wejście w postaci siły przyłożonej na kierunku wybranej współrzędnej uogólnionej oraz jedno wyjście w postaci przemieszczenia mierzonego na kierunku wybranej współrzędnej uogólnionej.

Przy tych założeniach zera transmitancji są równoważne pierwiastkom wielomianów występujących w licznikach odpowiednich skalarnych funkcji $h_{ij}(s)$ macierzy $\mathbf{H}(s)$, a bieguny są pierwiastkami wielomianów występujących w mianownikach tych funkcji.

Przyjmując, że wymuszenie przyłożone jest na kierunku P -tej współrzędnej uogólnionej a pomiar odbywa się na kierunku Q -tej współrzędnej uogólnionej, sprowadzono wyznaczenie zer transmitancji do znalezienia pierwiastków wielomianu $\hat{h}_{pq}(s) = 0$. Wyznaczone wartości odpowiadają biegunom transmitancji $\mathbf{H}_{pq}(s)$ uzyskanej w wyniku skreślenia P -tego wiersza i Q -tej kolumny w macierzy transmitancji $\mathbf{H}(s)$. Wyznaczanie zer macierzy transmitancji zastąpiono zatem wyznaczaniem wartości własnych macierzy o postaci:

$$\mathbf{H}_{pq}(s) = (\mathbf{K}_{pq} + s \cdot \mathbf{D}_{pq} + s^2 \cdot \mathbf{M}_{pq})^{-1} \quad (14)$$

gdzie macierze \mathbf{K}_{pq} , \mathbf{D}_{pq} , \mathbf{M}_{pq} utworzono przez skreślenie P -tego wiersza i Q -tej kolumny w macierzach, odpowiednio \mathbf{K} , \mathbf{D} oraz \mathbf{M} .

Rozkład zer i biegunów na płaszczyźnie zespolonej umożliwia ocenę układu w zakresie jego stabilności (układ jest stabilny, gdy jego bieguny znajdują się w lewej półpłaszczyźnie zespolonej) oraz ocenę, czy układ jest minimalno-fazowy (układ jest minimalno-fazowy, gdy zera znajdują się w lewej półpłaszczyźnie zespolonej).

W analizie dynamiki układów liniowych istotną informację uzyskuje się dzięki wykorzystaniu charakterystyk w dziedzinie częstotliwości. Dokonując podstawienia $s = j \cdot \omega$, gdzie ω jest częstotliwością kołową, do zależności (12) uzyskano macierze transmitancji widmowej w postaci:

$$\mathbf{H}(j \cdot \omega) = (\mathbf{K} + j \cdot \omega \cdot \mathbf{D} - \omega^2 \cdot \mathbf{M})^{-1} \quad (15)$$

Przy założeniu, że zera i bieguny transmitancji są liczbami zespolonymi ($z_j = \text{Re } z_j + j \cdot \text{Im } z_j$; $p_i = \text{Re } p_i + j \cdot \text{Im } p_i$), biegunom transmitancji przyporządkowuje się w dziedzinie częstotliwości, częstotliwości rezonansowe ω_{ir}

$$\omega_{ir} = \sqrt{(\text{Re } p_i)^2 + (\text{Im } p_i)^2} \quad (16)$$

a zerom transmitancji przyporządkowuje się w dziedzinie częstotliwości, częstotliwości anty-rezonansowe ω_{jar}

$$\omega_{jar} = \sqrt{(\text{Re } z_j)^2 + (\text{Im } z_j)^2} \quad (17)$$

Dla oceny zjawisk zachodzących w układzie wykorzystano charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową:

$$\left| h_{ij}(j \cdot \omega) \right| = A_{ij}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\text{Re } h_{ij}(j \cdot \omega))^2 + (\text{Im } h_{ij}(j \cdot \omega))^2}} \quad (18)$$

oraz charakterystykę fazowo-częstotliwościową:

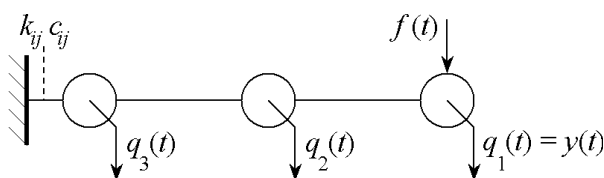
$$\varphi_{ij}(\omega) = \arctan \frac{\text{Im } h_{ij}(j \cdot \omega)}{\text{Re } h_{ij}(j \cdot \omega)} \quad (19)$$

3. Przykład obliczeniowy

Jako układ podstawowy, poddany następnie modyfikacji, przyjęto dyskretny model belki wspornikowej, opisany trójwymiarowym wektorem współrzędnych uogólnionych \mathbf{q}

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}$$

co przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Dyskretny model układu podstawowego.

Macierz sztywności \mathbf{K} wyznaczono za pomocą metody sił, a macierz mas \mathbf{M} - wykorzystując metodę mas skupionych. Otrzymano wartości:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0,129 & -0,295 & 0,222 \\ -0,295 & 0,813 & -0,850 \\ 0,222 & -0,850 & 1,477 \end{bmatrix} \cdot 10^5$$

$$\mathbf{M} = \text{diag} \begin{bmatrix} 0,2 \\ 1,0 \\ 1,0 \end{bmatrix}$$

Macierz tłumienia wewnętrzno \mathbf{D} w belce przyjęto w postaci tłumienia proporcjonalnego:

$$\mathbf{D} = \alpha \cdot \mathbf{K} + \beta \cdot \mathbf{M}$$

gdzie wartości współczynników α i β przyjęto według [1]:

$$\alpha = 0,0001, \quad \beta = 1$$

Założono, że konieczna jest modyfikacja charakterystyk sztywnościowych i tłumieniowych układu w celu uzyskania odpowiednich wartości częstotliwości rezonansowych ω_{ri} i częstotliwości anty-rezonansowych ω_{arj} .

Modyfikacje struktury układu przeprowadzono poprzez podparcie belki wspornikowej (układ podstawowy) za pomocą:

1° liniowej sprężyny:

– na kierunku współrzędnej uogólnionej $q_1(t)$ - wariant A,

– na kierunku współrzędnej uogólnionej $q_2(t)$ - wariant B,

2° tłumika wiskotycznego:

– na kierunku współrzędnej uogólnionej $q_1(t)$ - wariant C,

– na kierunku współrzędnej uogólnionej $q_2(t)$ - wariant D.

Przyjęto dwie wartości współczynnika sztywności sprężyny

$$k_1 = 4000 \left[\frac{N}{m} \right] \quad \text{i} \quad k_2 = 8000 \left[\frac{N}{m} \right] \quad \text{oraz} \quad \text{dwie} \quad \text{wartości}$$

współczynnika tłumienia tłumika $d_1 = 10 \left[\frac{N \cdot s}{m} \right]$ i

$$d_2 = 15 \left[\frac{N \cdot s}{m} \right].$$

Badania przeprowadzono dla przypadków, gdy wejście w postaci siły obciążającej oraz wyjście w postaci przemieszczenia związane były z kierunkiem tej samej współrzędnej uogólnionej, odpowiednio $q_1(t)$ lub $q_2(t)$.

Macierz wejść ma postać:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a macierz wyjść:

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0] \quad \text{lub} \quad [0 \ 1 \ 0]$$

Wielkości otrzymywane podczas analizy zapisywano za pomocą uogólnionego symbolu $X^w_w Y$ gdzie:

w - badana wielkość (bieguny, zera, częstotliwość ...),

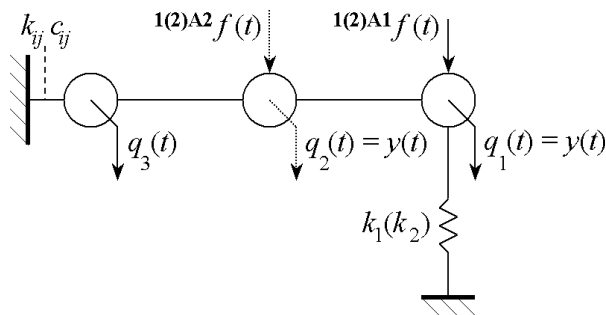
W - przyjęty wariant układu (A, B, C lub D),

X - przypadek współczynnika sztywności (tłumienia),

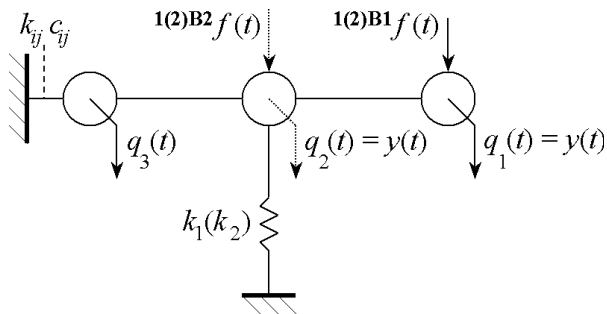
Y - kierunek współrzędnej uogólnionej związanej z wejściem i wyjściem układu.

Przykładowo, $1z_A 2$ oznacza zero transmitancji wyznaczonej dla wariantu A układu (belka wspornikowa podparta sprężyną na kierunku współrzędnej q_1) sprężyną o stałej k_1 , a wejście i wyjście związane są z kierunkiem współrzędnej uogólnionej q_2 .

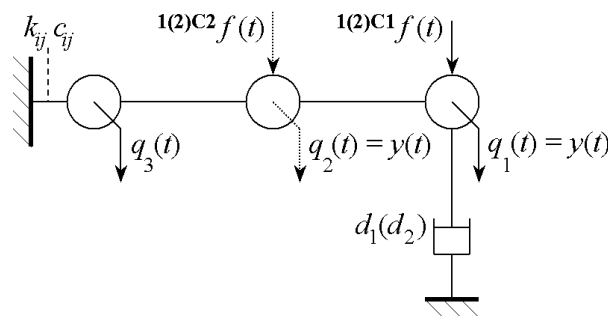
Schematy układu zmodyfikowanego odpowiadające wariantom badawczym przedstawiono na rys. 2a, rys. 2b, rys. 2c oraz rys. 2d.



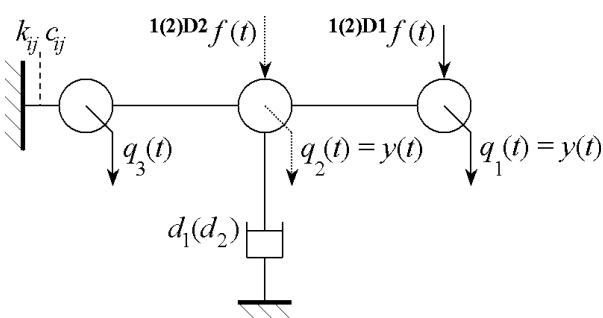
Rys. 2a. Dyskretny model układu zmodyfikowanego według wariantu A



Rys. 2b. Dyskretny model układu zmodyfikowanego według wariantu B



Rys. 2c. Dyskretny model układu zmodyfikowanego według wariantu C



Rys. 2d. Dyskretny model układu zmodyfikowanego według wariantu D

$$h_2(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 a_{2i} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 b_j \cdot s^j}$$

$$h_3(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 a_{3i} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 b_j \cdot s^j}$$

gdzie współczynniki przy kolejnych potęgach zmiennej operatorowej s w liczniku i w mianowniku zapisano w postaci wektorów:

$$a_1 = [4,8e18 \quad 1,6e15 \quad 2,3e14 \quad 2,1e10 \quad 1,0e9]$$

$$a_2 = [1,4e18 \quad 3,5e14 \quad 4,2e13 \quad 4,1e9 \quad 2,0e8]$$

$$a_3 = [1,8e18 \quad 1,6e14 \quad 2,9e13 \quad 3,5e9 \quad 2,0e8]$$

$$b = [4,4e21 \quad 1,3e19 \quad 2,5e18 \quad 8,4e14 \quad 5,8e13 \quad 5,9e9 \quad 2,0e8]$$

Bieguny transmitancji P_i wyznaczono jako pierwiastki wielomianu mianownika transmitancji, a zera transmitancji Z_j jako pierwiastki wielomianu licznika transmitancji.

Wartości biegunów transmitancji układu podstawowego zebrano w tabeli 1a, a wartości zer transmitancji układu zebrano w tabeli 1b.

Wartości biegunów transmitancji układu podstawowego

Tabela 1a

i	Bieguny
	P_i
1	$-8,5 \pm j \cdot 490,8$
2	$-3,7 \pm j \cdot 225,0$
3	$-2,5 \pm j \cdot 42,5$

Wartości zer transmitancji układu podstawowego

Tabela 1b

j	Zera		
	z_{j1}	z_{j2}	z_{j3}
1	$-7,6 \pm j \cdot 453,5$	$-6,7 \pm j \cdot 413,0$	$-5,9 \pm j \cdot 373,3$
2	$-3,1 \pm j \cdot 152,4$	$-3,5 \pm j \cdot 203,0$	$-2,6 \pm j \cdot 79,9$

3.1. Bieguny i zera transmitancji dla belki wspornikowej (dla układu podstawowego)

Skalarne funkcje reprezentujące przekątną macierzy transmitancji wyznaczono wykorzystując zależność (12):

$$h_1(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 a_{1i} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 b_j \cdot s^j}$$

Ze względu na to, że bieguny i zera transmitancji są liczbami zespolonymi, przypisuje się im fizyczną interpretację jako częstotliwości rezonansowe ω_{ir} dla biegunów transmitancji oraz jako częstotliwości antyrezonansowe ω_{jar} dla zer transmitancji.

Wartości częstotliwości rezonansowych układu podstawowego zebrano w tabeli 2a, a częstotliwości antyrezonansowych w tabeli 2b.

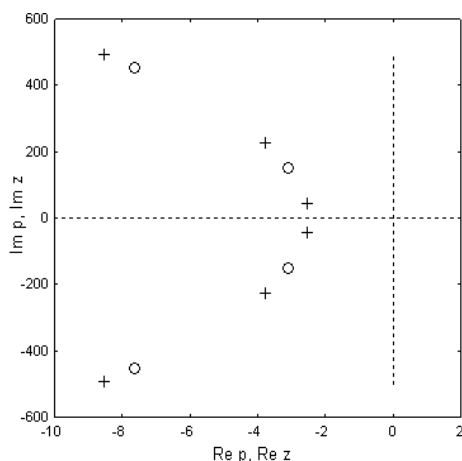
Wartości częstotliwości rezonansowych Tabela 2a

i	Częstotliwości rezonansowe [rad/s]
	ω_{ir}
1	490,9
2	225,0
3	42,6

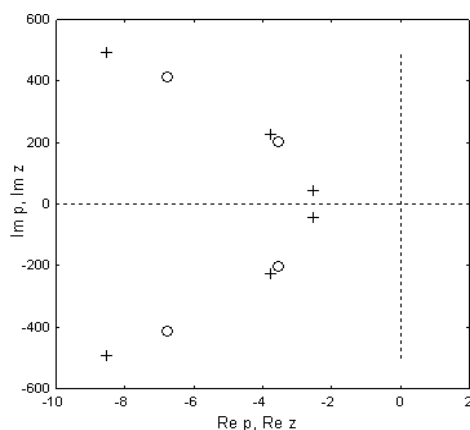
Wartości częstotliwości anty-rezonansowych Tabela 2b

j	Częstotliwości anty-rezonansowe [rad/s]		
	ω_{jar1}	ω_{jar2}	ω_{jar3}
1	453,6	413,3	373,3
2	152,5	203,3	80,0

Poglądową informację o charakterze zjawisk zachodzących w układzie uzyskuje się na podstawie analizy położenia biegunów i zer transmitancji na płaszczyźnie zespolonej. Rozkład zer i biegunów transmitancji układu podstawowego, dla przypadku gdy wyjście i wejście układu związane z kierunkiem współrzędnej uogólnionej $q_1(t)$, przedstawiono na rysunku 3a, a gdy związane z kierunkiem współrzędnej uogólnionej $q_2(t)$ - na rysunku 3b.



Rys. 3a. Położenie biegunów P_i (+) oraz zer z_j^1 (O) transmitancji układu podstawowego.



Rys. 3b. Położenie biegunów P_i (+) oraz zer z_j^2 (O) transmitancji układu podstawowego.

Do wyznaczonych wartości zer i biegunów transmitancji oraz wartości częstotliwości rezonansowych i anty-rezonansowych układu podstawowego odwołano się do zmiany tych wielkości wynikające z modyfikacji układu. Rozkłady zer i biegunów transmitancji układu podstawowego na płaszczyźnie zespolonej są typowe dla układów z niewielkim tłumieniem – charakterystyczną cechą jest przemienność położenia zer i biegunów.

3.2. Bieguny i zera transmitancji układu, w którym belka wspornikowa podparta jest liniową sprężyną

W wyniku podparcia belki wspornikowej liniową sprężyną o współczynniku sztywności k_1 (wariantowo k_2) na kierunku współrzędnej uogólnionej $q_1(t)$, zmianie uległa, odpowiednio do wariantu, wartość elementu k_{11} macierzy sztywności \mathbf{K} :

$$k_{11} = 16900 \left[\frac{N}{m} \right] \left(k_{11} = 20900 \left[\frac{N}{m} \right] \right)$$

Skalarne funkcje reprezentujące przekątną macierzy transmitancji wyznaczono wykorzystując zależność (12). Dla badanych wariantów: 1A1, 1A2, 2A1 oraz 2A2, mają one postać:

$$1h_{A1}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 1a_{A1i} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 1b_{Aj} \cdot s^j}$$

$$1h_{A2}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 1a_{A2i} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 1b_{Aj} \cdot s^j}$$

$$2h_{A1}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 2a_{A1i} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 2b_{Aj} \cdot s^j}$$

$$2h_{A2}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 2a_{A2i} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 2b_{Aj} \cdot s^j}$$

gdzie współczynniki przy kolejnych potęgach zmiennej operatorowej s w liczniku i w mianowniku zapisano w postaci wektorów:

$$1\mathbf{a}_A1 = [4,8e18 \quad 1,6e15 \quad 2,3e14 \quad 2,1e10 \quad 1,0e9]$$

$$1\mathbf{a}_A2 = [2,0e18 \quad 4,0e14 \quad 4,6e13 \quad 4,1e9 \quad 2,0e8]$$

$$1\mathbf{b}_A = [2,3e22 \quad 1,9e19 \quad 3,4e18 \quad 9,3e14 \quad 6,3e13 \quad 5,9e9 \quad 2,0e8]$$

$$2\mathbf{a}_A1 = [4,8e18 \quad 1,6e15 \quad 2,3e14 \quad 2,1e10 \quad 1,0e9]$$

$$2\mathbf{a}_A2 = [2,6e18 \quad 4,5e14 \quad 5,0e13 \quad 4,1e9 \quad 2,0e8]$$

$$2\mathbf{b}_A = [4,3e22 \quad 2,6e19 \quad 4,4e18 \quad 1,0e15 \quad 6,7e13 \quad 5,9e9 \quad 2,0e8]$$

Bieguny $1p_{Ai}$, $2p_{Ai}$ transmitancji wyznaczono jako pierwiastki wielomianu mianownika transmitancji, a zera $1z_{A1j}$, $1z_{A2j}$, $2z_{A1j}$, $2z_{A2j}$ transmitancji jako

pierwiastki wielomianu licznika transmitancji. Wartości biegunów transmitancji układu zebrano w tabeli 3a, a wartości zer transmitancji zebrano w tabeli 3b.

Wartości biegunów transmitancji układu Tabela 3a

i	Bieguny	
	$1p_{Ai}$	$2p_{Ai}$
1	$-8,5 \pm j \cdot 494,6$	$-8,5 \pm j \cdot 498,9$
2	$-3,7 \pm j \cdot 246,7$	$-3,7 \pm j \cdot 269,6$
3	$-2,6 \pm j \cdot 88,9$	$-2,6 \pm j \cdot 108,5$

Wartości zer transmitancji układu Tabela 3b

j	Zera			
	$1z_{A1j}$	$1z_{A2j}$	$2z_{A1j}$	$2z_{A2j}$
1	-7,6 $\pm j \cdot 453,5$	-6,7 $\pm j \cdot 418,2$	-7,6 $\pm j \cdot 453,5$	-6,7 $\pm j \cdot 424,5$
2	-3,1 $\pm j \cdot 152,4$	-3,5 $\pm j \cdot 239,2$	-3,1 $\pm j \cdot 152,4$	-3,6 $\pm j \cdot 268,2$

Ze względu na to, że bieguny i zera transmitancji są liczbami zespolonymi, przypisuje się im fizyczną interpretację jako częstotliwości rezonansowe $1\omega_{Air}$, $2\omega_{Air}$ dla biegunów transmitancji oraz jako częstotliwości anty-rezonansowe $1\omega_{Ajar1}$, $1\omega_{Ajar2}$, $2\omega_{Ajar1}$ i $2\omega_{Ajar2}$ dla zer transmitancji.

Wartości częstotliwości rezonansowych układu zebrano w tabeli 4a, a częstotliwości anty-rezonansowych w tabeli 4b.

Wartości częstotliwości rezonansowych Tabela 4a

i	Częstotliwości rezonansowe [rad/s]	
	$1\omega_{Air}$	$2\omega_{Air}$
1	494,6	498,9
2	246,8	269,6
3	88,9	108,6

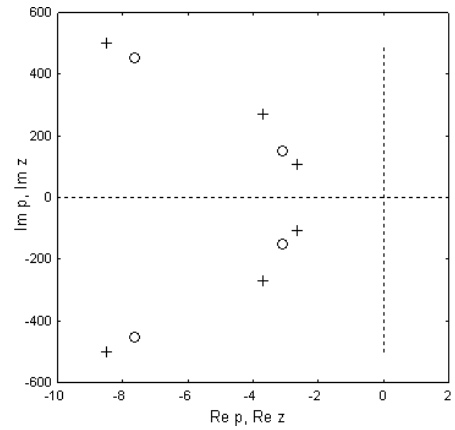
Wartości częstotliwości anty-rezonansowych Tabela 4b

j	Częstotliwości anty-rezonansowe [rad/s]			
	$1\omega_{Ajar1}$	$1\omega_{Ajar2}$	$2\omega_{Ajar1}$	$2\omega_{Ajar2}$
1	453,6	418,2	453,6	424,5
2	152,5	239,3	152,5	268,3

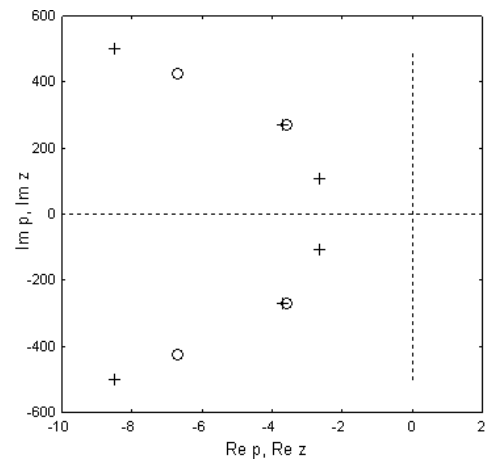
Poglądową informację o charakterze zjawisk zachodzących w układzie uzyskuje się na podstawie analizy położenia biegunów i zer transmitancji na płaszczyźnie zespolonej. Rozkład zer i biegunów transmitancji badanego układu

(sztywność sprężyny $k_2 = 8000 \left[\frac{N}{m} \right]$), dla przypadku, gdy

wyjście i wejście układu związane z kierunkiem współrzędnej uogólnionej $q_1(t)$, przedstawiono na rysunku 4a, a gdy związane z kierunkiem współrzędnej uogólnionej $q_2(t)$ - na rysunku 4b.



Rys. 4a. Położenie biegunów $2p_{Ai}$ (+) oraz zer $2z_{Aj1}$ (O) transmitancji układu



Rys. 4b. Położenie biegunów $2p_{Ai}$ (+) oraz zer $2z_{Aj2}$ (O) transmitancji układu

W wyniku podparcia belki wspornikowej liniową sprężyną o współczynniku sztywności k_1 (wariantowo k_2) na kierunku współrzędnej uogólnionej $q_2(t)$, zmianie uległa, odpowiednio do wariantu, wartość elementu k_{22} macierzy sztywności \mathbf{K} :

$$k_{22} = 85300 \left[\frac{N}{m} \right] \left(k_{22} = 89300 \left[\frac{N}{m} \right] \right)$$

Skalarne funkcje reprezentujące przekątną macierzy transmitancji wyznaczono wykorzystując zależność (12). Dla badanych wariantów: 1B1, 1B2, 2B1 oraz 2B2, mają one postać:

$$1h_{B1}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 1a_{B1i} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 1b_{Bj} \cdot s^j}$$

$$1h_{B2}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 1a_{B2i} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 1b_{Bj} \cdot s^j}$$

$$2h_{B1}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 2a_{B1i} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 2b_{Bj} \cdot s^j}$$

$$2h_{B2}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 2a_{B2i} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 2b_{Bj} \cdot s^j}$$

gdzie współczynniki przy kolejnych potęgach zmiennej operatorowej s w liczniku i w mianowniku zapisano w postaci wektorów:

$$\mathbf{1a}_B \mathbf{1} = [5,4e18 \quad 1,7e15 \quad 2,3e14 \quad 2,1e10 \quad 1,0e9]$$

$$\mathbf{1a}_B \mathbf{2} = [1,4e18 \quad 3,5e14 \quad 4,2e13 \quad 4,1e9 \quad 2,0e8]$$

$$\mathbf{1b}_B = [1,0e22 \quad 1,5e19 \quad 2,7e18 \quad 8,6e14 \quad 5,9e13 \quad 5,9e9 \quad 2,0e8]$$

$$\mathbf{2a}_B \mathbf{1} = [5,9e18 \quad 1,7e15 \quad 2,4e14 \quad 2,1e10 \quad 1,0e9]$$

$$\mathbf{2a}_B \mathbf{2} = [1,4e18 \quad 3,5e14 \quad 4,2e13 \quad 4,1e9 \quad 2,0e8]$$

$$\mathbf{2b}_B = [1,6e22 \quad 1,6e19 \quad 2,9e18 \quad 8,7e14 \quad 6,0e13 \quad 5,9e9 \quad 2,0e8]$$

Bieguny transmitancji $1p_{Bi}$, $2p_{Bi}$ wyznaczono jako pierwiastki wielomianu mianownika transmitancji, a zera transmitancji $1z_{B1j}$, $1z_{B2j}$, $2z_{B1j}$ oraz $2z_{B2j}$ jako pierwiastki wielomianu licznika transmitancji.

Wartości biegunów transmitancji układu zebrano w tabeli 5a, a wartości zer transmitancji zebrano w tabeli 5b.

Wartości biegunów transmitancji układu Tabela 5a

i	Bieguny	
	$1p_{Bi}$	$2p_{Bi}$
1	$-8,5 \pm j \cdot 492,1$	$-8,5 \pm j \cdot 493,4$
2	$-3,8 \pm j \cdot 226,1$	$-3,8 \pm j \cdot 227,3$
3	$-2,2 \pm j \cdot 83,7$	$-2,5 \pm j \cdot 78,9$

Wartości zer transmitancji układu Tabela 5b

j	Zera			
	$1z_{B1j}$	$1z_{B2j}$	$2z_{B1j}$	$2z_{B2j}$
1	-7,6 $\pm j \cdot 454,9$	-6,7 $\pm j \cdot 413,3$	-7,6 $\pm j \cdot 456,4$	-6,7 $\pm j \cdot 413,3$
2	-3,1 $\pm j \cdot 161,1$	-3,5 $\pm j \cdot 203,3$	-3,1 $\pm j \cdot 169,1$	-3,5 $\pm j \cdot 203,3$

Ze względu na to, że bieguny i zera transmitancji są liczbami zespolonymi, przypisuje się im fizyczną interpretację jako częstotliwości rezonansowe $1\omega_{Bir}$, $2\omega_{Bir}$ dla biegunów transmitancji oraz jako częstotliwości anty-rezonansowe $1\omega_{Bjar1}$, $1\omega_{Bjar2}$, $2\omega_{Bjar1}$ oraz $2\omega_{Bjar2}$ dla zer transmitancji.

Wartości częstotliwości rezonansowych układu zebrano w tabeli 6a, a częstotliwości anty-rezonansowych w tabeli 6b.

Wartości częstotliwości rezonansowych Tabela 6a

i	Częstotliwości rezonansowe [rad/s]	
	$1\omega_{Bir}$	$2\omega_{Bir}$
1	492,2	493,5
2	226,2	227,4
3	63,8	79,0

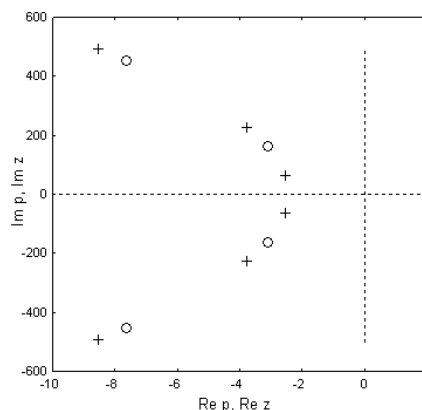
Wartości częstotliwości anty-rezonansowych Tabela 6b

j	Częstotliwości anty-rezonansowe [rad/s]			
	$1\omega_{Bjar1}$	$1\omega_{Bjar2}$	$2\omega_{Bjar1}$	$2\omega_{Bjar2}$
1	455,0	413,4	456,5	413,4
2	161,1	203,3	169,2	203,3

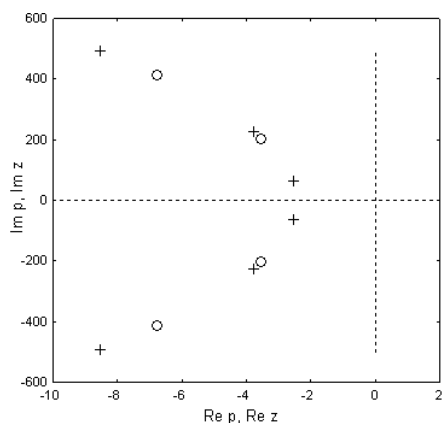
Poglądową informację o charakterze zjawisk zachodzących w układzie uzyskuje się na podstawie analizy położenia biegunów i zer transmitancji na płaszczyźnie zespolonej. Rozkład zer i biegunów transmitancji badanego układu

(sztywność sprężyny $k_2 = 8000 \left[\frac{N}{m} \right]$), dla przypadku gdy

wyjście i wejście układu związane z kierunkiem współrzędnej uogólnionej $q_1(t)$, przedstawiono na rysunku 5a, a gdy związane z kierunkiem współrzędnej uogólnionej $q_2(t)$ - na rysunku 5b.

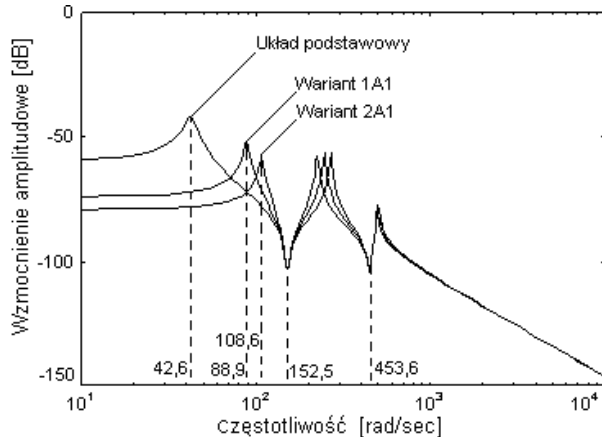


Rys. 5a. Położenie biegunów $2p_{Bi}$ (+) oraz zer $2z_{Bj1}$ (O) transmitancji układu

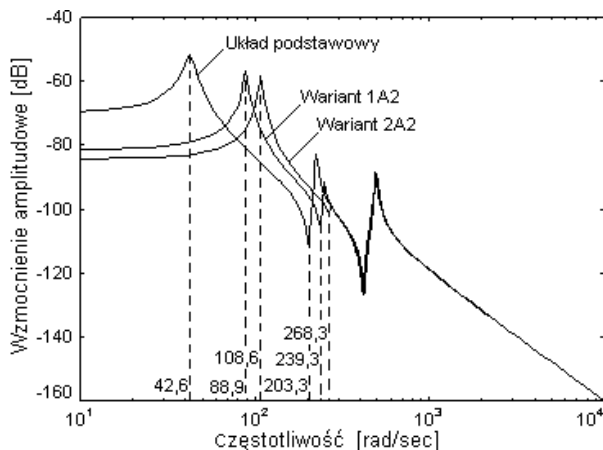


Rys. 5b. Położenie biegunów $2p_{Bi}$ (+) oraz zer $2z_{Bj2}$ (O) transmitancji układu

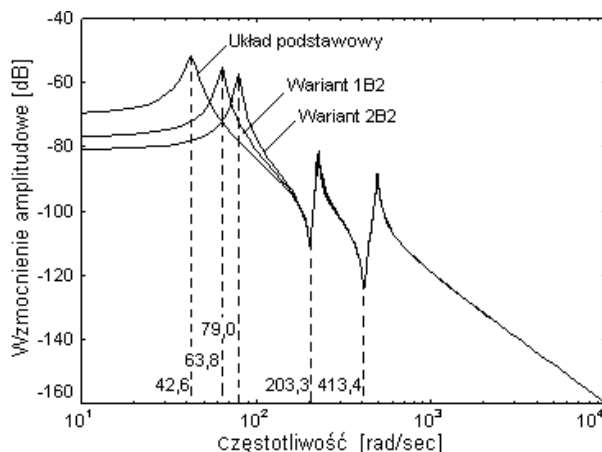
W celu przedstawienia wpływu modyfikacji układu za pomocą elementu sztywnościowego na wartości częstotliwości rezonansowych i anty-rezonansowych przeprowadzono analizę częstotliwościową z wykorzystaniem systemu komputerowego [6]. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe (w skali decybelowej) wyznaczone dla badanych wariantów przedstawiono na: rys. 6a, rys. 6b, rys. 6c oraz rys. 6d.



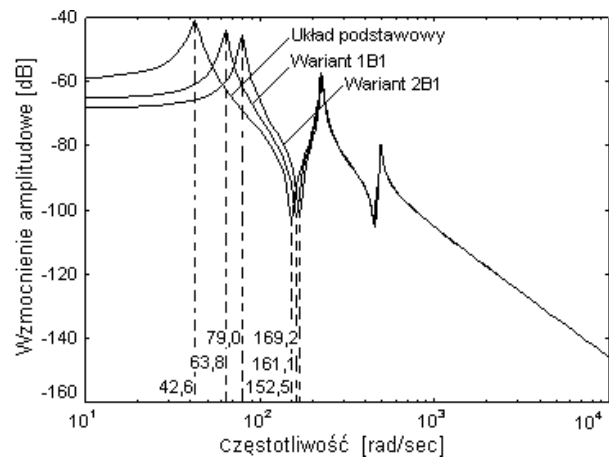
Rys. 6a. Decybelowe charakterystyki wzmocnienia dla układu podstawowego i wariantów 1A1 oraz 2A1 układu zmodyfikowanego



Rys. 6b. Decybelowe charakterystyki wzmocnienia dla układu podstawowego i wariantów 1A2 oraz 2A2 układu zmodyfikowanego



Rys. 6c. Decybelowe charakterystyki wzmocnienia dla układu podstawowego i wariantów 1B2 oraz 2B2 układu zmodyfikowanego



Rys. 6d. Decybelowe charakterystyki wzmocnienia dla układu podstawowego i wariantów 1B1 oraz 2B1 układu zmodyfikowanego

Modyfikacja układu za pomocą elementu sztywnościowego (sprężyna śrubowa) powoduje zmiany położenia biegunów (wartości częstotliwości rezonansowych) oraz zmiany położenia zer (wartości częstotliwości anty-rezonansowych). Na wartości zer i wartości częstotliwości anty-rezonansowych istotny wpływ ma postać wektora wejść i wektora wyjść.

Modyfikacja układu za pomocą elementu sztywnościowego nie zmienia formy rozkładu zer i biegunów typowego dla układu z niewielkim tłumieniem – zachowana jest przemienność położenia biegunów i zer.

Na podstawie analizy wyników stwierdzono, że wartości zer (wartości częstotliwości anty-rezonansowych) nie ulegają zmianie, jeśli modyfikacji podlega charakterystyka sztywnościowa układu na kierunku współrzędnej uogólnionej, na której działa wymuszenie oraz dokonywany jest pomiar. Wpływ lokalizacji elementu podpierającego belkę wspornikową na wartości częstotliwości rezonansowych i anty-rezonansowych jest najlepiej widoczny na wykresach charakterystyk częstotliwościowych.

3.3. Bieguny i zera transmitancji układu, w którym belka wspornikowa podparta jest tłumikiem viskozycznym

W wyniku podparcia belki wspornikowej tłumikiem viskozycznym o współczynniku tłumienia d_1 (wariantowo d_2) na kierunku współrzędnej uogólnionej $q_1(t)$, zmianie uległa, odpowiednio do wariantu wartość elementu d_{11} macierzy tłumienia \mathbf{D} :

$$d_{11} = 11,646 \left[\frac{N \cdot s}{m} \right] \left(d_{11} = 16,646 \left[\frac{N \cdot s}{m} \right] \right)$$

Skalarne funkcje reprezentujące przekątną macierzy transmitancji wyznaczono wykorzystując zależność (12). Dla badanych wariantów: 1C1, 1C2, 2C1 oraz 2C2, mają one postać:

$$1h_C 1(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 1a_{C1} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 1b_{Cj} \cdot s^j}$$

$$1h_C 2(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 1a_{C2} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 1b_{Cj} \cdot s^j}$$

$$2h_{C1}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 2a_{C1i} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 2b_{Cj} \cdot s^j}$$

$$2h_{C2}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 2a_{C2i} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 2b_{Cj} \cdot s^j}$$

gdzie współczynniki przy kolejnych potęgach zmiennej operatorowej s w liczniku i w mianowniku zapisano w postaci wektorów:

$$\mathbf{1a}_{C1} = [4,8e18 \quad 1,6e15 \quad 2,3e14 \quad 2,1e10 \quad 1,0e9]$$

$$\mathbf{1a}_{C2} = [1,4e18 \quad 1,8e15 \quad 4,3e13 \quad 1,4e10 \quad 2,0e8]$$

$$\mathbf{1b}_C = [4,4e21 \quad 6,1e19 \quad 2,6e18 \quad 3,1e15 \quad 5,9e13 \quad 1,6e10 \quad 2,0e8]$$

$$\mathbf{2a}_{C1} = [4,8e18 \quad 1,6e15 \quad 2,3e14 \quad 2,1e10 \quad 1,0e9]$$

$$\mathbf{2a}_{C2} = [1,4e18 \quad 2,6e15 \quad 4,3e13 \quad 1,9e10 \quad 2,0e8]$$

$$\mathbf{2b}_C = [4,4e21 \quad 8,5e19 \quad 2,6e18 \quad 4,3e15 \quad 6,9e13 \quad 2,1e10 \quad 2,0e8]$$

Bieguny transmitancji $1p_{Ci}$, $2p_{Ci}$ wyznaczono jako pierwiastki wielomianu mianownika transmitancji, a zera transmitancji $1z_{C1j}$, $1z_{C2j}$, $2z_{C1j}$ oraz $2z_{C2j}$ jako pierwiastki wielomianu licznika transmitancji.

Wartości biegunów transmitancji układu zebrano w tabeli 7a, a wartości zer transmitancji zebrano w tabeli 7b.

Wartości biegunów transmitancji układu Tabela 7a

i	Bieguny	
	$1p_{Ci}$	$2p_{Ci}$
1	$-12,7 \pm j \cdot 494,0$	$-14,7 \pm j \cdot 489,8$
2	$-15,1 \pm j \cdot 223,7$	$-20,7 \pm j \cdot 222,1$
3	$-12,0 \pm j \cdot 41,1$	$-16,9 \pm j \cdot 39,6$

Wartości zer transmitancji układu Tabela 7b

j	Zera			
	$1z_{C1j}$	$1z_{C2j}$	$2z_{C1j}$	$2z_{C2j}$
1	-7,6 $\pm j \cdot 453,5$	-11,2 $\pm j \cdot 412,6$	-7,6 $\pm j \cdot 453,5$	-13,2 $\pm j \cdot 411,9$
2	-3,1 $\pm j \cdot 152,4$	-24,1 $\pm j \cdot 202,1$	-3,1 $\pm j \cdot 152,4$	-34,6 $\pm j \cdot 201,0$

Ze względu na to, że bieguny i zera transmitancji są liczbami zespolonymi, przypisuje się im fizyczną interpretację jako częstotliwości rezonansowe $1\omega_{Cir}$, $2\omega_{Cir}$ dla biegunów transmitancji oraz jako częstotliwości anty-rezonansowe $1\omega_{Cjar1}$, $1\omega_{Cjar2}$, $2\omega_{Cjar1}$ i $2\omega_{Cjar2}$ dla zer transmitancji.

Wartości częstotliwości rezonansowych układu zebrano w tabeli 8a, a częstotliwości anty-rezonansowych w tabeli 8b.

Wartości częstotliwości rezonansowych Tabela 8a

i	Częstotliwości rezonansowe [rad/s]	
	$1\omega_{Cir}$	$2\omega_{Cir}$
1	495,0	490,0
2	224,2	223,0
3	42,8	43,0

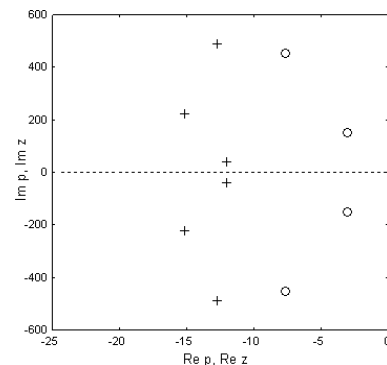
Wartości częstotliwości anty-rezonansowych Tabela 8b

j	Częstotliwości anty-rezonansowe [rad/s]			
	$1\omega_{Cjar1}$	$1\omega_{Cjar2}$	$2\omega_{Cjar1}$	$2\omega_{Cjar2}$
1	453,6	412,8	453,6	412,1
2	152,5	203,6	152,5	203,9

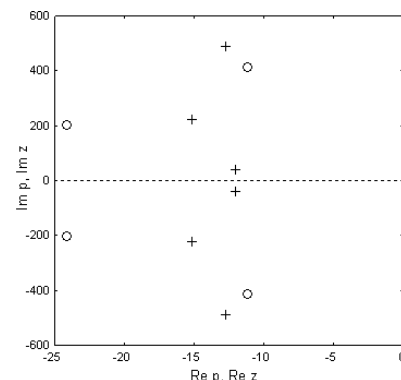
Poglądową informację o charakterze zjawisk zachodzących w układzie uzyskuje się na podstawie analizy położenia biegunów i zer transmitancji na płaszczyźnie zespolonej. Rozkład zer i biegunów transmitancji badanego układu

(współczynnik tłumienia $d_1 = 10 \left[\frac{N \cdot s}{m} \right]$), dla przypadku

gdy wyjście i wejście układu związane z kierunkiem współrzędnej uogólnionej $q_1(t)$, przedstawiono na rysunku 7a, a gdy związane z kierunkiem współrzędnej uogólnionej $q_2(t)$ - na rysunku 7b.



Rys. 7a. Położenie biegunów $2p_{Ci}$ (+) oraz zer $2z_{Cj1}$ (O) transmitancji układu



Rys. 7b. Położenie biegunów $2p_{Ci}$ (+) oraz zer $2z_{Cj2}$ (O) transmitancji układu

W wyniku podparcia belki wspornikowej tłumikiem wiskotycz-nym o współczynniku tłumienia d_1 (wariantowo d_2) na kierunku współrzędnej uogólnionej $q_2(t)$, zmianie uległa, odpowiednio do wariantu, wartość elementu d_{22} macierzy tłumienia \mathbf{D} :

$$d_{22} = 19,067 \left[\frac{N \cdot s}{m} \right] \left(d_{22} = 24,067 \left[\frac{N \cdot s}{m} \right] \right)$$

Skalarne funkcje reprezentujące przekątną macierzy transmitancji wyznaczono wykorzystując zależność (12). Dla badanych wariantów: 1D1, 1D2, 2D1 oraz 2D2, mają one postać:

$$1h_{D1}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 1a_{D1i} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 1b_{Dj} \cdot s^j}$$

$$1h_{D2}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 1a_{D2i} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 1b_{Dj} \cdot s^j}$$

$$2h_{D1}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 2a_{D1i} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 2b_{Dj} \cdot s^j}$$

$$2h_{D2}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 2a_{D2i} \cdot s^i}{\sum_{j=0}^6 2b_{Dj} \cdot s^j}$$

gdzie współczynniki przy kolejnych potęgach zmiennej operatorowej s w liczniku i w mianowniku zapisano w postaci wektorów:

$$1\mathbf{a}_D1 = [4,8e18 \quad 3,1e15 \quad 2,3e14 \quad 3,1e10 \quad 1,0e9]$$

$$1\mathbf{a}_D2 = [1,4e18 \quad 3,5e14 \quad 4,2e13 \quad 4,1e9 \quad 2,0e8]$$

$$1\mathbf{b}_D = [4,4e21 \quad 2,7e19 \quad 2,5e18 \quad 1,3e15 \quad 5,9e13 \quad 5,9e9 \quad 2,0e8]$$

$$2\mathbf{a}_D1 = [4,8e18 \quad 3,8e15 \quad 2,3e14 \quad 3,6e10 \quad 1,0e9]$$

$$2\mathbf{a}_D2 = [1,4e18 \quad 3,5e14 \quad 4,2e13 \quad 4,1e9 \quad 2,0e8]$$

$$2\mathbf{b}_D = [4,4e21 \quad 3,4e19 \quad 2,5e18 \quad 1,5e15 \quad 5,9e13 \quad 8,9e9 \quad 2,0e8]$$

Bieguny transmitancji $1p_{Di}$, $2p_{Di}$ wyznaczono jako pierwiastki wielomianu mianownika transmitancji, a zera transmitancji $1z_{D1j}$, $1z_{D2j}$, $2z_{D1j}$ oraz $2z_{D2j}$ jako pierwiastki wielomianu licznika transmitancji.

Wartości biegunów transmitancji układu zebrano w tabeli 9a, a wartości zer transmitancji zebrano w tabeli 9b.

Ze względu na to, że bieguny i zera transmitancji są liczbami zespolonymi, przypisuje się im fizyczną interpretację jako częstotliwości rezonansowe $1\omega_{Dir}$, $2\omega_{Dir}$ dla biegunów transmitancji oraz jako częstotliwości anty-rezonansowe $1\omega_{Djar1}$, $1\omega_{Djar2}$, $2\omega_{Djar1}$ i $2\omega_{Djar2}$ dla zer transmitancji.

Wartości częstotliwości rezonansowych układu zebrano w tabeli 10a, a częstotliwości anty-rezonansowych w tabeli 10b.

Wartości biegunów transmitancji układu Tabela 9a

i	Bieguny	
	$1p_{Di}$	$2p_{Di}$
1	-10,1±j.498,0	-10,8±j.490,8
2	-4,4±j.225,0	-4,7±j.225,0
3	-5,4±j.42,2	-6,8±j.42,0

Wartości zer transmitancji układu Tabela 9b

j	Zera			
	$1z_{D1j}$	$1z_{D2j}$	$2z_{D1j}$	$2z_{D2j}$
1	-9,2 ±j.453,5	-6,7 ±j.413,3	-10,0 ±j.453,4	-6,7 ±j.413,3
2	-6,5 ±j.152,3	-3,5 ±j.203,3	-8,2 ±j.152,3	-3,5 ±j.203,3

Wartości częstotliwości rezonansowych Tabela 10a

i	Częstotliwości rezonansowe [rad/s]	
	$1\omega_{Dir}$	$2\omega_{Dir}$
1	499,0	499,0
2	225,0	225,0
3	42,6	42,6

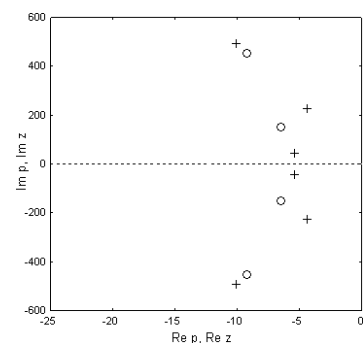
Wartości częstotliwości anty-rezonansowych Tabela 10b

j	Częstotliwości anty-rezonansowe [rad/s]			
	$1\omega_{Djar1}$	$1\omega_{Djar2}$	$2\omega_{Djar1}$	$2\omega_{Djar2}$
1	453,6	413,4	453,5	413,4
2	152,5	203,3	152,5	203,3

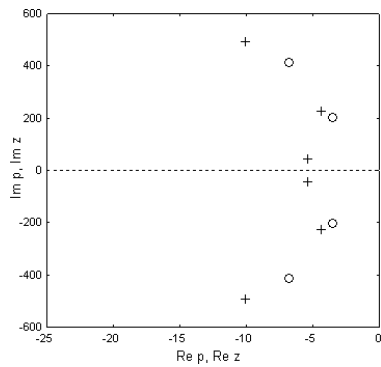
Poglądową informację o charakterze zjawisk zachodzących w układzie uzyskuje się na podstawie analizy położenia biegunów i zer transmitancji na płaszczyźnie zespolonej. Rozkład zer i biegunów transmitancji badanego układu

(współczynnik tłumienia $d_2 = 15 \left[\frac{N \cdot s}{m} \right]$), dla przypadku

gdy wyjście i wejście układu związane z kierunkiem współrzędnej uogólnionej $q_1(t)$, przedstawiono na rysunku 8a, a gdy związane z kierunkiem współrzędnej uogólnionej $q_2(t)$ - na rysunku 8b.

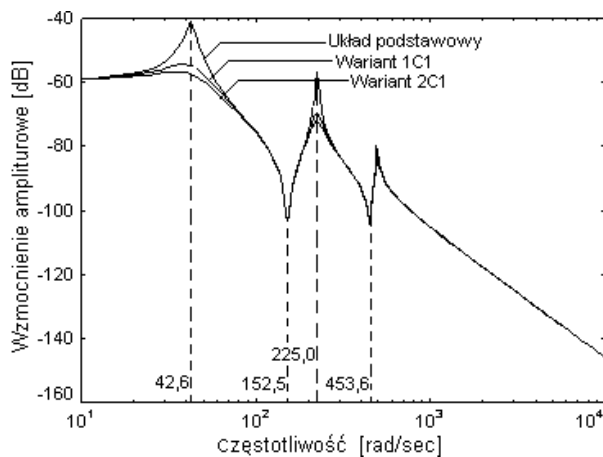


Rys. 8a. Położenie biegunów $2p_{Di}$ (+) oraz zer $2z_{Dj1}$ (o) transmitancji układu

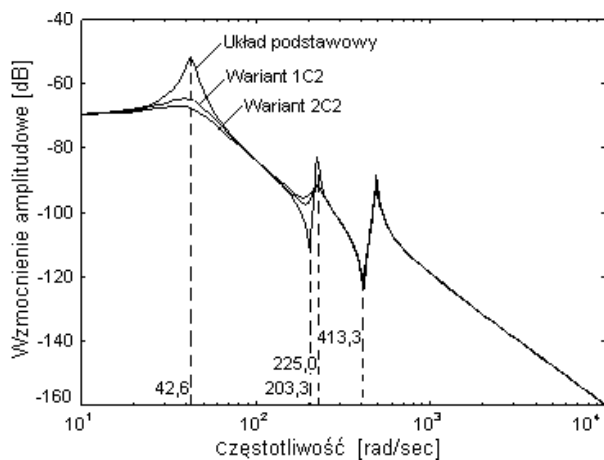


Rys. 8b. Położenie biegunów $2p_{Di}$ (+) oraz zer $2z_{Dj} 2$ (O) transmitancji układu

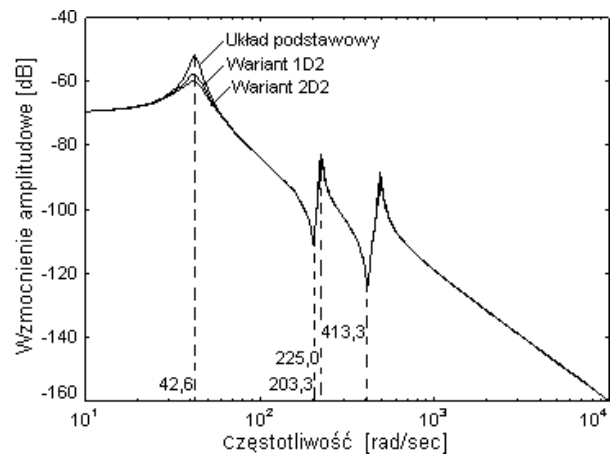
W celu przedstawienia wpływu modyfikacji układu za pomocą elementu tłumieniowego na wartości częstotliwości rezonansowych i anty-rezonansowych przeprowadzono analizę częstotliwościową. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe (w skali decybelowej) wyznaczone dla badanych wariantów przedstawiono na: rys. 9a, rys. 9b, rys. 9c oraz rys. 9d.



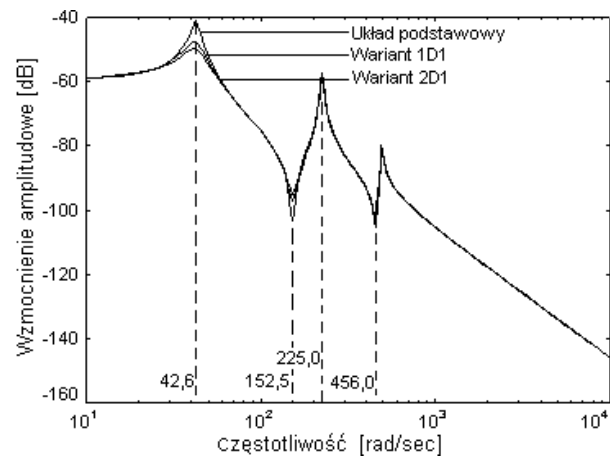
Rys. 9a. Decybelowe charakterystyki wzmocnienia dla układu podstawowego i wariantów 1C1 oraz 2C1 układu zmodyfikowanego



Rys. 9b. Decybelowe charakterystyki wzmocnienia dla układu podstawowego i wariantów 1C2 oraz 2C2 układu zmodyfikowanego



Rys. 9c. Decybelowe charakterystyki wzmocnienia dla układu podstawowego i wariantów 1D2 oraz 2D2 układu zmodyfikowanego



Rys. 9d. Decybelowe charakterystyki wzmocnienia dla układu podstawowego i wariantów 1D1 oraz 2D1 układu zmodyfikowanego

Modyfikacja układu za pomocą elementu tłumieniowego (tłumik wiskotyczny) powoduje zmiany położenia biegunów oraz zmiany położenia zer ale tylko w niewielkim stopniu zmienia wartości częstotliwości rezonansowych i anty-rezonansowych. Na wartości zer istotny wpływ ma postać wektora wejść i wektora wyjść.

Modyfikacja układu za pomocą elementu tłumieniowego powoduje, że nie jest spełniony warunek przemienności położenia zer i biegunów. Na podstawie rozkładu zer i biegunów możliwa jest zatem jakościowa ocena tłumienia w układzie.

Na podstawie analizy wyników stwierdzono, że wartości zer (wartości częstotliwości anty-rezonansowych) nie ulegają zmianie, jeśli modyfikacji podlega charakterystyka tłumieniowa układu na kierunku współrzędnej uogólnionej, na której działa wymuszenie oraz dokonywany jest pomiar. Wpływ lokalizacji elementu podpierającego belkę wspornikową na wartości częstotliwości rezonansowych i anty-rezonansowych jest najlepiej widoczny na wykresach charakterystyk częstotliwościowych.

4. Podsumowanie

Analiza wyników przeprowadzonych badań numerycznych wskazuje na praktyczne aspekty wyznaczania zer i biegunów transmitancji w badaniach dynamiki liniowych układów mechanicznych. Stany dynamiki układu określane jako stan rezonansowy i stan anty-rezonansowy uzyskano poprzez modyfikację struktury układu (podpierając belkę wspornikową – układ podstawowy – za pomocą liniowej sprężyny i liniowego tłumika), jak i za pomocą modyfikacji charakterystyk sztywnościowych i tłumieniowych zastosowanych elementów podparcia.

Bieguny transmitancji (częstotliwości rezonansowe) reprezentują układ ze względu na jego konstrukcję, natomiast zera transmitancji (częstotliwości anty-rezonansowe), reprezentują układ ze względu na jego konstrukcję oraz przyjęte schematy rozkładu wielkości wejściowych (kierunki wymuszeń) i wielkości wyjściowych (kierunki wielkości mierzonych). Zatem łączne badanie zer i biegunów transmitancji układu umożliwia ocenę jego dynamiki w aspekcie globalnym (bieguny) oraz lokalnym (zera), co niewątpliwie zwiększa możliwości i gwarantuje wyższą skuteczność prowadzonych badań w zakresie analizy dynamiki układów mechanicznych.

Literatura

- [1] Barczak A., *Wpływ tłumienia wewnętrznego konstrukcji nośnej na charakterystyki dynamiczne układu z punktowym tłumikiem wiskotycznym*. Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, *Maszyny Robocze i Transport*, NR 56, Poznań 2003.
- [2] Kaczorek T., *Teoria sterowania i systemów*, PWN, Warszawa 1993.
- [3] Miu D. K., *Physical Interpretation of Transfer Functions Zeros for Simple Control Systems With Mechanical Flexibilities*, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control*, Vol. 113, Sept. 1991.
- [4] Mottershead J. E., *On The Zeros of Structural Frequency Response Functions and Their Sensitivities*, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 12, 1998.
- [5] Mottershead J. E., *Structural Modification for the Assignment of Zeros Using Measured Receptances*, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 68, 2001.
- [6] MATLAB, wersja 5.