

Minimalnofazowość układu a fizyczny model dla eksperymentu w badaniach dynamiki pojazdów szynowych

W artykule badano wpływ modelu typu wejście-wyjście tworzonego dla eksperymentu w badaniach dynamiki pojazdu na to, czy układ jest minimalnofazowy czy nie. Dla przyjętego modelu wyznaczono położenie zer i biegunów transmitancji układu oraz analizowano wpływ zer łączących w prawej półpłaszczyźnie zespolonej na rozwiązanie wybranych problemów dynamiki pojazdu.

1. Wprowadzenie

Dynamika liniowego, stacjonarnego układu mechanicznego o wielu stopniach swobody oraz o wielu wejściach i wyjściach reprezentowana jest macierzą transmitancji operatorowej i widmowej. Elementy macierzy transmitancji są w takim przypadku przyczynowymi funkcjami wymiernymi zmiennej zespolonej.

Miejsca zerowe mianowników elementów macierzy transmitancji nazwano biegunami, a miejsca zerowe liczników elementów macierzy transmitancji – zera. Bieguny są interpretowane fizycznie jako częstotliwości rezonansowe, a zera jako częstotliwości antyrezonansowe [2].

W celu wyznaczenia macierzy transmitancji prowadzony jest eksperyment. Tworzenie fizycznego modelu eksperymentu polega na wyborze mierzonych wielkości wejściowych (wymuszenia) i wyjściowych (odpowiedzi) co do ich liczby, punktów rozmieszczenia i kierunków pomiaru. Bieguny transmitancji są charakterystyką danego układu, natomiast zera transmitancji wynikają z rozkładu punktów przyłożenia wymuszenia i punktów pomiaru odpowiedzi.

W procesie tworzenia modelu istotne jest określenie położenia zer i biegunów na płaszczyźnie zespolonej. Jeśli bieguny transmitancji przyjmują wartości z lewej półpłaszczyzny zespolonej, to układ nazywa się stabilny. Natomiast, gdy choć jeden z biegunów leży w prawej półpłaszczyźnie zespolonej, to układ nazywa się niestabilny. Jeśli zera transmitancji przyjmują wartości z lewej półpłaszczyzny zespolonej, to układ jest minimalnofazowy. Natomiast, gdy choć jedno zero leży w prawej półpłaszczyźnie zespolonej, to układ nie jest minimalnofazowy [4,5].

W pojazdach coraz częściej stosowane są układy aktywne, a w badaniach stanowiskowych wykorzystywane są układy regulacji automatycznej. Zera transmitancji leżące w prawej półpłaszczyźnie zespolonej są istotnym ograniczeniem wysokiej jakości procesu regulacji tak w przypadku regulacji typu *feedback*, jak i regulacji typu *feedforward* [4,8].

Dynamika układów nośnych pojazdów modelowana jest z zastosowaniem analizy modalnej i metody elementów skończonych. Problem wyboru liczby modów w procesie regulacji wymaga przeprowadzenia analizy, czy układ po redukcji pozostaje minimalnofazowym [2,7].

W badaniach pojazdów jest trudno bezpośrednio zmierzyć wymuszenia działające na pojazd. W celu wyznaczenia wymuszeń przy znanym układzie i znanej odpowiedzi rozwiązuje się zatem tak zwane zagadnienie odwrotne. Na uwarunkowanie zadania odwrotnego istotny wpływ ma położenie zer na płaszczyźnie zespolonej [3,5]. Szybki rozwój techniki cyfrowej w badaniach eksperymentalnych związany jest z zastosowaniem regulatorów cyfrowych. Wymaga to przeprowadzenia dyskretyzacji wybranych sygnałów ciągłych, a zadanie ciągle przekształcane jest w dyskretne. O ile istnieje jednoznaczne przyporządkowanie biegunów układu ciągłego biegunom układu dyskretnego, to przyporządkowanie zer układu ciągłego zerom układu dyskretnego jest niejednoznaczne [1,8].

Celem artykułu jest wyznaczenie wpływu przyjętego modelu typu wejście-wyjście dla eksperymentu na minimalnofazowość układu. Dla przyjętego modelu wyznaczono położenie zer i biegunów transmitancji dla układu ciągłego i układu dyskretnego. Przeprowadzono badania wpływu rzędu modelu na położenie zer i biegunów.

Wyznaczono wpływ położenia zer w prawej półpłaszczyźnie zespolonej na uwarunkowanie zagadnienia odwrotnego.

2. Badanie minimalnofazowości układu

Badanie rozkładu zer na płaszczyźnie zespolonej przeprowadzono dla ciągłego i dyskretnego modelu układu. Równania ruchu liniowego, stacjonarnego modelu układu mechanicznego o n -stopniach swobody przedstawiono w postaci:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{B} \mathbf{f} \quad (1)$$

a równanie wyjść jako:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{q} \quad (2)$$

gdzie:

\mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$ – wektory współrzędnych, prędkości i przyspieszeń uogólnionych ($\mathbf{q} \in \mathcal{R}^{n \times n}$),

\mathbf{f} – wektor wymuszeń w postaci sił ($\mathbf{f} \in \mathcal{R}^{m \times 1}$),

\mathbf{y} – wektor wielkości mierzonych w postaci przemieszczeń ($\mathbf{y} \in \mathcal{R}^{p \times 1}$),

\mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K} – macierze bezwładności, tłumienia i sztywności ($\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K} \in \mathcal{R}^{n \times n}$),

\mathbf{B} – macierz wejść rzędu m ($\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{n \times m}$),

\mathbf{C} – macierz wyjść rzędu p ($\mathbf{C} \in \mathcal{R}^{p \times n}$),

przy czym macierze \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K} spełniają warunki:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^T > 0, \mathbf{D} = \mathbf{D}^T \geq 0 \text{ oraz } \mathbf{K} = \mathbf{K}^T \geq 0.$$

Po wprowadzeniu $2n$ -wymiarowego wektora stanu w postaci:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

równanie (1) przedstawiono jako:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u} \quad (4)$$

a równanie (2)

$$\mathbf{w} = \mathbf{Z}\mathbf{x} \quad (5)$$

gdzie macierz \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (6)$$

o wymiarze $2n \times 2n$ jest nazywana macierzą stanu, macierz \mathbf{G} o wymiarze $2n \times p$ nazywana jest macierzą wejść, a macierz \mathbf{Z} o wymiarze $r \times 2n$ macierzą wyjść. Przez \mathbf{E} oznaczono macierz jednostkową o wymiarze $n \times n$.

Model dyskretny odpowiadający modelowi ciągłemu jak w równaniach (4) i (5) ma postać:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{\Theta}\mathbf{u}(kT) \quad (7)$$

$$\mathbf{w}(kT) = \mathbf{Z}\mathbf{x}(kT) \quad (8)$$

gdzie T jest okresem próbkowania. Macierz $\mathbf{\Phi}$ ma postać:

$$\mathbf{\Phi} = e^{\mathbf{A}T} \quad (9)$$

oraz macierz $\mathbf{\Theta}$ ma postać:

$$\mathbf{\Theta} = \int_0^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{G} dt \quad (10)$$

Transmitancja jako funkcja wymierna zmiennej operatorowej s dla ciągłych modeli układów nośnych pojazdów ma postać:

$$H(s) = k \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)} \quad (11)$$

dla $n \geq m + 2$.

Dla układu dyskretnego transmitancja przyjmie postać:

$$H(\hat{z}) = g_1(T)\hat{z}^{-1} + g_2(T)\hat{z}^{-2} + \dots \quad (12)$$

Zera modelu układu ciągłego wyznaczono znajdując pierwiastki równania $|\Gamma(s)| = 0$, gdzie $\Gamma(s)$ jest określona równaniem:

$$\Gamma(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - s\mathbf{E} & \mathbf{G} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (13)$$

gdzie s jest ciągłą zmienną operatorową.

Zera modelu układu dyskretnego wyznaczono znajdując pierwiastki równania:

$$\Gamma_T(\hat{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} - \hat{z}\mathbf{E} & \mathbf{\Theta} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (14)$$

gdzie \hat{z} jest dyskretną zmienną operatorową.

3. Wpływ rzędu modelu układu na położenie zer na płaszczyźnie zespolonej

W badaniach dynamiki konstrukcji nośnych pojazdów stosowana jest analiza modalna. Macierz tłumienia \mathbf{D} ma wtedy postać:

$$\mathbf{D} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{M} \quad (15)$$

Wprowadzenie macierzy tłumienia w postaci (15) umożliwia diagonalizację macierzy układu. Postacie modów Ψ_k , częstotliwości ω_k i bezwymiarowe współczynniki tłumienia d_k wyznacza się rozwiązując uogólniony problem własny. Współrzędne główne \mathbf{p} spełniają zależność:

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Psi}\mathbf{p} \quad (16)$$

gdzie $\mathbf{\Psi} = [\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad \dots \quad \Psi_n]$.

Równanie układu we współrzędnych głównych ma postać:

$$\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{\Pi}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{p} = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{B}\mathbf{f} \quad (17)$$

gdzie: $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\omega_1^2 \quad \omega_2^2 \quad \dots \quad \omega_n^2]$,

$$\mathbf{\Pi} = \text{diag}[2d_1\omega_1 \quad 2d_2\omega_2 \quad \dots \quad 2d_n\omega_n].$$

W modelu uwzględnianych jest zwykle niewiele modów odpowiadających najmniejszym częstotliwościom własnym modelu układu. Szczególnie istotne jest badanie wpływu rzędu modelu układu na położenie zer na płaszczyźnie zespolonej ze względu na spełnienie wymagań dotyczących jakości układu regulacji.

4. Rozwiązanie zagadnienia odwrotnego w przypadku gdy układ nie jest minimalnofazowy

W badaniach eksperymentalnych pojazdów szczególnie trudny jest pomiar wymuszeń działających na pojazd. Zakładając znajomość odpowiedzi impulsowej układu oraz znajomość pomierzonego wyjścia, wyznaczanie wejścia jest interpretowane jako zagadnienie odwrotne.

Przyjmując, że wejściem jest $f(t)$, a wyjściem jest $y(t)$, związek między wyjściem a wejściem zapisano w postaci całki spłotu:

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (18)$$

gdzie $g(\tau)$ jest odpowiedzią impulsową.

Dyskretny odpowiednik równania (18) ma postać:

$$y(n) = \sum_{m=0}^n g(m) f(n - m) \quad (19)$$

gdzie n i m oznaczają kolejne wartości dyskretne odpowiednich sygnałów.

Równanie (19) może być przedstawione w postaci macierzowej przez wyznaczenie wartości dla kolejnych $n = 0, 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} y(0) &= g(0)f(0) \\ y(1) &= g(1)f(0) + g(0)f(1) \\ &\dots \\ y(N) &= g(N)f(0) + \dots + g(0)f(N) \end{aligned} \quad (20)$$

lub w postaci macierzowej:

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{f} \quad (21)$$

gdzie macierz \mathbf{P} jest równa:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} g(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g(1) & g(0) & 0 & \dots & 0 \\ g(2) & g(1) & g(0) & \dots & 0 \\ g(3) & g(2) & g(1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

a wektor \mathbf{f} ma postać:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \dots \\ f(N) \end{bmatrix}.$$

W celu znalezienia wejścia (wymuszenia) rozwiązano zagadnienie odwrotne otrzymując zależność:

$$\mathbf{f} = \mathbf{P}^+ \mathbf{y} \quad (22)$$

gdzie \mathbf{P}^+ jest macierzą Penrose.

Skutecznym narzędziem algebry liniowej rozwiązywania zadania odwrotnego jest rozkład macierzy względem jej wartości szczególnych [6]. Rozkład macierzy $\mathbf{P}(m,n)$ względem jej wartości szczególnych jest faktoryzacją o postaci:

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^* \quad (23)$$

gdzie \mathbf{U} i \mathbf{V} są macierzami unitarnymi o odpowiednich wymiarach, gwiazdka (*) oznacza macierz sprzężoną, a macierz $\mathbf{\Sigma}$ ma postać:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Xi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (24)$$

gdzie $\mathbf{\Xi} = \text{diag}[\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_r]$ jest diagonalną macierzą wartości szczególnych, które spełniają relacje $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r > 0$.

Liczbę niezerowych wartości szczególnych definiuje rząd r macierzy \mathbf{P} . Dla zbadania wpływu nieminimalnej fazowości układu na stopień uwarunkowania zadania odwrotnego przyjęto normę w postaci stosunku największej wartości szczególnej do najmniejszej wartości szczególnej macierzy, co zapisano równaniem:

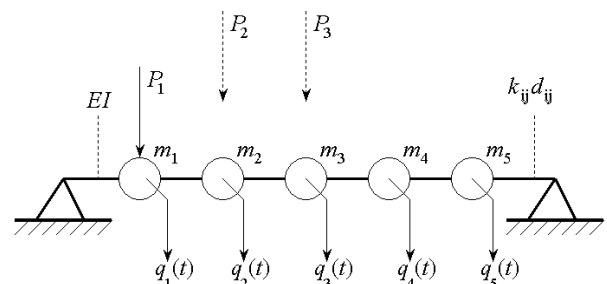
$$\text{cond } \mathbf{P} = \frac{\sigma_r}{\sigma_1} \quad (25)$$

5. Przykład obliczeniowy

Do badań przyjęto dyskretny model belki dwupodporowej, opisanej pięciowymiarowym wektorem współrzędnych uogólnionych \mathbf{q} :

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T \quad (26)$$

co przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Dyskretny model układu

Po przeprowadzeniu wstępnych analiz numerycznych przyjęto macierz mas \mathbf{M} , macierz tłumienia \mathbf{D} oraz macierz sztywności \mathbf{K} tak, aby charakterystyki własne modelu odpowiadały charakterystykom własnym nadwozia wagonu.

Model układu reprezentowany jest macierzą częstości własnych $\mathbf{\Lambda}$

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag} \begin{bmatrix} 12,10 \\ 45,04 \\ 97,40 \\ 184,44 \\ 214,14 \end{bmatrix} \text{ Hz,}$$

macierzą postaci drgań własnych $\mathbf{\Psi}$

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} 0,22 & 0,39 & 0,46 & 0,58 & 0,48 \\ 0,49 & 0,58 & 0,22 & -0,39 & -0,45 \\ 0,64 & -0,00 & -0,67 & -0,00 & 0,36 \\ 0,49 & -0,58 & 0,22 & 0,39 & -0,45 \\ 0,22 & -0,39 & 0,46 & -0,58 & 0,48 \end{bmatrix}$$

oraz wektorem bezwymiarowych współczynników tłumienia \mathbf{d}

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0,0367 \\ 0,0230 \\ 0,0347 \\ 0,0601 \\ 0,0691 \end{bmatrix}.$$

Do badań numerycznych [9] przyjęto trzy warianty wektora wejść

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oraz pięć wariantów wektora wyjść

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ \mathbf{C}_2 &= [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0], \\ \mathbf{C}_3 &= [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0], \\ \mathbf{C}_4 &= [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0], \\ \mathbf{C}_5 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]. \end{aligned}$$

Dla przyjętych wektorów wejść \mathbf{B}_j i wyjść \mathbf{C}_i wyznaczono transmitancje operatorowe o ogólnej postaci $h^{ij}(s)$.

$$h^{ij}(s) = \frac{b_8^{ij}s^8 + b_7^{ij}s^7 + b_6^{ij}s^6 + b_5^{ij}s^5 + b_4^{ij}s^4 + b_3^{ij}s^3 + b_2^{ij}s^2 + b_1^{ij}s + b_0^{ij}}{a_{10}^{ij}s^{10} + a_9^{ij}s^9 + a_8^{ij}s^8 + a_7^{ij}s^7 + a_6^{ij}s^6 + a_5^{ij}s^5 + a_4^{ij}s^4 + a_3^{ij}s^3 + a_2^{ij}s^2 + a_1^{ij}s + a_0^{ij}} \quad (27)$$

Współczynniki przy kolejnych potęgach zmiennej operatorowej s w liczniku i mianowniku transmitancji zapisano w postaci wektorów dla kolejnych transmitancji:

$$\mathbf{b}^{11} = \begin{bmatrix} 2,48e68 \\ 7,03e70 \\ 6,59e74 \\ 9,88e76 \\ 4,47e80 \\ 2,51e82 \\ 6,92e85 \\ 8,19e86 \\ 1,18e90 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{b}^{21} = \begin{bmatrix} 1,59e70 \\ 1,62e74 \\ 6,26e76 \\ 3,03e80 \\ 2,86e82 \\ 8,58e85 \\ 1,33e87 \\ 2,27e90 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{b}^{31} = \begin{bmatrix} -4,89e69 \\ -4,94e73 \\ -9,98e75 \\ -4,56e79 \\ 7,87e81 \\ 2,79e85 \\ 1,13e87 \\ 2,49e90 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{a}^{11} = \begin{bmatrix} 1,48e72 \\ 5,75e74 \\ 5,44e78 \\ 1,27e81 \\ 5,89e84 \\ 6,33e86 \\ 1,82e90 \\ 6,56e91 \\ 1,18e95 \\ 9,05e95 \\ 6,25e98 \end{bmatrix}^T$$

Zera dla układu ciągłego wyznaczono zgodnie ze wzorem (13). W tabeli 1 zebrano zera przy przyjęciu wejścia \mathbf{B}_1 dla kolejnych wyjść, w tabeli 2 zebrano zera przy przyjęciu wejścia \mathbf{B}_2 dla kolejnych wyjść, a w tabeli 3 zebrano zera przy przyjęciu wejścia \mathbf{B}_3 .

Rozkład zer z i biegunów p na płaszczyźnie zespolonej dla układu ciągłego przy wejściu \mathbf{B}_1 dla kolejnych wyjść przedstawiono na rys. 2 dla wyjścia \mathbf{C}_1 , rys. 3 dla wyjścia \mathbf{C}_2 , rys. 4 dla wyjścia \mathbf{C}_3 , rys. 5 dla wyjścia \mathbf{C}_4 oraz rys. 6 dla wyjścia \mathbf{C}_5 .

Zera układu ciągłego przy wejściu B₁ dla kolejnych wyjść

Tabela 1

Zera				
$z^{11} \cdot 1e3$	$z^{21} \cdot 1e3$	$z^{31} \cdot 1e3$	$z^{41} \cdot 1e3$	$z^{51} \cdot 1e3$
-0,08±1,28j	-10,00	-10,00	-10,00	-10,00
-0,04±0,87j	-0,07±1,24j	-0,07±1,15j	1,34	1,71
-0,01±0,43j	-0,01±0,55j	-0,66	-1,18	-1,46
-0,01±0,13j	-0,01±0,17j	0,71	-0,03±0,80j	-0,82
		-0,01±0,28j	-0,32	0,89
			-0,33	-0,26
				0,26

Zera układu ciągłego przy wejściu B₂ dla kolejnych wyjść

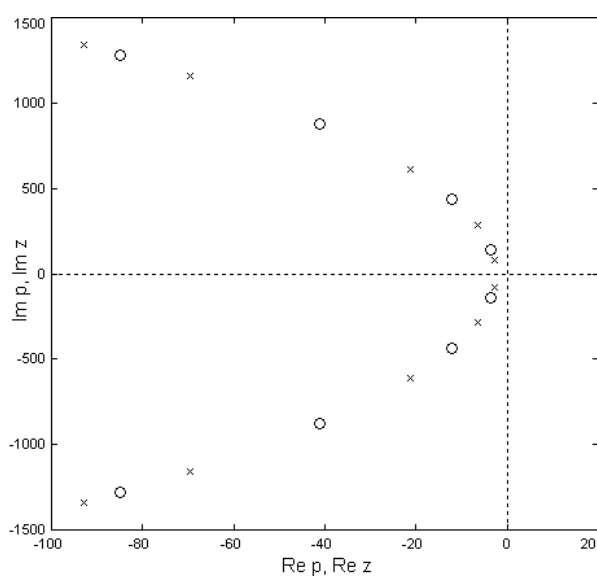
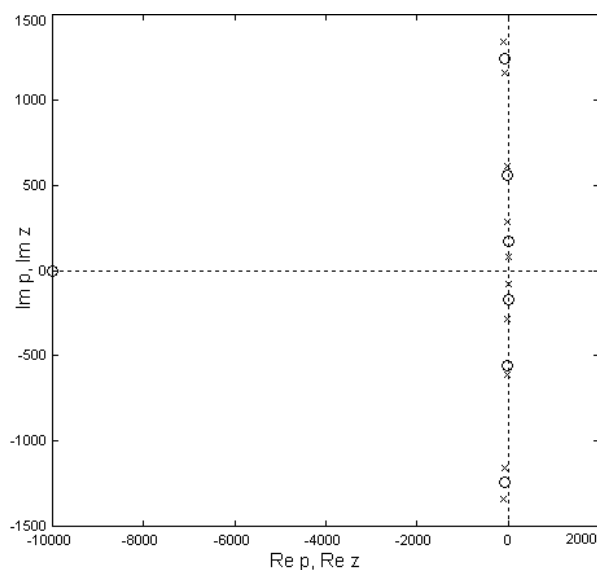
Tabela 2

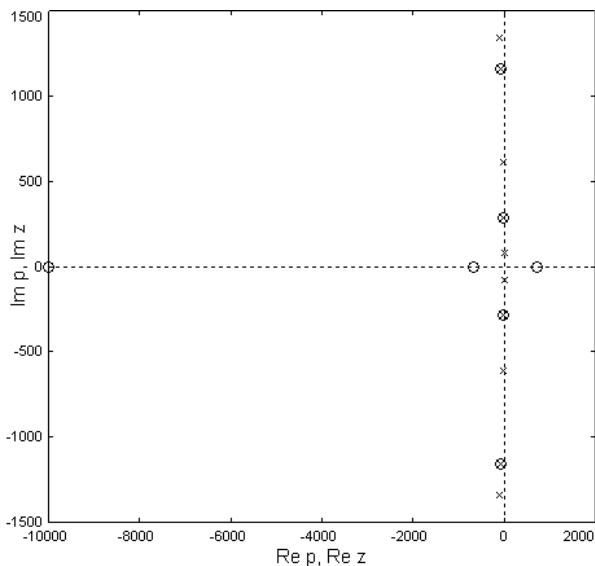
Zera				
$z^{12} \cdot 1e3$	$z^{22} \cdot 1e3$	$z^{32} \cdot 1e3$	$z^{42} \cdot 1e3$	$z^{52} \cdot 1e3$
-10,00	-0,08±1,26j	-10,00	-10,00	-10,00
-0,07±1,24j	-0,05±0,99j	-0,07±1,15j	0,01±0,81j	1,34
-0,01±0,55j	-0,01±0,58j	-0,03±0,77j	-0,07±0,80j	-1,18
-0,01±0,17j	-0,01±0,18j	-0,01±0,28j	0,49	-0,03±0,80j
			-0,47	-0,32
				0,33

Zera układu ciągłego przy wejściu B₃ dla kolejnych wyjść

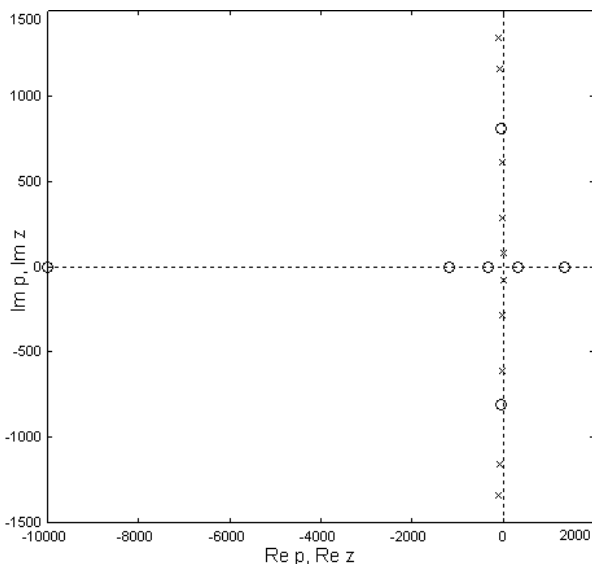
Tabela 3

Zera				
$z^{13} \cdot 1e3$	$z^{23} \cdot 1e3$	$z^{33} \cdot 1e3$	$z^{43} \cdot 1e3$	$z^{53} \cdot 1e3$
-10,00	-10,00	-0,08±1,26j	-10,00	-10,00
-0,07±1,15j	-0,07±1,15j	-0,06±1,15j	-0,07±1,15j	-0,07±1,15j
-0,66	-0,03±0,77j	-0,01±0,42j	-0,03±0,77j	-0,66
0,71	-0,01±0,28j	-0,01±0,28j	-0,01±0,28j	0,71
-0,01±0,28j				-0,01±0,28j

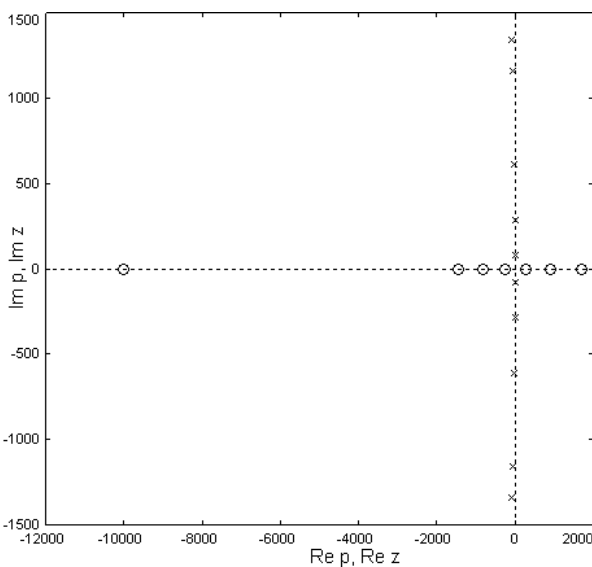
Rys. 2. Położenie zer (O) i biegunów (X) na płaszczyźnie zespolonej dla układu ciągłego – wejście B₁, wyjście C₁ (Re – część rzeczywista, Im – część urojona)Rys. 3. Położenie zer (O) i biegunów (X) na płaszczyźnie zespolonej dla układu ciągłego – wejście B₁, wyjście C₂



Rys. 4. Położenie zer (O) i biegunów (X) na płaszczyźnie zespolonej dla układu ciągłego – wejście B_1 , wyjście C_3



Rys. 5. Położenie zer (O) i biegunów (X) na płaszczyźnie zespolonej dla układu ciągłego – wejście B_1 , wyjście C_4



Rys. 6. Położenie zer (O) i biegunów (X) na płaszczyźnie zespolonej dla układu ciągłego – wejście B_1 , wyjście C_5

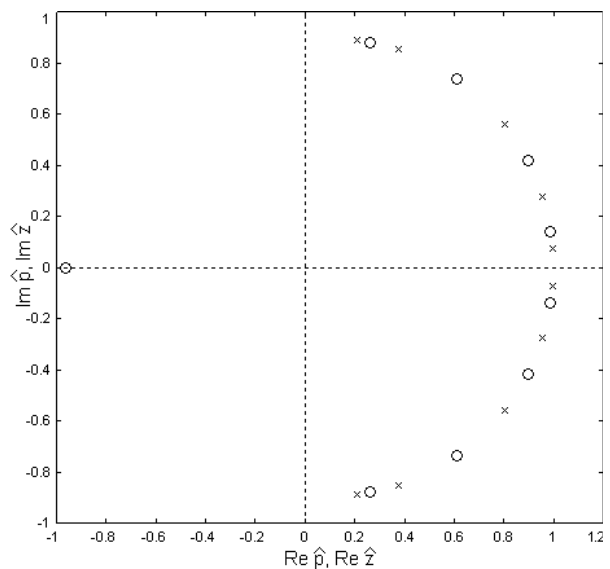
Zera dla układu dyskretnego wyznaczone zgodnie ze wzorem (14). Przyjęto trzy warianty okresu próbkowania:

$$T_1 = 0,05 \text{ s,}$$

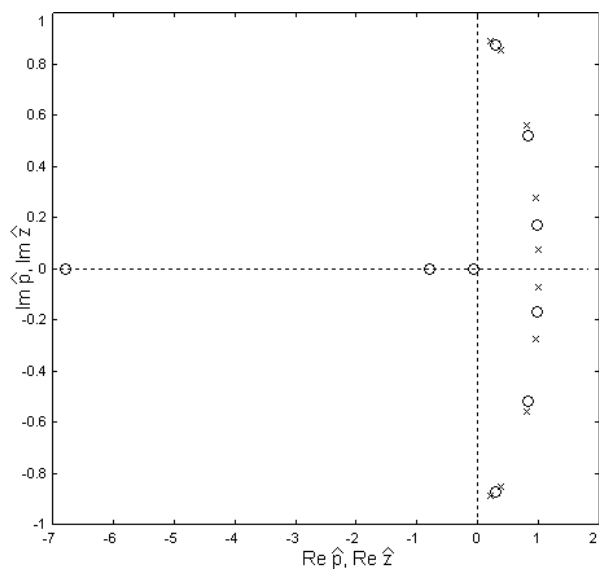
$$T_2 = 0,001 \text{ s,}$$

$$T_3 = 0,005 \text{ s.}$$

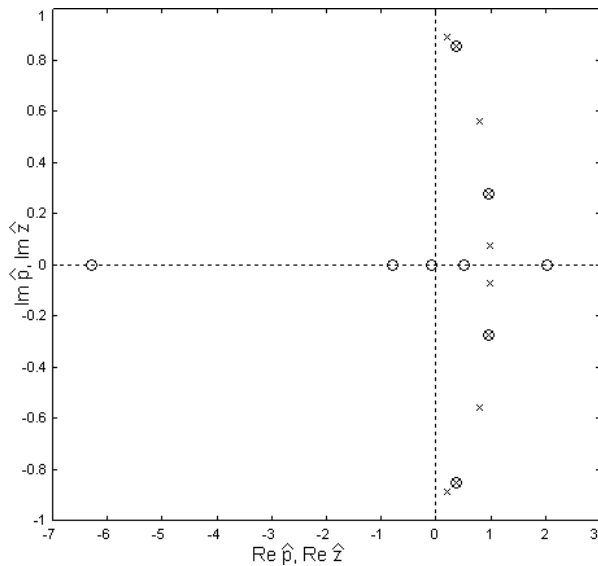
Rozkład zer i biegunów na płaszczyźnie zespolonej dla układu dyskretnego dla okresu próbkowania równego T_2 , przy wejściu B_1 dla kolejnych wyjść przedstawiono na rys. 7 dla wyjścia C_1 , rys. 8 dla wyjścia C_2 , rys. 9 dla wyjścia C_3 , rys. 10 dla wyjścia C_4 oraz rys. 11 dla wyjścia C_5 .



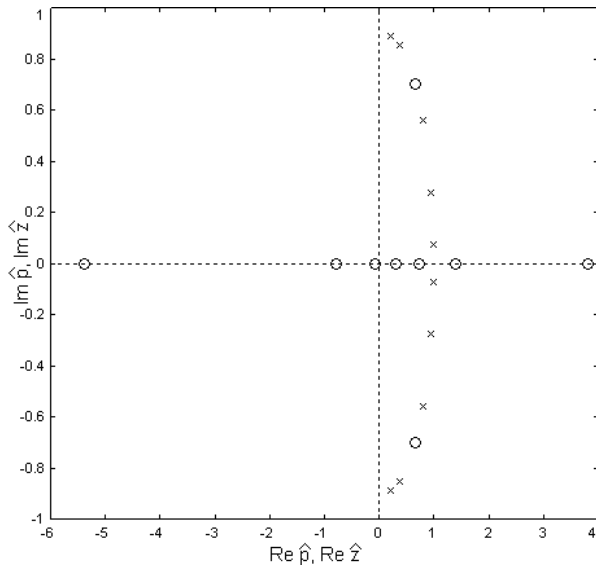
Rys. 7. Położenie zer (O) i biegunów (X) na płaszczyźnie zespolonej dla układu dyskretnego – wejście B_1 , wyjście C_1



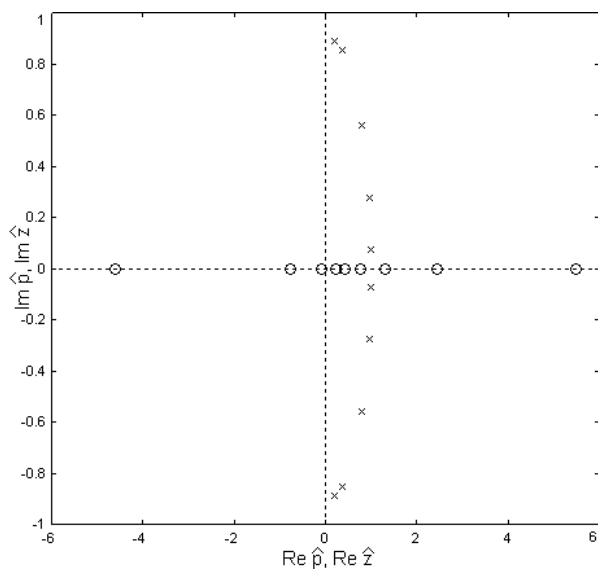
Rys. 8. Położenie zer (O) i biegunów (X) na płaszczyźnie zespolonej dla układu dyskretnego – wejście B_1 , wyjście C_2



Rys. 9. Położenie zer (O) i biegunów (X) na płaszczyźnie zespolonej dla układu dyskretnego – wejście B_1 , wyjście C_3

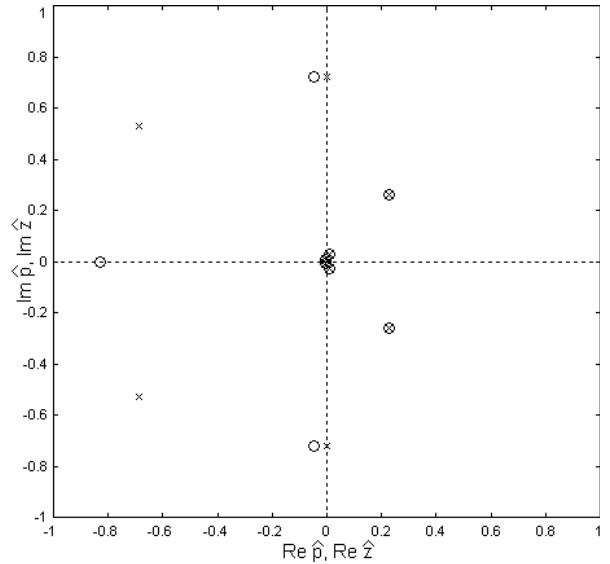


Rys. 10. Położenie zer (O) i biegunów (X) na płaszczyźnie zespolonej dla układu dyskretnego – wejście B_1 , wyjście C_4

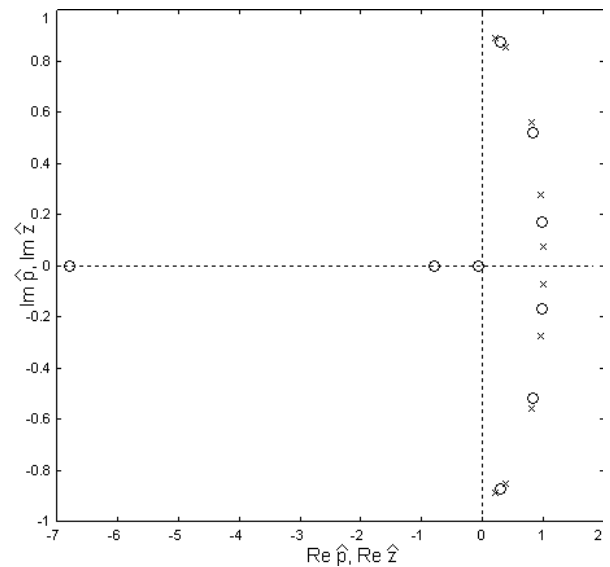


Rys. 11. Położenie zer (O) i biegunów (X) na płaszczyźnie zespolonej dla układu dyskretnego – wejście B_1 , wyjście C_5

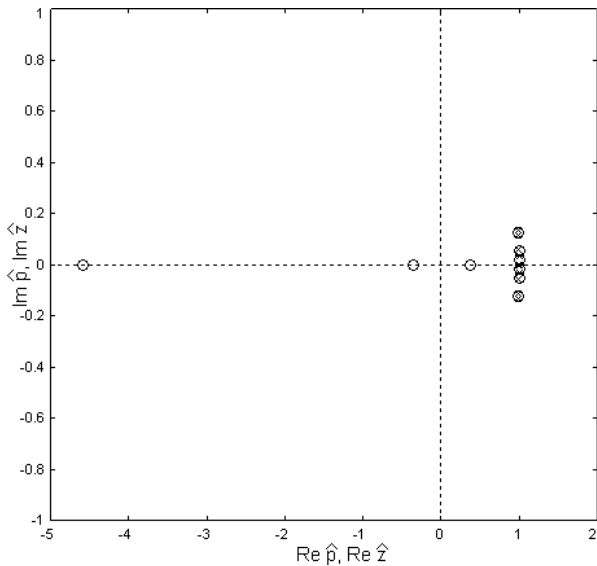
Rozkład zer i biegunów na płaszczyźnie zespolonej dla układu dyskretnego przy wejściu B_1 i wyjściu C_2 , dla okresu próbkowania T_1 przedstawiono na rys. 12, dla okresu próbkowania T_2 przedstawiono na rys. 13 a dla okresu próbkowania T_3 – na rys. 14.



Rys. 12. Położenie zer (O) i biegunów (X) na płaszczyźnie zespolonej dla układu dyskretnego przy okresie próbkowania T_1 – wejście B_1 , wyjście C_2



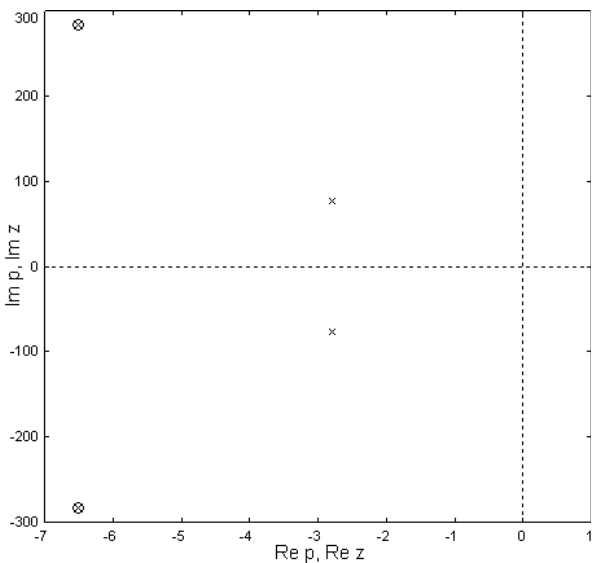
Rys. 13. Położenie zer (O) i biegunów (X) na płaszczyźnie zespolonej dla układu dyskretnego przy okresie próbkowania T_2 – wejście B_1 , wyjście C_2



Rys. 14. Położenie zer (O) i biegunów (X) na płaszczyźnie zespolonej dla układu dyskretnego przy okresie próbkowania T_3 – wejście B_1 , wyjście C_2

Przeprowadzone badania numeryczne układu ciągłego wykazały, że dokonywanie pomiaru na kierunku innym niż kierunek wymuszenia może spowodować nieminimalnofazowość układu (zera znajdują się w dodatniej półpłaszczyźnie zespolonej). W przypadku układu dyskretnego proces dyskretyzacji powoduje, że układ staje się nieminimalnofazowy (niektóre zera znajdują się na zewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej).

W celu zbadania w jakim stopniu pominięcie wybranych modów układu wpływa na minimalnofazowość układu przeprowadzono obliczenia numeryczne, przyjmując odpowiednio dwa warianty macierzy Ψ (16):

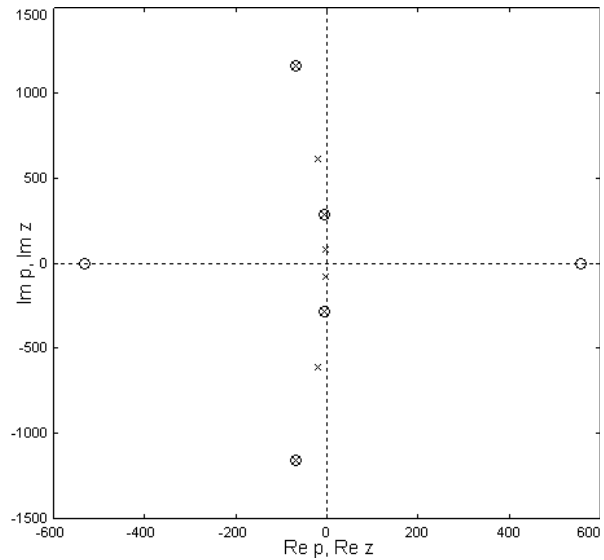


Rys. 15. Położenie zer (O) i biegunów (X) na płaszczyźnie zespolonej dla układu ciągłego dla wejścia B_1 , wyjścia C_3 przy przyjęciu Ψ^I

$$\Psi^I = [\Psi_1 \quad \Psi_2],$$

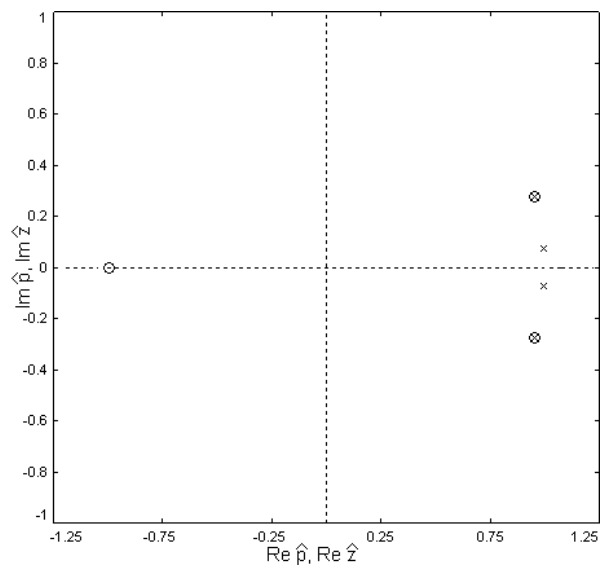
$$\Psi^{II} = [\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad \Psi_3 \quad \Psi_4].$$

Rozkład zer i biegunów na płaszczyźnie zespolonej dla układu ciągłego, przy wejściu B_1 i wyjściu C_3 , dla Ψ^I przedstawiono na rys. 15, a dla Ψ^{II} na rys. 16.

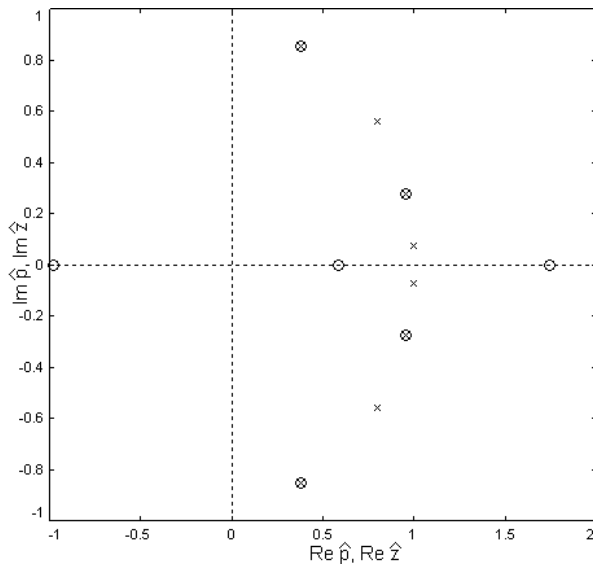


Rys. 16. Położenie zer (O) i biegunów (X) na płaszczyźnie zespolonej dla układu ciągłego dla wejścia B_1 , wyjścia C_3 przy przyjęciu Ψ^{II}

Rozkład zer i biegunów na płaszczyźnie zespolonej dla układu dyskretnego, dla okresu próbkowania T_2 , przy wejściu B_1 i wyjściu C_3 , dla Ψ^I przedstawiono na rys. 17, a dla Ψ^{II} na rys. 18.



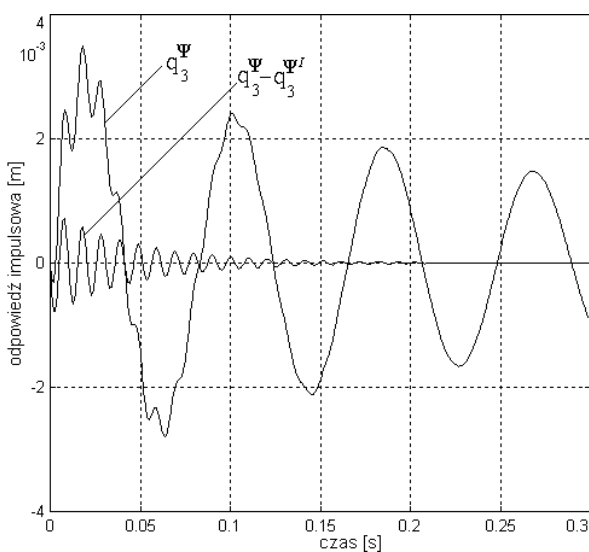
Rys. 17. Położenie zer (O) i biegunów (X) na płaszczyźnie zespolonej dla układu dyskretnego dla okresu próbkowania T_2 , wejścia B_1 , wyjścia C_3 przy przyjęciu Ψ^I



Rys. 18. Położenie zer (O) i biegunów (X) na płaszczyźnie zespolonej dla układu dyskretnego dla okresu próbkowania T_2 , wejścia \mathbf{B}_1 , wyjścia \mathbf{C}_3 przy przyjęciu Ψ''

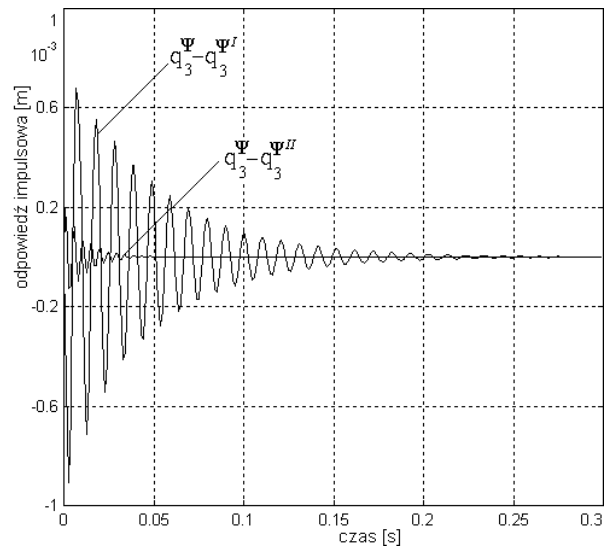
Na podstawie przedstawionych wykresów położenia zer na płaszczyźnie zespolonej stwierdzono, że przyjmując mody według Ψ' , a zatem uwzględniając dwie pierwsze postaci drgań własnych, popełnia się błąd jakościowy, ponieważ przyjmuje się, że układ jest minimalnofazowy, podczas gdy w rzeczywistości układ jest nieminimalnofazowy. Wynikają z tego istotne konsekwencje dla jakości procesu regulacji w przypadku stosowania układów aktywnych lub prowadzenia badań na stanowisku symulacyjnym.

Przebiegi odpowiedzi impulsowej q_3 dla układu ciągłego przy uwzględnieniu pełnej macierzy Ψ oraz różnicę między odpowiedzią impulsową q_3 dla układu z pełną macierzą Ψ a odpowiedzią impulsową q_3 dla macierzy Ψ'' przedstawiono na rys. 19.



Rys. 19. Przebiegi odpowiedzi impulsowej $q_3(t)$ dla pełnej macierzy Ψ oraz błędu przy przyjęciu macierzy Ψ'

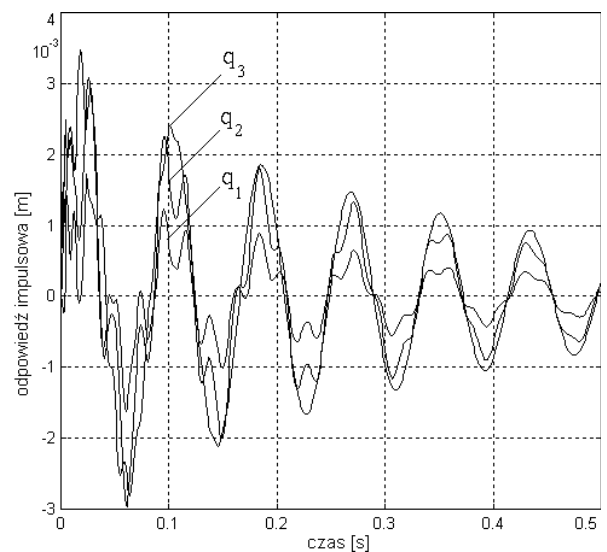
Różnice w przebiegu odpowiedzi impulsowej q_3 wyznaczonej dla układu z pełną macierzą Ψ a odpowiedzią $q_3(t)$ wyznaczoną przy przyjęciu odpowiednio macierzy Ψ' oraz Ψ'' przedstawiono na rys. 20.



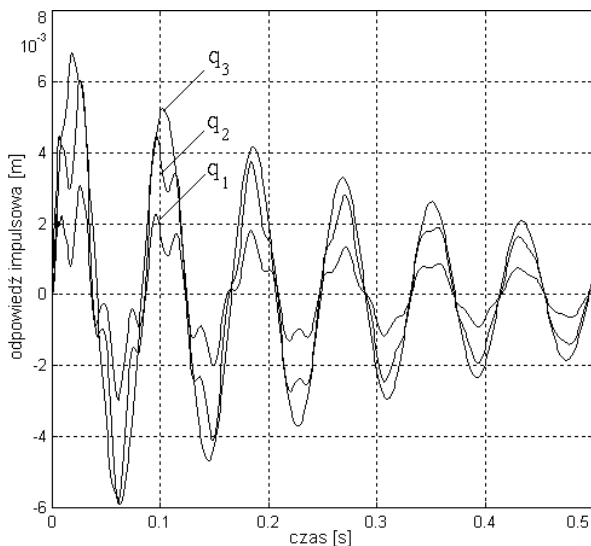
Rys. 20. Przebiegi różnic odpowiedzi impulsowej $q_3(t)$ dla macierzy Ψ' oraz Ψ'' w stosunku do przebiegu odpowiedzi impulsowej $q_3(t)$ przy macierzy Ψ

W celu określenia wpływu nieminimalnofazowości układu na stopień uwarunkowania zadania odwrotnego, polegającego na wyznaczeniu wymuszenia przy znanej odpowiedzi, dla układu wyznaczono odpowiedzi impulsowe na kierunkach \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_3 , \mathbf{C}_4 oraz \mathbf{C}_5 , przy przyjęciu wymuszenia opisanego wektorami \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 oraz \mathbf{B}_3 .

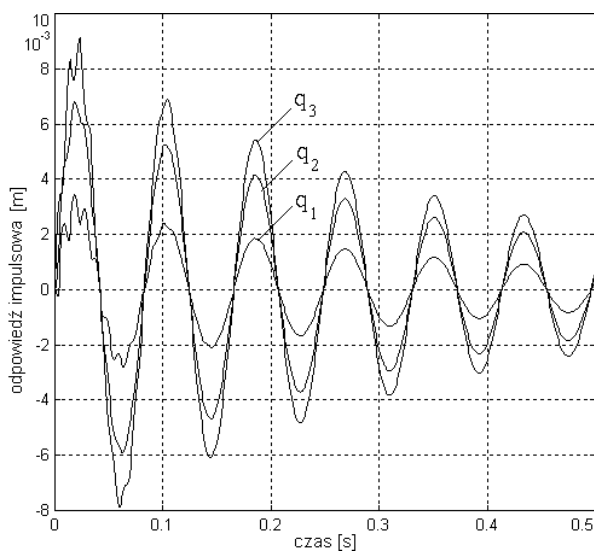
Przykładowe przebiegi odpowiedzi impulsowej na kierunkach \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 oraz \mathbf{C}_3 wywołane wymuszeniem \mathbf{B}_1 pokazano na rys. 21, wywołane wymuszeniem \mathbf{B}_2 pokazano na rys. 22, a wywołane wymuszeniem \mathbf{B}_3 – na rys. 23.



Rys. 21. Odpowiedzi impulsowe na kierunkach \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 oraz \mathbf{C}_3 wywołane wymuszeniem \mathbf{B}_1



Rys. 22. Odpowiedzi impulsowe na kierunkach C_1 , C_2 oraz C_3 wywołane wymuszeniem B_2



Rys. 23. Odpowiedzi impulsowe na kierunkach C_1 , C_2 oraz C_3 wywołane wymuszeniem B_3

Dla wyliczonych odpowiedzi impulsowych utworzono macierze P zgodnie ze wzorem (20). Wyznaczone wartości normy macierzy P określające uwarunkowanie zagadnienia odwrotnego zebrano w tabeli 4.

Wartości normy macierzy P

Tabela 4

$B_j \backslash C_i$	1	2	3
1	199,75	6,25e18	∞
2	1,08e19	875,98	2,72e19
3	∞	3,79e19	1,51e3
4	1,83e20	2,40e20	2,25e19
5	1,99e20	1,46e20	3,27e19

Im większe są wartości normy, tym macierz jest gorzej uwarunkowana. Analizując wartości normy określającej stopień uwarunkowania macierzy P stwierdzono zdecydowanie niekorzystny wpływ nieminimalnofazowości układu na rozwiązanie zagadnienia odwrotnego.

6. Podsumowanie

Analiza wyników przeprowadzonych obliczeń numerycznych wskazuje na istotność uwzględnienia badania problemu minimalnofazowości modelu w procesie tworzenia modelu typu wejście-wyjście w zakresie eksperymentalnych badań dynamiki funkcjonalnych układów pojazdów.

Stwierdzono, że badanie minimalnofazowości jest pomocne przy określaniu rzędu modelu (poprzez przyjęcie odpowiedniej liczby czujników i pomiar wielkości na odpowiednich kierunkach) dla eksperymentu prowadzonego z zastosowaniem analizy modalnej.

Stwierdzono, że błąd odtworzenia przebiegów trudno mierzalnych wielkości (szczególnie wymuszeń) w dużym stopniu zależy od tego, czy fizyczny model eksperymentu badanego układu jest minimalnofazowy.

Stwierdzono, że nieminimalnofazowość zasadniczo zwiększa złe uwarunkowanie macierzy przy rozwiązywaniu zagadnienia odwrotnego.

Uwzględnienie występowania zer układu w prawej półpłaszczyźnie zespolonej (nieminimalnofazowość układu) jest niezwykle istotne w procesie projektowania układów regulacji symulacyjnych stanowisk badawczych. Zagadnienie to jest tematem aktualnych prac.

Literatura

- [1] Bai E.-W., Wu Y.-Q., Limiting zero distribution of sampled systems, *Automatica*, 38, 2002.
- [2] Barczak A., Zera i bieguny transmitancji a częstotliwości antyrezonansowe i rezonansowe układów nośnych pojazdów, *Pojazdy Szynowe*, Nr 1/2005.
- [3] Fasana A., Piombo A. D., Identification of linear mechanical systems by deconvolution techniques, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(3), 1997.
- [4] Havre K., Skogestad S., Effect of RHP zeros and poles on the sensitivity functions in multivariable systems, *J. Proc. Cont.*, Vol. 8, No. 3, 1998.
- [5] Kaczorek T., *Teoria sterowania i systemów*, PWN, Warszawa, 1993.
- [6] Kaczorek T., *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*, WNT, Warszawa 1998.
- [7] Moheimani S. O., Minimizing the Effect of Out of Bandwidth Modes in Truncated Structure Models, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 122, 2000.
- [8] Sidi M. J., Loop-gain optimization of unstable-non-minimum phase feedback systems, *International Journal of Control*, Vol. 77, 2004.
- [9] MATLAB wersja 5.3.