dr inż. Arkadiusz Barczak
Politechnika Poznańska

Podtorze jako regulator w układzie pojazd szynowy-tor

W artykule przeprowadzono badania modelu układu pojazd-tor, przyjmując, że między wektorem wyjścia, którego składowe stanowią siły działające w elementach zawieszenia pojazdu, a wektorem wejścia, którego składowe stanowią przemieszczenia wynikające z nierówności toru, występuje sprzężenie zwrotne. Zatem w modelu oddziaływań między pojazdem a torem wprowadzono układ typu regulator.

1. Wprowadzenie

Pojazd szynowy jest złożonym, dyskretno-ciągłym układem dynamicznym, który podlega podczas ruchu wielowymiarowym stanom obciążenia. Jego stany pracy wynikają w znacznym zakresie z oddziaływań toru.

Tor jest złożonym, dyskretno-ciągłym układem dynamicznym, który jest poddany wielowymiarowym stanom obciążenia. Jego stany pracy zależą w decydującym stopniu od oddziaływań pojazdu.

Fizyczne i matematyczne modele dynamiki pojazdu szynowego oraz toru prezentowano i analizowano w wielu pracach [2,4]. Podstawowe typy modeli toru to modele dyskretne jedno- i wielowarstwowe oraz modele ciągłe jedno- i wielowarstwowe. Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów opracowano w dziedzinie częstotliwości modele analityczne charakteryzujące pracę toru [2].

W cytowanych opracowaniach przyjęto klasyczną metodę analizy układu badając zależności między wektorem wielkości wejściowych – wymuszeń od toru, a wektorem wielkości wyjściowych – odpowiedzi układu na kierunkach stopni swobody reprezentujących dynamikę pojazdu.

W artykule przyjęto metodę badania modelu układu pojazd-tor przyjmując, że między wektorem wyjścia, którego składowe stanowią siły działające w elementach zawieszenia pojazdu, a wektorem wejścia, którego składowe stanowią przemieszczenia wynikające z nierówności toru oraz podatności podtorza, występuje sprzężenie zwrotne. Zatem w modelu oddziaływań między pojazdem a torem wprowadzono układ typu regulator.

Celem artykułu jest wyznaczenie charakterystyk sztywnościowych i tłumieniowych modelu podtorza, przy założeniu, że w układzie występuje sprzężenie zwrotne.

2. Wyznaczanie parametrów modelu podtorza dla zadanych charakterystyk własnych modelu układu

Analizę modelu układu przeprowadzono w zakresie częstotliwości 0÷30 Hz. Przyjęto, że uwzględnienie modelu podtorza wpływa w niewielkim stopniu na charakterystyki własne modelu pojazdu.

Do opisu dynamiki układu wykorzystano formalizm transmitancji operatorowej oraz metodę przestrzeni stanu.

Do wyznaczenia parametrów regulatora zastosowano metodę optymalizacji z kwadratowym wskaźnikiem jakości [1,3].

Równania ruchu dyskretnego, liniowego, stacjonarnego modelu układu o n stopniach swobody przedstawiono w postaci:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{G}\mathbf{f} \tag{1}$$

a równanie wyjść jako:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\mathbf{q} \tag{2}$$

gdzie:
$\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$ – wektory przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń uogólnionych,
$\mathbf{f}$ – wektor wymuszeń,
$\mathbf{y}$ – wektor wielkości wyjściowych,
$\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ – macierze bezwładności, tłumienia i sztywności,
$\mathbf{G}$ – macierz wejść,
$\mathbf{Z}$ – macierz wyjść.

Po przeprowadzeniu transformacji Laplace'a równań (1) oraz (2) i przyjęciu zerowych warunków początkowych $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$, wyznaczono transmitancję operatorową modelu układu $\mathbf{H}(s)$ jako:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{Z}(\mathbf{K} + \mathbf{C}s + \mathbf{M}s^2)^{-1}\mathbf{G} \tag{3}$$

gdzie: s jest zmienną operatorową.

Dokonując podstawienia $s = j\omega$, gdzie ω jest częstotliwością kołową, a j jest jednostką urojoną, do zależności (3) uzyskano macierz transmitancji widmowej $H(j\omega)$. Do oceny zjawisk zachodzących w układzie wykorzystano charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową oraz fazowo-częstotliwościową [3].

W celu zastosowania w analizie metody przestrzeni stanu wprowadzono $2n$-wymiarowy wektor stanu $\mathbf{x}$, a równania (1) i (2) przedstawiono w postaci równania stanu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{4}$$

gdzie macierz $\mathbf{A}$ jest nazywana macierzą stanu, macierz $\mathbf{B}$ – macierzą wejść, a $\mathbf{u}$ – wektorem wejść.

2.1. Wyznaczanie parametrów modelu podtorza dla zadanych charakterystyk własnych z wykorzystaniem transmitancji operatorowej

Do badań przyjęto model układu, jak opisano równaniem (1)

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = c\dot{\xi}(t) + k\xi(t) \tag{5}$$

gdzie:
m – masa nadwozia,
c – stała tłumika w zawieszeniu nadwozia,
k – stała sprężyny w zawieszeniu nadwozia,
q – współrzędna uogólniona,
ξ – funkcja charakteryzująca nierówność toru.

Przyjęto, że wejściem jest nierówność toru $\xi(t)$, a wektor wyjścia stanowią: siła w sprężynie zawieszenia $F_S(t)$ oraz siła w tłumiku zawieszenia $F_T(t)$.

Po przeprowadzeniu transformacji Laplace'a równania (5) uzyskano:

$$ms^2q(s) + csq(s) + kq(s) = cs\xi(s) + k\xi(s) \tag{6}$$

Transmitancję operatorową między siłą w sprężynie zawieszenia a nierównością toru zapisano jako:

$$H_{11}(s) = \frac{k[q(s) - \xi(s)]}{\xi(s)} \tag{7}$$

Transmitancję operatorową między siłą w tłumiku zawieszenia a nierównością toru zapisano jako:

$$H_{21}(s) = \frac{cs[q(s) - \xi(s)]}{\xi(s)} \tag{8}$$

Po przeprowadzeniu odpowiednich przekształceń uzyskano transmitancję $H_{11}(s)$ w postaci:

$$H_{11}(s) = \frac{-mks^2}{ms^2 + cs + k} \tag{9}$$

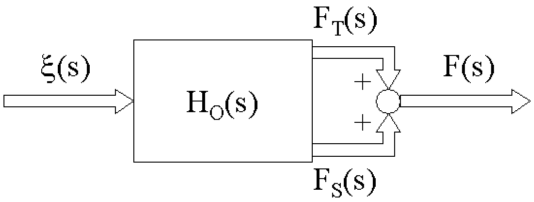
oraz transmitancję $H_{21}(s)$ w postaci:

$$H_{21}(s) = \frac{-mcs^3}{ms^2 + cs + k} \tag{10}$$

Do badań przyjęto, że wyjściem jest siła $F(t)$ jako suma sił $F_S(t)$ i $F_T(t)$. Transmitancję zastępczą układu przyjęto zatem w postaci:

$$H_O(s) = \frac{-mcs^3 - mks^2}{ms^2 + cs + k} \tag{11}$$

co przedstawiono w zapisie operatorowym na rys. 1.

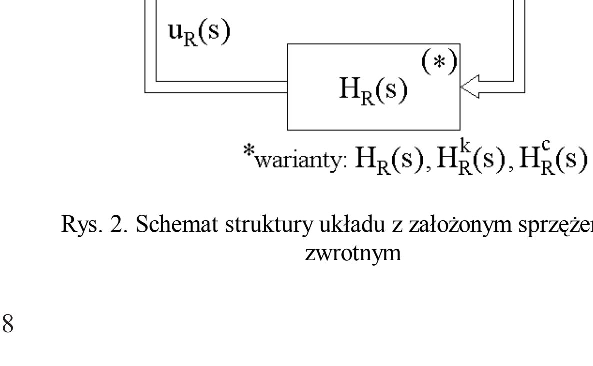


Rys. 1. Schemat struktury badanego układu

Przyjęto, że między wyjściem w postaci siły działającej w zawieszeniu, a wejściem w postaci przemieszczenia wynikającego z nierówności toru i podatności podtorza, występuje sprzężenie zwrotne. Transmitancję elementu występującego w pętli sprzężenia zwrotnego określono jako stosunek transformaty wyjścia w postaci przemieszczenia do transformaty wejścia w postaci siły. Schemat układu z pętlą sprzężenia zwrotnego przy wariantach regulatora w postaci:

- elementu sprężystego o transmitancji:

$$H_R^k(s) = \frac{1}{k_R} \tag{12}$$



Rys. 2. Schemat struktury układu z założonym sprzężeniem zwrotnym

- elementu tłumieniowego o transmitancji:

$$H_R^c(s) = \frac{1}{c_R s} \tag{13}$$

- elementu sprężysto-tłumieniowego o transmitancji:

$$H_R(s) = \frac{1}{k_R + c_R s} \tag{14}$$

przedstawiono w zapisie operatorowym na rys. 2.

Transmitancję zastępczą $H_z^k(s)$ dla wariantu układu z regulatorem $H_R^k(s)$ wyznaczono w postaci:

$$H_z^k(s) = \frac{-k_R mcs^3 - k_R mks^2}{-mcs^3 + (k_R m - mk)s^2 + k_R cs + k_R k} \tag{15}$$

Transmitancję zastępczą $H_z^c(s)$ dla wariantu układu z regulatorem $H_R^c(s)$ wyznaczono w postaci:

$$H_z^c(s) = \frac{-mc_R cs^3 - mkc_R s^2}{(c_R m - mc)s^2 + (c_R c - mk)s + c_R k} \tag{16}$$

Transmitancję zastępczą $H_z(s)$ dla wariantu układu z regulatorem $H_R(s)$ wyznaczono w postaci:

$$H_z(s) = \frac{-mc_R cs^4 - (mkc_R + mkc)s^3 - mkk_R s^2}{(c_R m - mc)s^3 + (k_R m + c_R c - mk)s^2 + (k_R c + c_R k)s + kk_R} \tag{17}$$

W celu zbadania wpływu zależności między charakterystykami modelu pojazdu a charakterystykami modelu podtorza na charakterystyki własne układu, wprowadzono bezwymiarowy współczynnik V dla charakterystyk sztywnościowych:

$$V_i = \frac{k_{Ri}}{k} \tag{18}$$

oraz bezwymiarowy współczynnik W dla charakterystyk tłumieniowych:

$$W_j = \frac{c_{Rj}}{c} \tag{19}$$

Transmitancję zastępczą (17) po wprowadzeniu współczynnika V zapisano wzorem:

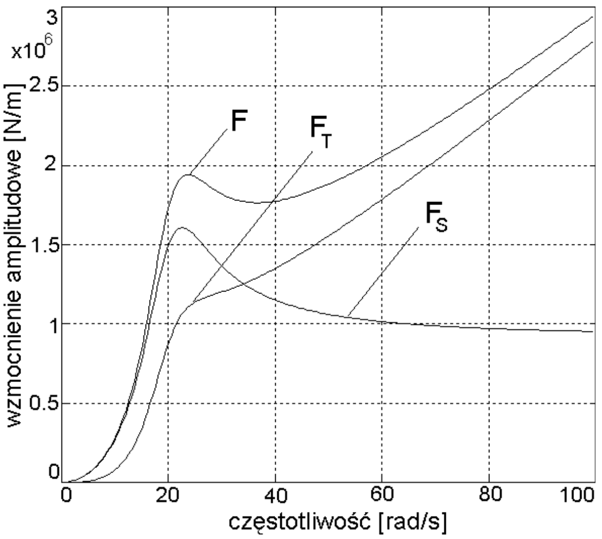
$$H_z^V = \frac{-\frac{mc_R c}{k^2}s^4 - (\frac{mc_R}{k} + \frac{mc}{k}V)s^3 - mVs^2}{(\frac{c_R m}{k^2} - \frac{mc}{k^2})s^3 + (V\frac{m}{k} + \frac{c_R c}{k^2} - \frac{m}{k})s^2 + (V\frac{c}{k} + \frac{c_R}{k})s + V} \tag{20}$$

Transmitancję zastępczą (17) po wprowadzeniu współczynnika W zapisano wzorem:

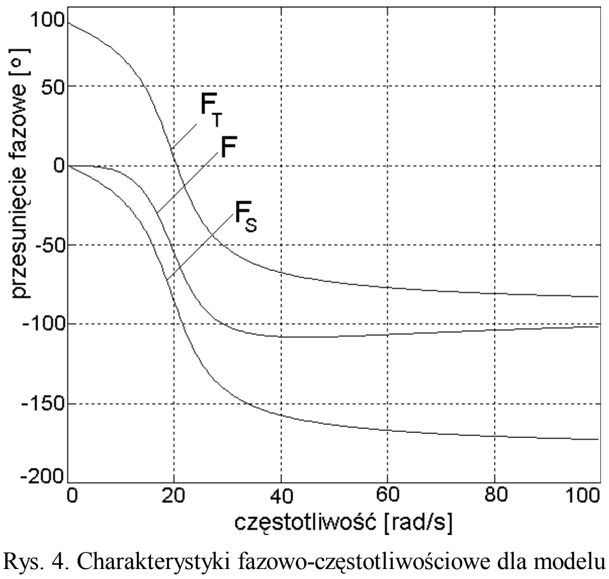
$$H_z^W = \frac{-mWs^4 - (\frac{mk}{c}W + \frac{mk_R}{c})s^3 - \frac{mkk_R}{c^2}s^2}{(\frac{m}{c}W - \frac{m}{c})s^3 + (\frac{k_R m}{c^2} + W - \frac{mk}{c^2})s^2 + (\frac{k_R}{c} + \frac{k}{c}W)s + \frac{kk_R}{c^2}} \tag{21}$$

Analizę numeryczną przeprowadzono dla przyjętych danych charakteryzujących model pojazdu:

$m = 2200$ [kg]
$k = 920$ [kN/m]
$c = 27$ [kN·s/m]
Wartości własne modelu pojazdu wyznaczono znajdując pierwiastki mianownika transmitancji (11):
$\lambda_{1,2} = -6{,}1364 \pm j19{,}5071$
Pierwiastkom tym odpowiada częstotliwość tłumionych drgań własnych:
$\omega_d = 20{,}45$ [rad/s]
Dla przyjętego modelu przeprowadzono badania w dziedzinie częstotliwości. Wyznaczone charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe odpowiadające transmitancji wyrażonej wzorami (9), (10) i (11) pokazano na rys. 3, a charakterystyki fazowo-częstotliwościowe na rys. 4.



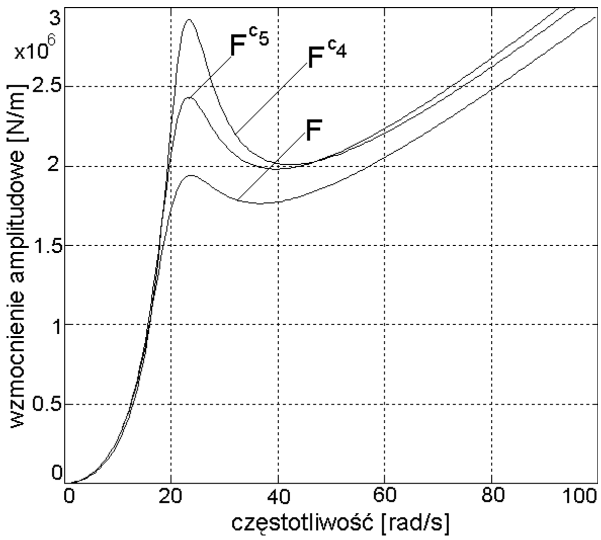
Rys. 3. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe dla modelu pojazdu



Rys. 4. Charakterystyki fazowo-częstotliwościowe dla modelu pojazdu

Do analizy badanego układu przyjęto następujące wartości stałych k_{Rs}:
$k_1 = 1{,}0 \cdot 10^7$ [N/m], $c_1 = 0{,}5 \cdot 10^5$ [N·s/m],
$k_2 = 0{,}5 \cdot 10^8$ [N/m], $c_2 = 1{,}0 \cdot 10^5$ [N·s/m],
$k_3 = 1{,}0 \cdot 10^8$ [N/m], $c_3 = 1{,}5 \cdot 10^5$ [N·s/m],
$k_4 = 2{,}0 \cdot 10^8$ [N/m], $c_4 = 2{,}0 \cdot 10^5$ [N·s/m],
oraz wartości stałych c_{Rq}: $c_5 = 4{,}0 \cdot 10^5$ [N·s/m].

Transmitancja operatorowa $H_z^k(s)$ modelu (15) świadczy o niestabilności układu (bieguny transmitancji leżą w dodatniej półpłaszczyźnie zespolonej).
Jest to istotne stwierdzenie świadczące o tym, że w modelu podtorza oprócz elementu sprężystego konieczne jest przyjęcie elementu tłumieniowego.
Dla przyjętych stałych c_R przeprowadzono analizę częstotliwościową modelu układu (16). Stwierdzono, że przyjęty model regulatora w postaci (13) nie umożliwia uzyskania charakterystyk własnych układu ze sprzężeniem zwrotnym o wartościach bliskich wartościom własnym modelu pojazdu. Zatem nie spełnia on przyjętego założenia, aby wartości własne modelu układu ze sprzężeniem zwrotnym były w przybliżeniu równe wartościom własnym modelu pojazdu. Przykładowe przebiegi charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej dla modelu (16) przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe dla modelu ze sprzężeniem zwrotnym opisanego transmitancją $H_z^c(s)$ dla wybranych wariantów

Do dalszych badań przyjęto model podtorza jako układ o charakterystykach sprężystych i tłumieniowych. Badania przeprowadzono dla modelu o transmitancji $H_z(s)$ (17).
Dla współczynnika V_p przyjęto wartości:
$V_1 = 1$,
$V_2 = 5$,
$V_3 = 10$,
$V_4 = 100$,
a dla współczynnika W_r przyjęto wartości:
$W_1 = 1$,
$W_2 = 5$,
$W_3 = 10$,
$W_4 = 50$.
Bieguny transmitancji (20) dla wybranych wartości współczynnika V zebrano w tabeli 1.

Bieguny transmitancji $H_z^V(s)$ dla wybranych wartości współczynnika V **Tabela 1**

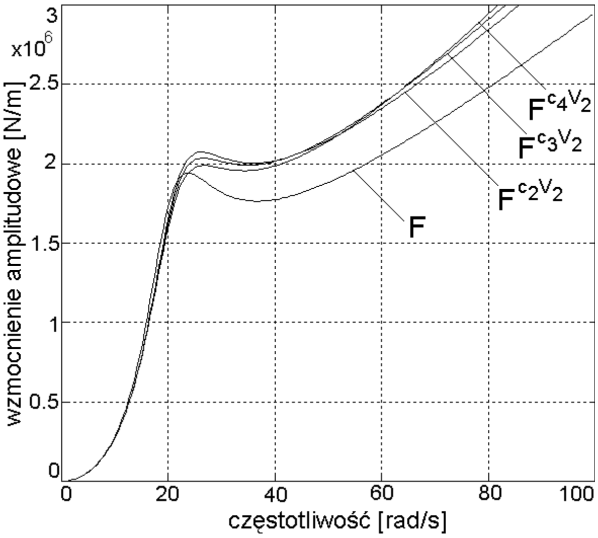
Wariant $V_p c_q$	Bieguny transmitancji		
	λ_1	λ_2	λ_3
V_2c_3	-68,06	-7,11 +j20,2	-7,11 -j20,2
V_3c_3	-368,8	-6,34 +j19,59	-6,34 -j19,59
V_4c_3	-742,9	-6,24 +j19,55	-6,24 -j19,55
V_2c_4	-48,04	-7,01 +j20,34	-7,01 -j20,34
V_3c_4	-262,09	-6,34 +j19,6	-6,34 -j19,6
V_4c_4	-528,19	-6,24 +j19,55	-6,24 -j19,55

Bieguny transmitancji (21) dla wybranych wartości współczynnika W zebrano w tabeli 2.

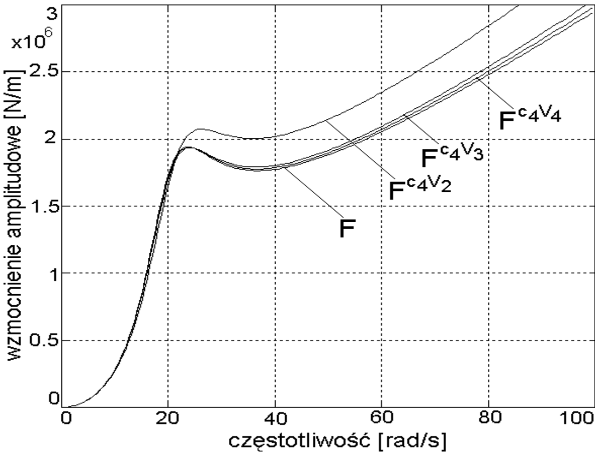
Bieguny transmitancji $H_z^W(s)$ dla wybranych wartości współczynnika W **Tabela 2**

Wariant $W_r k_s$	Bieguny transmitancji		
	λ_1	λ_2	λ_3
W_2k_2	-457,14	-6,32 +j19,58	-6,32 -j19,58
W_3k_2	-202,97	-6,32 +j19,6	-6,32 -j19,6
W_4k_2	-37,1	-6,26 +j19,6	-6,26 -j19,6
W_2k_3	-920,29	-6,23 +j19,54	-6,23 -j19,54
W_3k_3	-408,91	-6,23 +j19,55	-6,23 -j19,55
W_4k_3	-74,97	-6,22 +j19,57	-6,22 -j19,57

Przebiegi przykładowych charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych dla modelu (20) przedstawiono na rys. 6 oraz rys.7.

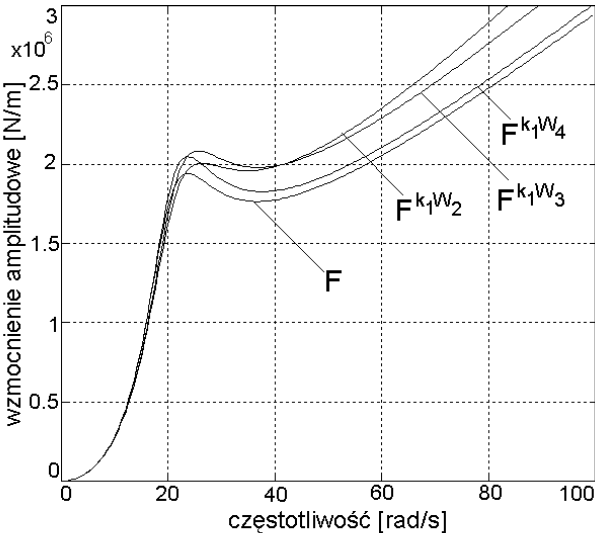


Rys. 6. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe dla modelu ze sprzężeniem zwrotnym opisanego transmitancją $H_z^V(s)$ dla wybranych wariantów

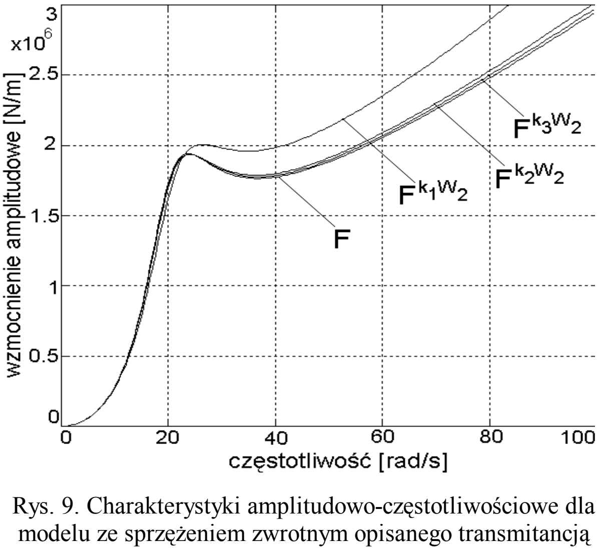


Rys. 7. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe dla modelu ze sprzężeniem zwrotnym opisanego transmitancją $H_z^V(s)$ dla wybranych wariantów

Przebiegi przykładowych charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych dla modelu (21) przedstawiono na rys. 8 oraz rys. 9.



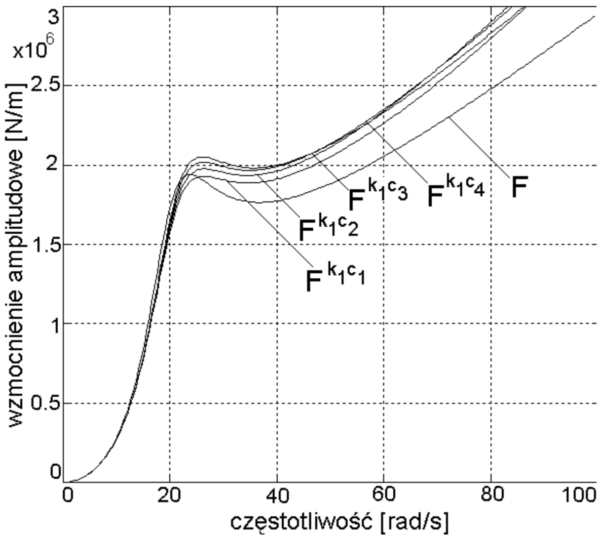
Rys. 8. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe dla modelu ze sprzężeniem zwrotnym opisanego transmitancją $H_z^W(s)$ dla wybranych wariantów



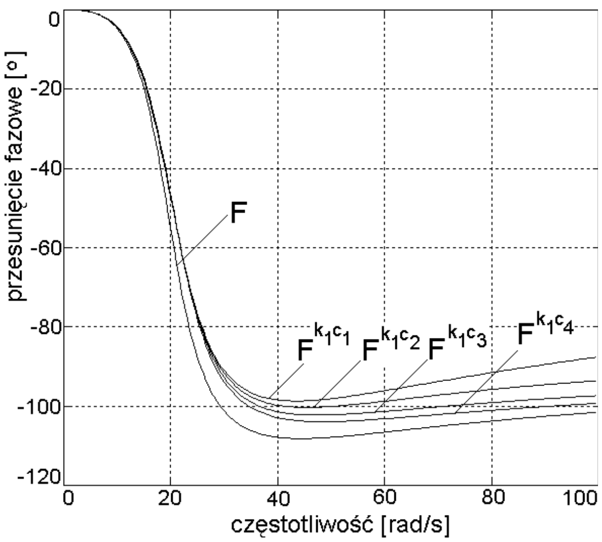
Rys. 9. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe dla modelu ze sprzężeniem zwrotnym opisanego transmitancją $H_z^W(s)$ dla wybranych wariantów

Na podstawie przeprowadzonej analizy wyznaczonych charakterystyk częstotliwościowych wybrano te wartości współczynników k_R oraz c_R charakteryzujących transmitancję układu ze sprzężeniem zwrotnym $H_z(s)$ (17), dla których spełniony jest warunek podobieństwa charakterystyk własnych modelu układu ze sprzężeniem zwrotnym i modelu pojazdu.

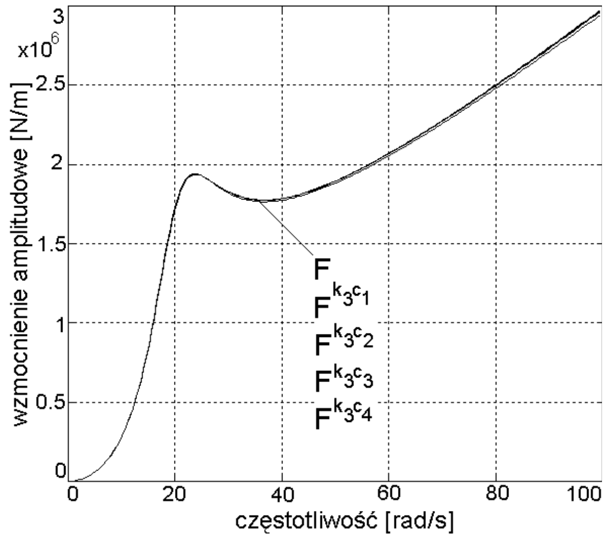
Przebiegi przykładowych charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych dla modelu (17) dla wybranych wartości współczynników k_R oraz c_R przedstawiono na rys. 10 oraz rys. 12, a odpowiadające im charakterystyki fazowo-częstotliwościowe odpowiednio na rys. 11 oraz rys. 13.



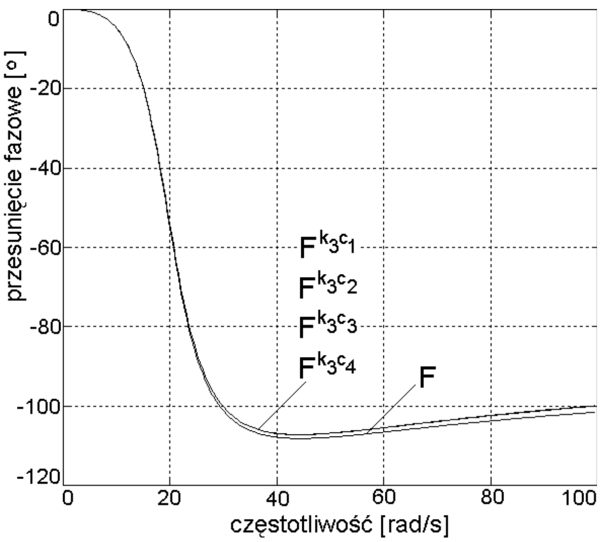
Rys. 10. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe dla modelu ze sprzężeniem zwrotnym opisanego transmitancją $H_z(s)$ dla wybranych wariantów



Rys. 11. Charakterystyki fazowo-częstotliwościowe dla modelu ze sprzężeniem zwrotnym opisanego transmitancją $H_z(s)$ dla wybranych wariantów



Rys. 12. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe dla modelu ze sprzężeniem zwrotnym opisanego transmitancją $H_z(s)$ dla wybranych wariantów



Rys. 13. Charakterystyki fazowo-częstotliwościowe dla modelu ze sprzężeniem zwrotnym opisanego transmitancją $H_z(s)$ dla wybranych wariantów

Na podstawie przeprowadzonej analizy wyników stwierdzono, że spełnienie warunku nie wpływania charakterystyk podtorza na charakterystyki własne modelu pojazdu jest możliwe przy przyjęciu współczynnika k_R równego $1{,}0\cdot 10^8$ [N/m]. Stwierdzono również, że wpływ wartości współczynnika c_R jest niewielki, jeśli współczynnik k_R przyjmuje odpowiednio duże wartości.

2.2. Wyznaczanie parametrów modelu podtorza dla zadanych charakterystyk własnych z zastosowaniem metody przestrzeni stanu

Do badań przyjęto model układu jak opisano równaniem (4).

Przyjęto wektor stanu **x**, którego składowymi są siła w sprężynie x_1:

$$x_1(t) = k(q(t) - \xi(t)) \tag{22}$$

oraz siła w tłumiku x_2:

$$x_2(t) = c(\dot{q}(t) - \dot{\xi}(t)) \tag{23}$$

Odpowiednie pochodne uzyskane po przekształceniach przedstawiono zależnościami:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{k}{c} x_2(t) \tag{24}$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{c}{m} x_1(t) - \frac{c}{m} x_2(t) - c\ddot{\xi} \tag{25}$$

Macierz stanu **A** ma zatem postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{c} \\ -\frac{c}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \tag{26}$$

a macierz wejść **B:**

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c \end{bmatrix} \tag{27}$$

Związek między wektorem wyjścia a wektorem stanu zapisano w postaci:

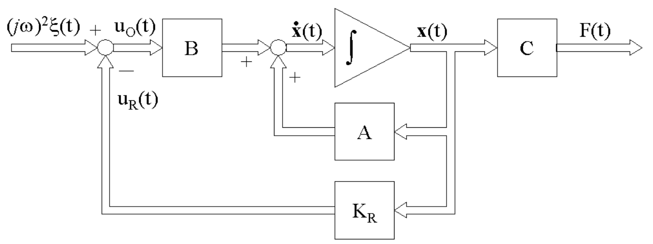
$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{x} \tag{28}$$

gdzie macierz **D** jest macierzą diagonalną $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Przyjęto, że podtorze pełni funkcję regulatora $\mathbf{K}_R$ w układzie ze sprzężeniem zwrotnym, przy czym wyjście z regulatora $u_R(t)$ zależy liniowo od wektora stanu $\mathbf{x}(t)$.

$$u_R(t) = -\mathbf{K}_R \mathbf{x}(t) \tag{29}$$

Schemat struktury układu opisanego równaniami od (22) do (29) przedstawiono na rys. 14.



Rys. 14. Schemat struktury układu z regulatorem proporcjonalnym jako modelem podtorza w pętli sprzężenia zwrotnego

Do wyznaczenia wartości $\mathbf{K}_R$ zastosowano metodę optymalizacji z kwadratowym wskaźnikiem jakości [1,3] w postaci:

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + u_R L u_R) dt \tag{30}$$

gdzie **Q** jest rzeczywistą macierzą symetryczną, a *L* jest wielkością rzeczywistą.
W wyniku podstawienia (29) do wzoru (4) uzyskano:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_R)\mathbf{x} \tag{31}$$

Po podstawieniu równania (29) do (30) otrzymano zależność:

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}(\mathbf{Q} + \mathbf{K}_R^T L \mathbf{K}_R)\mathbf{x} dt \tag{32}$$

Równanie opisujące wyjścia z regulatora uzyskane metodą optymalizacji z zastosowaniem wskaźnika kwadratowego przyjmie postać:

$$u_R(t) = -L^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{x}(t) \tag{33}$$

gdzie macierz **P** jest rozwiązaniem zredukowanego równania Riccati'ego

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}L^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \tag{34}$$

Po przeprowadzeniu wstępnych analiz, do obliczeń przyjęto macierze $\mathbf{Q}_v$ w postaci macierzy diagonalnych o wartościach na przekątnej równych:

$\mathbf{Q}_1 = \mathrm{diag}[1, 0\cdot 10^{-6}]$,
$\mathbf{Q}_2 = \mathrm{diag}[1, 0\cdot 10^{-7}]$,
$\mathbf{Q}_3 = \mathrm{diag}[1, 0\cdot 10^{-8}]$,
$\mathbf{Q}_4 = \mathrm{diag}[1, 0\cdot 10^{-9}]$,
$\mathbf{Q}_5 = \mathrm{diag}[1, 0\cdot 10^{-10}]$,

oraz wartości współczynnika L_w:
$L_1 = 1$,
$L_2 = 10$,
$L_3 = 100$,
$L_4 = 200$.

Dla przyjętych wartości **Q** i *L* wyznaczono [5] wartości stałych regulatora $\mathbf{K}_R$ oraz wartości własne układu ze sprzężeniem zwrotnym.
Wartości stałych regulatora $\mathbf{K}_R$ dla wybranych wariantów wartości $\mathbf{Q}_v$ i L_w zebrano w tabeli 3.

Wartości stałych regulatora $\mathbf{K}_R$ **Tabela 3**

Wariant Q_vL_w	Stałe regulatora	
	k_{vw1}	k_{vw2}
Q_2L_1	-0,992e-4	-0,291e-3
Q_2L_4	-0,550e-6	-0,207e-5
Q_3L_3	-0,110e-6	-0,415e-6
Q_3L_4	-0,550e-7	-0,207e-6
Q_4L_2	-0,110e-6	-0,415e-6
Q_4L_3	-0,110e-7	-0,415e-7
Q_5L_1	-0,110e-6	-0,415e-6
Q_5L_2	-0,110e-7	-0,415e-7

Wartości własne układu z regulatorem w pętli sprzężenia zwrotnego **Tabela 4**

Wariant Q_vL_w	Bieguny transmitancji	
	λ_1	λ_2
Q_2L_1	-10,075 +*j*20,197	-10,075 -*j*20,197
Q_2L_4	-6,164 +*j*19,507	-6,164 -*j*19,507
Q_3L_3	-6,142 +*j*19,507	-6,142 -*j*19,507
Q_3L_4	-6,139 +*j*19,507	-6,139 -*j*19,507
Q_4L_2	-6,142 +*j*19,508	-6,142 -*j*19,508
Q_4L_3	-6,137 +*j*19,507	-6,137 -*j*19,507
Q_5L_1	-6,142 +*j*19,508	-6,142 -*j*19,508
Q_5L_2	-6,137 +*j*19,507	-6,137 -*j*19,507

Wartości własne układu z regulatorem $\mathbf{K}_R$ w pętli sprzężenia zwrotnego dla wybranych wariantów $\mathbf{Q}_v$ i L_w zebrano w tabeli 4.
Odpowiednim współczynnikom regulatora $\mathbf{K}_R$ (tabela 3) przypisano fizyczną interpretację jako: współczynnik sztywności podtorza k_R i współczynnik tłumienia podtorza c_R. Wartości współczynników k_R i c_R zebrano w tabeli 5.

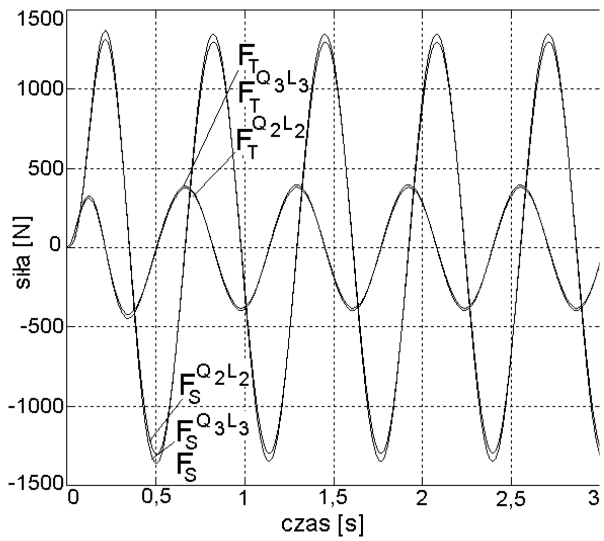
Współczynniki sztywności i tłumienia podtorza odpowiadające współczynnikom regulatora $\mathbf{K}_R$ **Tabela 5**

Wariant	Parametry podtorza	
Q_vL_w	k_R [N/m]	c_R [N·s/m]
Q_2L_1	1,008e4	0,342e4
Q_2L_4	1,819e6	0,482e6
Q_3L_3	9,092e6	2,408e6
Q_3L_4	1,818e7	0,481e7
Q_4L_2	9,092e6	2,408e6
Q_4L_3	9,091e7	2,407e7
Q_5L_1	9,092e6	2,408e6
Q_5L_2	9,091e7	2,407e7

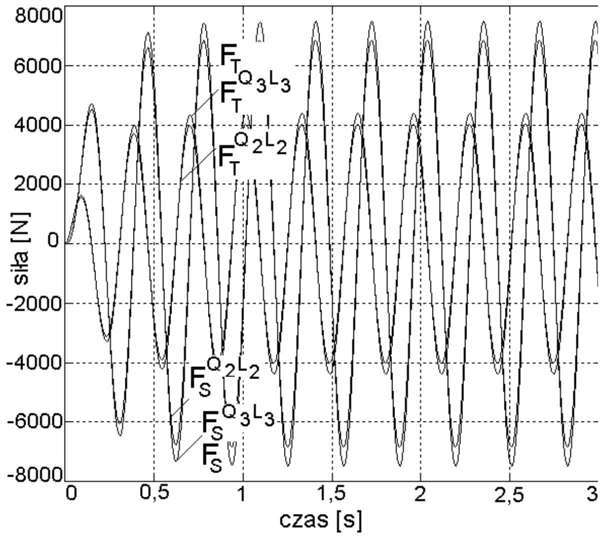
Dla wybranych wariantów macierzy $\mathbf{Q}$ oraz współczynnika L przeprowadzono badania symulacyjne [5], przyjmując wymuszenie w postaci nierówności toru o charakterze sinusoidalnym:

$$\xi(t) = 0{,}005\sin(\omega t) \tag{35}$$

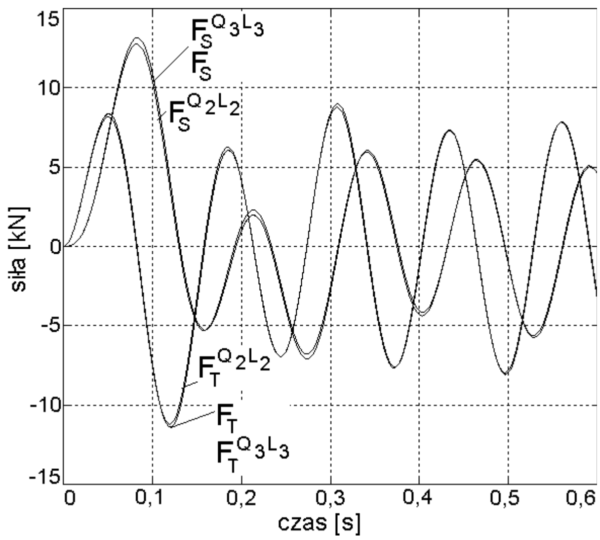
Do badań przyjęto wymuszenia o częstotliwości ω_1 = 10 [rad/s], ω_2 = 20 [rad/s], ω_3 = 50 [rad/s], ω_4 = 100 [rad/s].
Przebiegi siły w sprężynie zawieszenia $F_S(t)$ i siły w tłumiku zawieszenia $F_T(t)$ dla wybranych wariantów $\mathbf{Q}$ i L przy wymuszeniu o częstotliwości 10 rad/s przedstawiono na rys. 15, o częstotliwości 20 rad/s na rys. 16, o częstotliwości 50 rad/s na rys. 17, a o częstotliwości 100 rad/s na rys. 18.



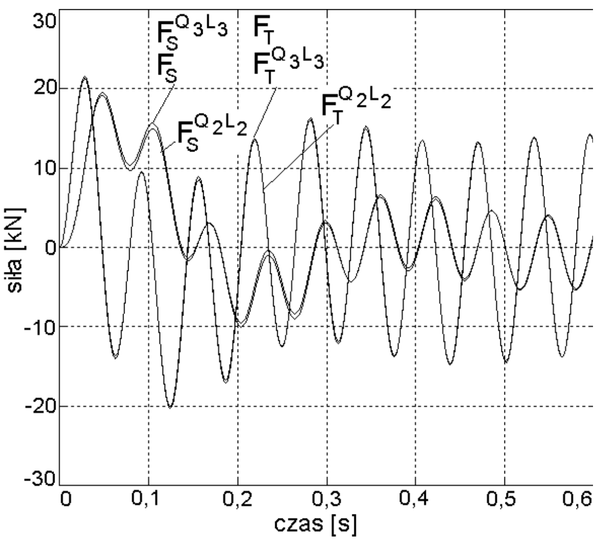
Rys. 15. Przebiegi sił w sprężynie zawieszenia (F_S) oraz sił w tłumiku zawieszenia (F_T) dla wymuszenia o częstotliwości 10 rad/s dla wybranych wariantów



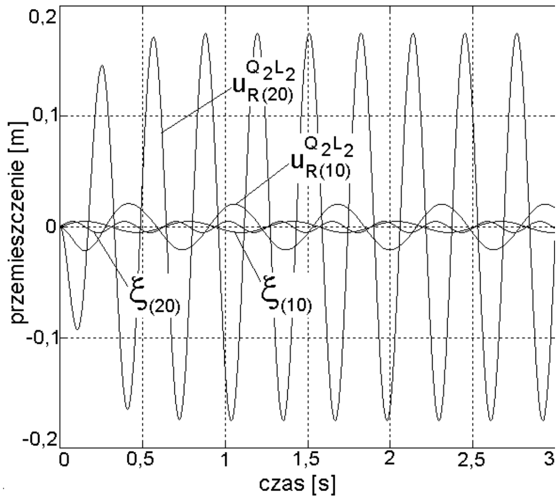
Rys. 16. Przebiegi sił w sprężynie zawieszenia (F_S) oraz sił w tłumiku zawieszenia (F_T) dla wymuszenia o częstotliwości 20 rad/s dla wybranych wariantów



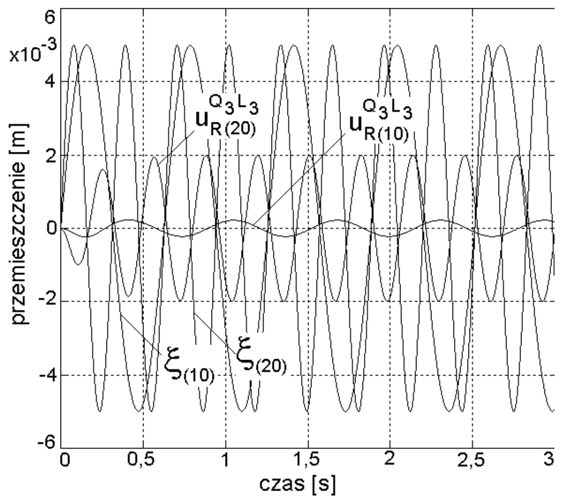
Rys. 17. Przebiegi sił w sprężynie zawieszenia (F_S) oraz sił w tłumiku zawieszenia (F_T) dla wymuszenia o częstotliwości 50 rad/s dla wybranych wariantów



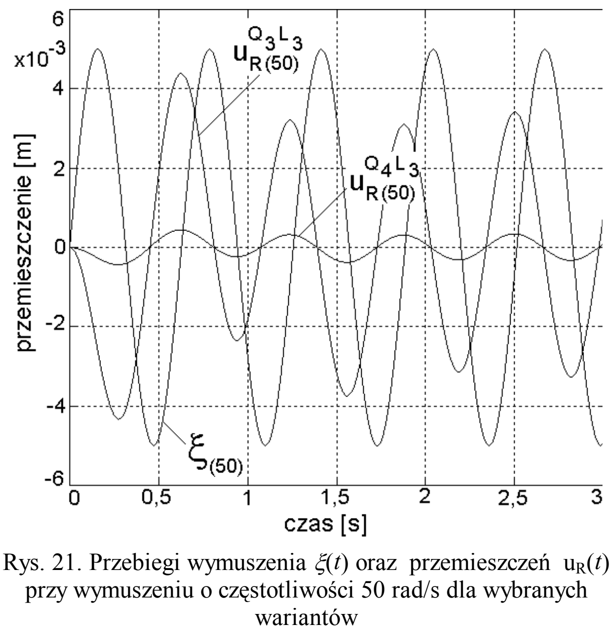
Rys. 18. Przebiegi sił w sprężynie zawieszenia (F_S) oraz sił w tłumiku zawieszenia (F_T) dla wymuszenia o częstotliwości 100 rad/s dla wybranych wariantów



Rys. 19. Przebiegi wymuszenia $\xi(t)$ oraz przemieszczeń $u_R(t)$ przy wymuszeniu o częstotliwości 10 rad/s oraz 20 rad/s dla wybranych wariantów

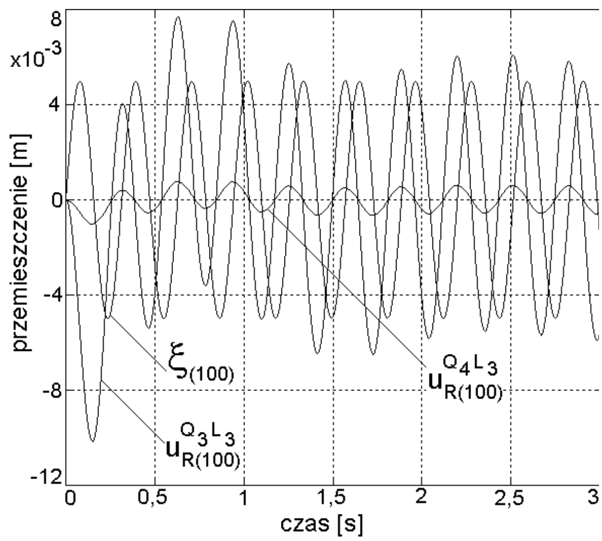


Rys. 20. Przebiegi wymuszenia $\xi(t)$ oraz przemieszczeń $u_R(t)$ przy wymuszeniu o częstotliwości 10 rad/s oraz 20 rad/s dla wybranych wariantów



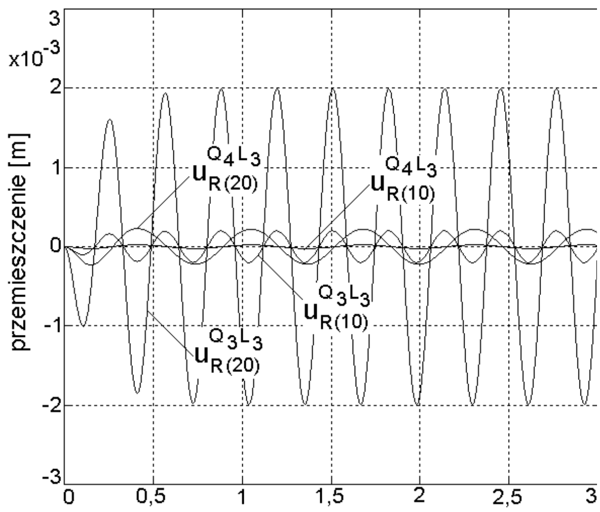
Rys. 21. Przebiegi wymuszenia $\xi(t)$ oraz przemieszczeń $u_R(t)$ przy wymuszeniu o częstotliwości 50 rad/s dla wybranych wariantów

Przebiegi wymuszenia $\xi(t)$ oraz przemieszczeń $u_R(t)$, stanowiących wyjście z regulatora, dla wybranych wariantów **Q** i *L* przy wymuszeniu o częstotliwości 10 rad/s oraz 20 rad/s przedstawiono na rys. 19 i rys. 20, o częstotliwości 50 rad/s na rys. 21, a o częstotliwości 100 rad/s na rys. 22.



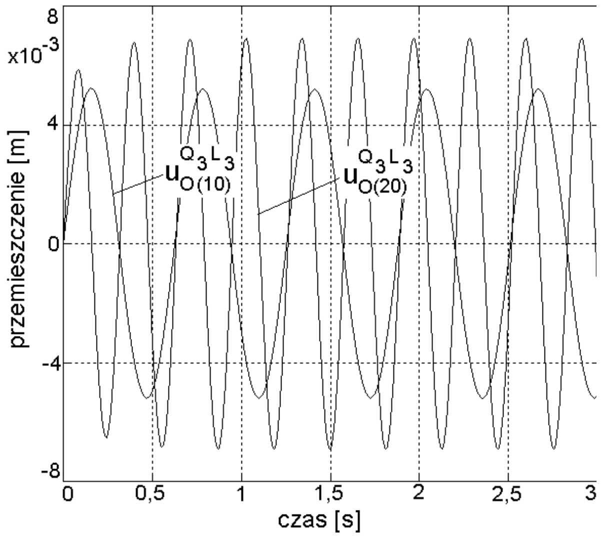
Rys. 22. Przebiegi wymuszenia $\xi(t)$ oraz przemieszczeń $u_R(t)$ przy wymuszeniu o częstotliwości 100 rad/s dla wybranych wariantów

Przebiegi wyjścia z regulatora $u_R(t)$, przy wymuszeniu o częstotliwościach 10 rad/s oraz 20 rad/s, uzyskane dla wybranych wartości macierzy **Q** i współczynnika *L* przedstawiono na rys. 23.

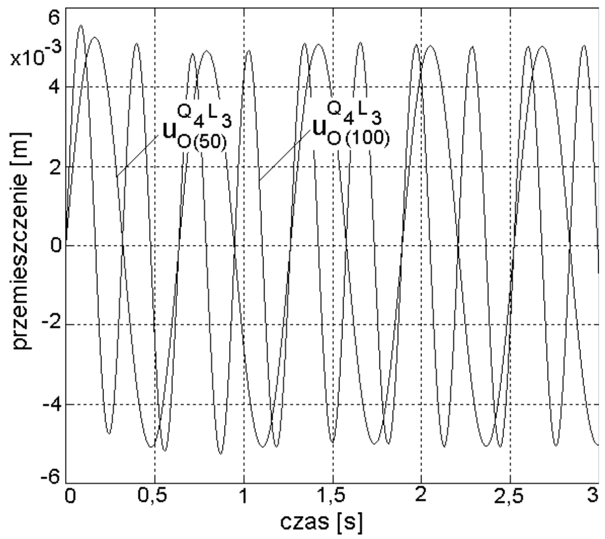


Rys. 23. Przebiegi przemieszczenia $u_R(t)$ przy wymuszeniu o częstotliwościach 10 rad/s oraz 20 rad/s dla wybranych wariantów

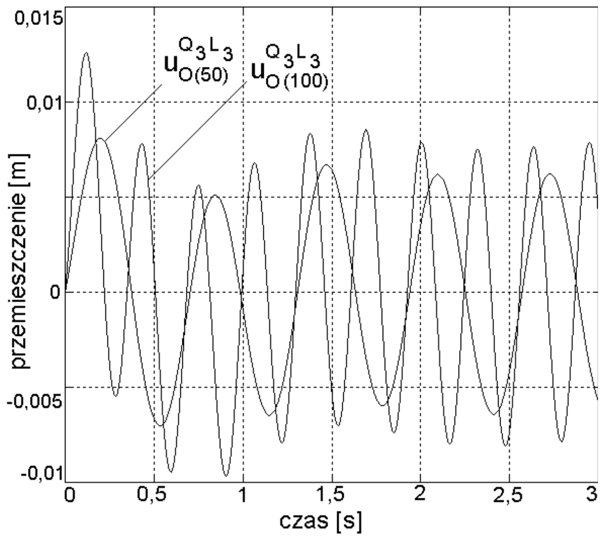
Wyznaczone wartości współczynników regulatora determinują zmianę funkcji wymuszającej badany układ. Przebiegi wejścia $u_O(t)$ do układu (rys. 14), jako wynik sumowania przemieszczenia wynikającego z nierówności toru $\xi(t)$ oraz przemieszczenia $u_R(t)$ wywołanego działaniem sił w zawieszeniu pojazdu F(*t*) działających w układzie ze sprzężeniem zwrotnym, dla wybranych wariantów wymuszeń o częstotliwości 10 rad/s oraz 20 rad/s przedstawiono na rys. 24, a o częstotliwości 50 rad/s oraz 100 rad/s na rys. 25 i rys. 26.



Rys. 24. Przebiegi wejścia $u_O(t)$ do układu dla wymuszeń o częstotliwości 10 rad/s oraz częstotliwości 20 rad/s dla wybranych wariantów



Rys. 25. Przebiegi wejścia $u_O(t)$ do układu dla wymuszeń o częstotliwości 50 rad/s oraz częstotliwości 100 rad/s dla wybranych wariantów



Rys. 26. Przebiegi wejścia $u_O(t)$ do układu dla wymuszeń o częstotliwości 50 rad/s oraz częstotliwości 100 rad/s dla wybranych wariantów

Na podstawie przeprowadzonej analizy wyników stwierdzono, że spełnienie warunku niewielkiego wpływu charakterystyk podtorza na charakterystyki własne modelu pojazdu jest możliwe przy przyjęciu do badań macierzy $\mathbf{Q}_4$ oraz współczynnika L_3. Dla tego wariantu wyznaczony współczynnik sztywności podtorza k_R przyjmuje wartość $9{,}09 \cdot 10^7$ [N/m].

3. Podsumowanie

Celem artykułu było wyznaczenie sztywnościowych i tłumieniowych charakterystyk modelu podtorza przy założeniu, że w układzie występuje sprzężenie zwrotne. Do opisu dynamiki układu zastosowano formalizm transmitancji operatorowej oraz metodę przestrzeni stanu. Do wyznaczania parametrów modelu podtorza, przy przyjęciu podtorza w postaci regulatora proporcjonalnego, zastosowano optymalizację z kwadratowym wskaźnikiem jakości. Badania przeprowadzono w dziedzinie czasu i częstotliwości w zakresie częstotliwości $0 \div 30$ Hz. Jako kryterium przy wyznaczaniu parametrów modelu podtorza przyjęto założenie, że wartości własne układu ze sprzężeniem zwrotnym powinny być w przybliżeniu równe wartościom własnym modelu pojazdu.
Wartości współczynnika sztywności i współczynnika tłumienności podtorza uzyskane w wyniku przeprowadzonej analizy numerycznej odpowiadają wartościom prezentowanym w literaturze fachowej. Wykonana analiza świadczy o celowości dalszego rozwijania zaproponowanej metody wyznaczania parametrów modelu podtorza w aspekcie jej wykorzystania w procesie projektowania pojazdów oraz przy prowadzeniu badań eksperymentalnych toru.
Prowadzone są dalsze badania dla przestrzennego modelu pojazdu i toru.

Literatura

[1] Kaczorek T., Teoria sterowania i systemów, PWN, Warszawa 1993
[2] Knothe K., Wu Y., Gross-Thebing A., Simple semi-analytical models for discrete-continuous railway track and their use for time domain solutions, Supplement to Vehicle System Dynamics, Band 24, Swets & Zeitlinger, 1995
[3] Ogata K., Modern Control Engineering, Prentice-Hall Inc., 1997
[4] Dynamika układu mechanicznego pojazd szynowy-tor, praca zbiorowa, PWN, Warszawa 1991
[5] MATLAB wersja 5