

Wytrzymałość i wyboczenie belki trójwarstwowej

Przedmiotem artykułu jest sprężysta belka trójwarstwowa przegubowo podparta na obu końcach. Rozpatrzono dwa przypadki obciążenia belki. W pierwszym przypadku na belkę działa równomiernie rozłożone obciążenie poprzeczne, natomiast w drugim przypadku na belkę działa wzdłużna ściskająca siła osiowa. Wyprowadzono i rozwiązano równania równowagi, a następnie opisano wytrzymałość i wyboczenie belki.

1. Wstęp

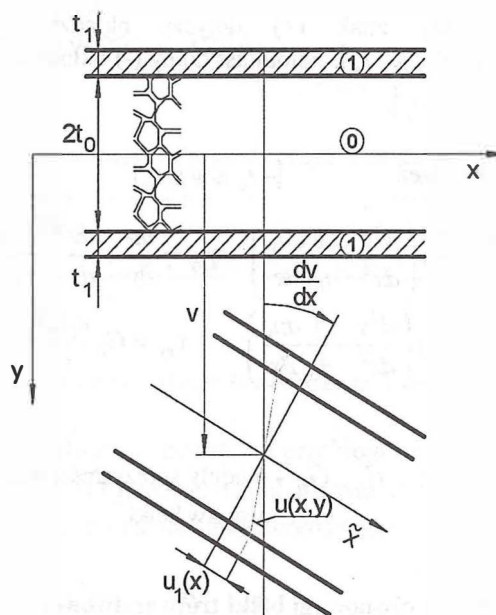
Konstrukcje warstwowe stosowane są już od wielu lat, między innymi w budownictwie, w budowie maszyn, a zwłaszcza w budowie różnych rodzajów pojazdów. Charakterystyczną cechą konstrukcji warstwowych jest ich duża sztywność na zginanie i mała masa. Typowym przedstawicielem tych konstrukcji są płyty trójwarstwowe, które zbudowane są z dwóch metalowych cienkich warstw zwanych okładzinami, oraz jednej poliuretanowej warstwy grubszej zwanej rdzeniem. Współczesne konstrukcje warstwowe znacznie różnią się swą budową od typowej konstrukcji trójwarstwowej. Problemy wytrzymałości, stateczności oraz technologii konstrukcji warstwowych zaprezentowali Romanów (1995) [9], Noor i Burton (1996) [8], Vinson (1999) [10], Gürdal, Haftka i Hajela (1999) [1], Librescu i Hause (2000) [2], Magnucki i Ostwald (2001) [4]. Opis przemieszczeń w przekroju poprzecznym ścianki konstrukcji wielowarstwowej-kompozytowej najczęściej jest formułowany na podstawie hipotezy płaskich przekrojów, którą opracowali dla belek izotropowych Jakub Bernoulli (1654-1705) i Leonard Euler (1707-1783), natomiast dla konstrukcji trójwarstwowych ten opis jest formułowany na podstawie hipotezy „linii łamanej”, którą opracowano na początku lat pięćdziesiątych dwudziestego wieku. Ważniejsze prace z tego okresu, które miały istotne znaczenie w rozwoju teorii konstrukcji trójwarstwowych omówił Wolmir (1967) [11].

Przedmiotem pracy jest sprężysta belka trójwarstwowa przegubowo podparta na obu końcach i obciążona równomiernie rozłożoną siłą poprzeczną lub ściskającą siłą wzdłużną. Przemieszczenia belki opisano na podstawie zaproponowanej w pracy [5] hipotezy deformacji płaskiego przekroju poprzecznego dla belek warstwowych. Klasyczna deformacja przekroju poprzecznego zwana hipotezą „linii łamanej” dla konstrukcji trójwarstwowych prowadzi do pewnej sprzeczności, która ujawnia się we współczynnikach równań równowagi. Zaproponowana w pracy [5] hipoteza deformacji płaskiego przekroju poprzecznego dla belki trójwarstwowej jest również w postaci „krzywej łamanej”, lecz nie prowadzi do tej sprzeczności. W pracy tej również uogólniono tę hipotezę dla belek pięciowarstwowych i porowatych, a szczegółowe rozwiązania przedstawili Magnucki i Stasiewicz (2004) [6], [7].

2. Przemieszczenia

Płaski przekrój poprzeczny zginanej belki trójwarstwowej zmienia się z płaszczyzny w pewną powierzchnię. Duża sztywność na rozciąganie – ściskanie cienkich okładzin w porównaniu z małą sztywnością grubego rdzenia jest przyczyną tej deplacji przekroju

poprzecznego belki trójwarstwowej. Występuje tu wyraźne przyporządkowanie sił wewnętrznych do warstw. W warstwach zewnętrznych – okładzinach występują przede wszystkim siły normalne (rozciąganie lub ściskanie, w ogólnym przypadku płaski stan naprężenia), natomiast w warstwie wewnętrznej – rdzeniu występuje przede wszystkim siła poprzeczna – tnąca. Na podstawie analizy deformacji przekroju poprzecznego belki trójwarstwowej przyjęto pewne dopuszczalne pole przemieszczeń, których schemat pokazano na rysunku 1.



Rys. 1 Schemat deformacji w przekroju poprzecznym belki trójwarstwowej

- warstwa górna – okładzina górna

$$u(x, y) = -y \left(\frac{dv}{dx} + u_1(x) \right), \text{ dla } -(t_0 + t_1) \leq y \leq -t_0, \quad (1)$$

- warstwa wewnętrzna – rdzeń

$$u(x, y) = -y \left(\frac{dv}{dx} - \frac{u_1(x)}{t_0} \right), \text{ dla } -t_0 \leq y \leq t_0, \quad (2)$$

- warstwa dolna – okładzina dolna

$$u(x, y) = - \left(y \frac{dv}{dx} - u_1(x) \right), \text{ dla } t_0 \leq y \leq t_0 + t_1. \quad (3)$$

Ugięcie belki opisuje kształt linii środkowej. Zakłada się, że ugięcia każdej warstwy (przemieszczenia w kierunku prostopadłym do osi) są takie same

$$v(x, y) = v(x). \quad (4)$$

Ugięcie jest więc funkcją jednej zmiennej x .

3. Odształcenia i naprężenia w belce trójwarstwowej

Przyjęto liniowe związki geometryczne i fizyczne (prawo Hooke'a) i na ich podstawie określono odkształcenia i naprężenia dla kolejnych warstw belki:

- okładziny górna i dolna

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = - \left(y \frac{d^2v}{dx^2} \pm \frac{du_1}{dx} \right), \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dv}{dx} = 0, \quad (5)$$

$$\sigma_x = -E_1 \left(y \frac{d^2v}{dx^2} \pm \frac{du_1}{dx} \right), \quad \tau_{xy} = 0,$$

gdzie górny znak (+) dotyczy okładziny górnej $[-(t_0 + t_1) \leq y \leq -t_0]$, natomiast dolny (-) okładziny dolnej $[t_0 \leq y \leq t_0 + t_1]$.

- rdzeń $[-t_0 \leq y \leq t_0]$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \left(\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{1}{t_0} \frac{du_1}{dx} \right), \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dv}{dx} = \frac{u_1(x)}{t_0}, \quad (6)$$

$$\sigma_x = -E_0 y \left(\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{1}{t_0} \frac{du_1}{dx} \right), \quad \tau_{xy} = G_0 \frac{u_1(x)}{t_0},$$

gdzie:

E_1, E_0, G_0 - moduły sprężystości materiałów warstw belki.

4. Równania równowagi belki trójwarstwowej

Zasada stacjonarności całkowitej energii potencjalnej, na podstawie twierdzenia Lagrange'a ma postać

$$\delta(E_\varepsilon - W) = 0 \quad (7)$$

gdzie:

$$E_\varepsilon = b \int_0^L \int_0^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy - \text{energia potencjalna odkształcenia sprężystego},$$

$$W = \int_0^L q v dx + \frac{F}{2} \int_0^L \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \text{praca obciążenia zewnętrznego},$$

q - intensywność równomiernie rozłożonego obciążenia poprzecznego,

F - wzdłużna siła ściskająca.

b - szerokość belki, L - długość belki.

Całkowita energia potencjalna belki trójwarstwowej, po podstawieniu wyrażeń dla odkształceń i naprężeń (5) i (6), jest funkcjonalem $J(u, v)$ dwóch funkcji $u_1(x)$ i $v(x)$. Zasada stacjonarności (7) oznacza zerowanie pierwszej wariacji funkcjonału $\delta J(u_1, v) = 0$. Z tego warunku otrzymano dla belki trójwarstwowej układ dwóch równań równowagi w postaci:

$$\begin{aligned} D \frac{d^4v}{dx^4} - C_1 \frac{d^3u_1}{dx^3} + \frac{F}{b} \frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{q(x)}{b}, \\ C_1 \frac{d^3v}{dx^3} - B_0 \frac{d^2u_1}{dx^2} + 2 \frac{G_0}{t_0} u_1(x) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie $D = 2 \left[\frac{1}{3} E_0 t_0^3 + E_1 t_1 \left(t_0^2 + t_0 t_1 + \frac{1}{3} t_1^2 \right) \right],$

$$C_1 = 2 \left[\frac{1}{3} E_0 t_0^2 + E_1 t_1 \left(t_0 + \frac{1}{2} t_1 \right) \right],$$

$$B_0 = 2 \left(\frac{1}{3} E_0 t_0 + E_1 t_1 \right), \quad t_0, t_1 - \text{grubości warstw.}$$

W przekroju belki występują:

- siła poprzeczna

$$Q(x) = 2b \int_0^{t_0} \tau_{xy} dy = 2b G_0 u_1(x), \quad (9)$$

- moment zginający

$$M(x) = 2b \int_0^{h/2} y \sigma_x dy = -b \left(D \frac{d^2v}{dx^2} - C_1 \frac{du_1}{dx} \right). \quad (10)$$

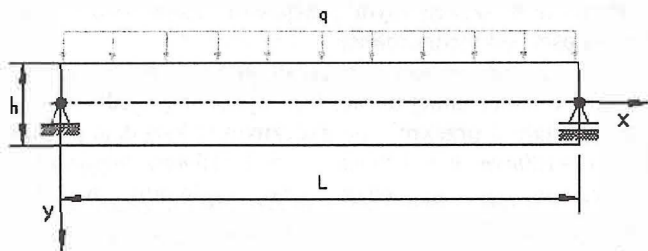
Pierwsze równanie układu (8) stanowi równowagę momentów i można je zastąpić wyrażeniem (10). Drugie równanie układu (8) pozostaje bez zmian:

$$\begin{aligned} D \frac{d^2v}{dx^2} - C_1 \frac{du_1}{dx} &= -\frac{1}{b} M(x), \\ C_1 \frac{d^3v}{dx^3} - B_0 \frac{d^2u_1}{dx^2} + 2 \frac{G_0}{t_0} u_1(x) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Ten układ równań różniczkowych jest dogodny w badaniu wytrzymałości lub stateczności belek trójwarstwowych.

5. Wytrzymałość belki trójwarstwowej

Belka trójwarstwowa o długości L i wysokości $h = 2(t_0 + t_1)$ podparta przegubowo na obu końcach jest pod działaniem na całej długości równomiernie rozłożonego obciążenia poprzecznego o stałej intensywności q (rys.2).



Rys.2. Schemat belki trójwarstwowej obciążonej poprzecznie

Układ równań równowagi (11) po przekształceniach można sprowadzić do jednego równania

$$(C_1^2 - B_0 D) \frac{d^2 u_1}{dx^2} + 2D \frac{G_0}{t_0} u_1(x) = \frac{C_1}{b} \frac{dM}{dx}, \quad (12)$$

w którym współczynnik $C_1^2 - B_0 D \cong 0$, zatem

$$u_1(x) = \frac{C_1 t_0}{2b G_0 D} \frac{dM}{dx}. \quad (13)$$

Moment zginający w dowolnym przekroju belki (rys.2) wynosi $M(x) = \frac{1}{2} q(L-x)x$, zatem z wyrażeń (13) oraz (11) otrzymano:

$$u_1(x) = \frac{C_1 t_0 L}{4b G_0 D} q \left(1 - 2 \frac{x}{L} \right),$$

$$v_1(x) = \frac{qL^4}{24bD} \left[1 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 6 \frac{C_1^2 t_0}{G_0 D L^2} \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right] \frac{x}{L}.$$

Największe ugięcie belki

$$v_{\max} = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{bD} \left(1 + \frac{24}{5} \frac{C_1^2 t_0}{G_0 D L^2} \right). \quad (14)$$

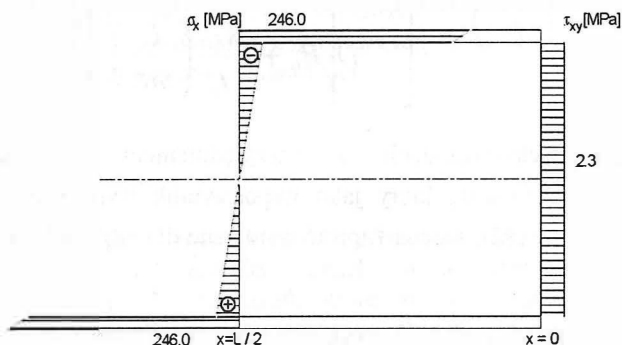
Drugi składnik tego wyrażenia w nawiasie oznacza udział ścinania w ugięciu belki trójwarstwowej.

Przyjmując przykładowe dane liczbowe: $L = 0.9m$,

$$t_0 = 48mm, \quad t_1 = 2mm, \quad E_0 = 2050MPa, \\ G_0 = 1025MPa, \quad E_1 = 2.05 \cdot 10^5 MPa,$$

$\frac{q}{b} = 0.5MPa$, wyznaczono wartość maksymalnego

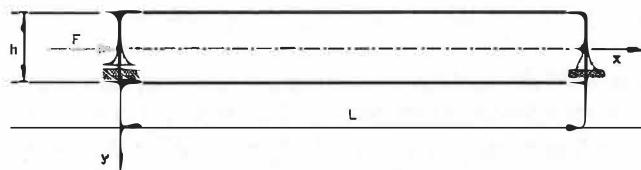
ugięcia belki $v_{\max} = 2.0146(1 + 0.2457) \cong 2.51mm$ oraz rozkłady naprężeń normalnych (5) w przekroju belki $x = L/2$ i naprężeń stycznych (6) w przekroju $x = 0$ (rys.3).



Rys.3. Wykresy naprężeń normalnych σ_x i stycznych τ_{xy}

6. Wyboczenie belki trójwarstwowej

Belka trójwarstwowa o długości L i wysokości $h = 2(t_0 + t_1)$ podparta przegubowo na obu końcach jest ściskana siłą osiową F (rys.4).



Rys. 4. Belka ściskana ze swobodnymi końcami

Moment zginający w dowolnym przekroju tej belki wynosi $M(x) = F \cdot v(x)$, zatem układ równań równowagi (11) przyjmie teraz postać układu jednorodnego:

$$D \frac{d^2 v}{dx^2} - C_1 \frac{du_1}{dx} + \frac{F}{b} v(x) = 0, \\ C_1 \frac{d^3 v}{dx^3} - B_0 \frac{d^2 u_1}{dx^2} + 2 \frac{G_0}{t_0} u_1(x) = 0. \quad (15)$$

Ten układ równań różniczkowych rozwiązano w sposób przybliżony przyjmując następujące postacie funkcji.

$$u_1(x) = u_{10} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad v(x) = v_{10} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad (16)$$

gdzie: u_{10} i v_{10} - parametry funkcji przemieszczeń, m - liczba naturalna.

Podstawiając te funkcje do równań (15) otrzymano:

$$u_{10} = \frac{m\pi}{L} \frac{C_1}{B_0 + 2 \frac{G_0}{t_0} \left(\frac{L}{m\pi} \right)^2} \cdot v_{10}$$

$$F = \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 Db \left\{ 1 - \frac{C_1^2}{D \left[B_0 + 2 \frac{G_0}{t_0} \left(\frac{L}{m\pi} \right)^2 \right]} \right\} \quad (17)$$

Po przekształceniach z uwzględnieniem związku $C_1^2 - B_0 D \cong 0$, który jako współczynnik występuje w równaniu (12), można zapisać wyrażenie dla siły ściskającej

$$F = \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \frac{Db}{1 + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \frac{B_0 t_0}{2G_0}} \quad (18)$$

Obciążenie krytyczne belki trójwarstwowej jest najmniejszą wartością tego wyrażenia, zatem

$$F_{KR} = \min_m \{F\} = \frac{\pi^2 Db}{L^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 B_0 t_0}{2G_0 L^2}} \quad (19)$$

Ten wzór dla obciążenia krytycznego belki trójwarstwowej może być bardzo wygodny w praktycznym projektowaniu.

W szczególnym przypadku, gdy $t_1 = t_0$, $E_1 = E_0$, wówczas belka jest jednorodna i siła krytyczna jest zgodna z siłą Eulera.

Przyjmując przykładowe dane liczbowe: $L = 4.5 \text{ m}$, $t_0 = 48 \text{ mm}$, $t_1 = 2 \text{ mm}$, $b = 100 \text{ mm}$, $E_0 = 2050 \text{ MPa}$, $G_0 = 1025 \text{ MPa}$, $E_1 = 2.05 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, wyznaczono wartość siły krytycznej $F_{KR} = 103.34 \text{ kN}$. Naprężenia normalne w okładzinach dla stanu krytycznego wynoszą $\sigma_{KR} = 258.3 \text{ MPa}$ i są mniejsze od granicy plastyczności wielu metalowych materiałów konstrukcyjnych. Niewątpliwie dla krótszych belek wyboczenie będzie zachodzić poza granicę plastyczności materiałów okładzin belki trójwarstwowej.

7. Zakończenie

Przyjęta hipoteza deformacji przekroju porzecznego belki trójwarstwowej jest uogólnieniem teorii jednorodnej izotropowej belki Eulera-Bernoulli'ego. Wprowadzona funkcja $u_1(x)$ rozszerza teorię Eulera-Bernoulli'ego na belki trójwarstwowe i nie wprowadza pewnej sprzeczności, jaka występuje w przypadku stosowania klasycznej hipotezy „linii łamanej” stosowanej w teorii konstrukcji trójwarstwowych.

Wyznaczone rozkłady naprężeń normalnych i stycznych (rys.3) wyraźnie wskazują na rozdział sił w wewnętrznych w przekroju belki. Moment zginający sprowadzony jest praktycznie do pary sił w okładzinach, natomiast siła poprzeczna-tnąca występuje wyłącznie w rdzeniu.

Wyrażenie dla siły krytycznej belki trójwarstwowej (19) ma analogiczny charakter do wyrażenia Eulera dla prostych belek ściskanych. Sztywność zginania D (8) belki trójwarstwowej zawiera odpowiednie sztywności kolejnych warstw, a w szczególnym przypadku, sprowadza się do sztywności belki jednorodnej.

Dla porównania rozwiązań przyjęto belkę cienkościenną o takiej samej masie, lecz wykonaną z jednorodnego materiału o przekroju poprzecznym w kształcie prostokąta ($b=100 \text{ mm}$, $h = 100 \text{ mm}$, $t = 1.615 \text{ mm}$). Największe naprężenia w tej belce przy zginaniu wynoszą $\sigma_{\max} = 246.75 \text{ MPa}$, a siła krytyczna $F_{KR} = 102.5 \text{ kN}$. Wartości te są porównywalne z odpowiednimi wartościami dla belki trójwarstwowej.

Literatura

- [1] Gürdal Z, Haftka RT, Hajela P., *Design and Optimization of Laminated Composite Materials*. A Wiley-Interscience Pub. J Wiley & Sons, Inc. New York, Chichester, Weinheim, Singapore, Toronto 1999.
- [2] Librescu L, Hause T., *Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey*. "Composites Structures", 48, 2000. S. 1-17.
- [3] Lok T-S, Cheng Q-H., *Elastic stiffness properties and behavior of truss-core sandwich panel*. "Journal of Structural Engineering", 126 (5), 2000, s. 552-559.
- [4] Magnucki K, Ostwald M. (red.), *Stateczność i optymalizacja konstrukcji trójwarstwowych*, Wyd. Instytutu Technologii Eksploatacji w Radomiu, Poznań – Zielona Góra 2001.
- [5] Magnucki K., *Differential equations of multilayer isotropic beams*. The Fourth Int. Conference "Tools for Mathematical Modelling", Saint-Petersburg 2003, s. 103.
- [6] Magnucki K., Stasiewicz P., *Elastic bending of an isotropic porous beam*. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 2, 2004.
- [7] Magnucki K., Stasiewicz P., *Elastic buckling of a porous beam*. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2004 (w druku).
- [8] Noor A.K., Burton W.S., *Computational models for sandwich panels and shells*. *Applied Mechanics Reviews*, 49, (3), 1996, s. 155-199.