

## Zakłócenia w sterowaniu układu dynamicznego tor-pojazd szynowy

W pracy przedstawiono alternatywne podejście do opisu zakłóceń w sterowaniu systemów transportowych. Zdefiniowano pojęcie zakłóceń falowych i dano ich matematyczną interpretację. Pokazano przykłady modeli realnych zakłóceń falowych, występujących w realnych układach dynamicznych tor-pojazd szynowy.

### 1. Wstęp

Zakłócenia są nieodzownym i często niedocenianym elementem w sterowaniu systemów transportowych. Przykładami typowych zakłóceń, występujących w realnych układach tor-pojazd szynowy są: podmuchy wiatru i inne siły aerodynamiczne działające na pojazd, tarcie i luzy w układzie zawieszenia, nierówności toru kolejowego, przesunięcia środka ciężkości, mimośród siły pociągowej w ruchu po krzywej i inne nieokreślone efekty przesunięć w układzie mechanicznym pojazdu.

Klasyczne metody sterowania oparte są na deterministycznej lub na losowej interpretacji sygnałów zakłócających. Jeżeli pierwsze z wymienionych podejść reprezentuje zbyt uproszczone rozumienie przyrody zakłóceń, to drugie – zanadto komplikuje ich opis.

W niniejszej pracy zaproponowano podejście alternatywne w opisie sygnałów zakłócających, oparte na teorii zakłóceń falowych, pozwalającej opisywać szeroką gamę zakłóceń, występujących w realnych układach tor-pojazd szynowy.

### 2. Falowa interpretacja zakłóceń w układzie tor-pojazd szynowy

Zakłócenia, charakteryzujące się strukturą falową, mogą być matematycznie opisane za pomocą półdeterministycznych zależności analitycznych następującego typu [1]:

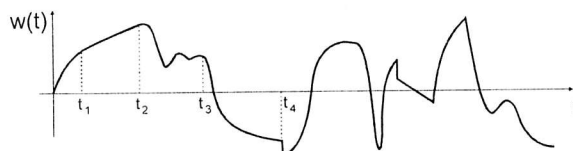
$$w(t) = W[f_1(t), f_2(t), \dots, f_M(t); c_1, \dots, c_L] \quad (1)$$

gdzie  $f_i(t), i = 1, 2, \dots, M$  ( $M$  – wielkość skończona) – znane funkcje czasu,

$c_k, k = 1, \dots, L$  – parametry nieznanne, które mogą skokowo zmieniać w sposób częściowo-stały swoje znaczenia. Modele matematyczne typu (1) będą dalej nazywane interpretacją „falową” zakłócenia  $w(t)$ .

Opis liniowy (1) można rozpatrywać jako interpretację  $w(t)$  w przestrzeni funkcjonalnej, gdzie zbiór funkcji  $\{f_i(t), \dots, f_M(t)\}$  jest bazą, zaś  $c_i$  – są częściowo-stałymi współczynnikami wagowymi. Innymi słowy, zakłócenia  $w(t)$  przedstawiają liniową wagową kombinację znanych funkcji bazowych  $f_i(t)$  i nieznanymi współczynnikami wagowymi  $c_i$ , które losowo, w sposób okresowo-stały, zmieniają swoje znaczenia [3].

Przykładową ilustrację równania (1) pokazano na rys. 1.



Rys. 1. Zakłócenia o strukturze falowej.

Zaproponowana interpretacja zakłóceń  $w(t)$  zdecydowanie różni się od ich tradycyjnego, losowego traktowania. W szczególności, zakres informacji, zawartej w równaniu (1) jest jakościowo inny od informacji zawartej w tradycyjnych pojęciach statystycznych, takich jak wartość przeciętna, wariancja, gęstość widmowa i inne. Znaczenia współczynników  $c_i$  w równaniu (1) są zupełnie nieznanne (za wyjątkiem tego, że zmieniają się w sposób okresowo-stały). Interpretacja falowa nie operuje tradycyjnymi właściwościami statystycznymi zakłóceń i ich nie określa.

Efektywne sterowanie, w przypadku zakłóceń, wymaga informacji bieżącej o ich działaniu. Informacja statystyczna, oparta na długookresowych obserwacjach nie spełnia wymogów informacji bieżącej i staje się w sterowaniu operatywnym zupełnie nieprzydatną.

Zatem, interpretacja (1) wypełnia „informacyjną próżnię” w opisie zakłóceń realnie występujących w układzie dynamicznym tor-pojazd szynowy.

W szczególności, równanie (1) pozwala na opisanie szerokiej gamy możliwych form falowych, ujmujących dowolną, nieznaną realizację zakłócenia  $w(t)$  w chwili  $t$ . Ponadto, każda oddzielna realizacja  $w(t)$  w interpretacji falowej może posiadać „swoją” zbiór właściwości statystycznych, dzięki czemu może być wykorzystana również do opisu nieergodycznych funkcji zakłócających  $w(t)$ , w szczególności, gdy każda realizacja  $w(t)$  jest stałą wielkością losową.

### 3. Modele stanu zakłóceń falowych

Wyznaczenie układu funkcji bazowych  $\{f_i(t)\}$ , jest krokiem pierwszym w wykorzystaniu falowej interpretacji zakłóceń jako instrumentu układu regulacji. Można tego dokonać na podstawie wizualnej i matematycznej analizy zapisów eksperymentalnych  $w(t)$

lub poprzez analizę charakterystyk dynamicznych procesu fizycznego, generującego  $w(t)$ .

W kroku drugim, należy określić dla równania (1) odpowiedni „model stanu”, który jest równaniem różniczkowym, spełnionym przez funkcję (1). Innymi słowy, równanie (1) należy rozpatrywać jako znane „rozwiązanie ogólne” szukanego równania różniczkowego. Przyjmijmy zatem, że każda wybrana funkcja  $f_i(t)$  ma transformatę Laplace'a  $f_i(s)$ , następującej postaci

$$f_i(s) = \frac{P_{m_i}(s)}{Q_{n_i}(s)} \quad (2)$$

gdzie:  $P_{m_i}(s), Q_{n_i}(s)$  - wielomiany odpowiednio  $m$ -tego i  $n$ -tego stopnia,  $m_i \leq n_i$ . Jeżeli  $c_i$  chwilowo przyjmując jako wielkości stałe, to transformacja Laplace'a równania (2) ma postać

$$w(s) = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s) + \dots + c_M f_M(s) = \sum_i^M c_i \frac{P_{m_i}(s)}{Q_{n_i}(s)} \quad (3)$$

ostatecznie

$$w(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (4)$$

gdzie wielomian licznika  $P(s)$  zawiera współczynniki  $c_i$ , a wielomian mianownika  $Q(s)$  jest najmniejszym ogólnym mianownikiem w zbiorze wielomianów mianowników  $\{Q_{n_1}(s), Q_{n_2}(s), \dots, Q_{n_M}(s)\}$  równania (3). Taka interpretacja gwarantuje minimalny rozmiar ostatecznego modelu stanu  $w(t)$ , co ma istotne znaczenie z punktu widzenia kosztów i złożoności aparatury. Przyjmijmy zatem, że wielomian mianownika  $Q(s)$  w równaniu (4) ma postać

$$Q(s) = s^\rho + q_\rho s^{\rho-1} + q_{\rho-1} s^{\rho-2} + \dots + q_2 s + q_1 \quad (5)$$

gdzie  $\rho \leq \sum_1^M n_i$ . Z równania (4) wynika, że zakłócenia  $w(t)$  można traktować jako „zmienną wyjściową” fikcyjnego liniowego układu dynamicznego o transmitancji operatorowej

$$G(s) = \frac{I}{Q(s)} \quad (6)$$

przy warunkach początkowych

$\{w(0), \dot{w}(0), \ddot{w}(0), \dots\}$ . Wtedy zakłócenia (1) z uwzględnieniem zależności (3)-(5), spełniają następujące jednorodne liniowe równanie różniczkowe z parametrami stałymi

$$\frac{d^\rho w}{dt^\rho} + q_\rho \frac{d^{\rho-1} w}{dt^{\rho-1}} + q_{\rho-1} \frac{d^{\rho-2} w}{dt^{\rho-2}} + \dots + q_2 \frac{dw}{dt} + q_1 w = 0 \quad (7)$$

gdzie współczynniki  $q_i, i=1,2,\dots,\rho$ , są znane, gdyż nie zależą od  $c_i$  i określone są układem funkcji bazowych  $\{f_i(t)\}$ , przyjmowanym za dany.

Aby uwzględnić możliwe skokowe zmiany współczynników  $c_i$  w równaniu (7) dodamy do niego zewnętrzna funkcję wymuszającą  $\omega(t)$ , która jest ciągiem nieznanych, losowo pojawiających się funkcji impulsowych o losowej intensywności (typu pojedynczej, podwójnej, potrójnej itd. funkcji Diraca).

Zatem model stanu  $w(t)$  ostatecznie przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \frac{d^\rho w}{dt^\rho} + q_\rho \frac{d^{\rho-1} w}{dt^{\rho-1}} + q_{\rho-1} \frac{d^{\rho-2} w}{dt^{\rho-2}} + \dots \\ \dots + q_2 \frac{dw}{dt} + q_1 w = \omega(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Należy podkreślić, iż impulsowa funkcja wymuszająca  $\omega(t)$ , jest nieznana i wprowadzona do modelu stanu (8) tylko symbolicznie w celu matematycznego opisanie skoków  $c_i$  w równaniu (1). Ponadto chwile występowania sąsiednich funkcji impulsowych oddzielone są od siebie pewnym, minimalnym dodatnim przedziałem  $\mu > 0$ .

Zatem, jeżeli funkcje bazowe  $f_i(t)$  w równaniu (1) mają transformatę Laplace'a typu (2), to w celu znalezienia modelu stanu dla równania (1) należy tylko określić współczynniki  $\{q_1, q_2, \dots, q_\rho\}$  z równań (1) i (5), a następnie wykorzystać ogólny model stanu (8).

Równanie różniczkowe rzędu  $\rho$ -tego (8) może być przedstawione w formie układu równań różniczkowych rzędu pierwszego. Na przykład, równanie (8) można zapisać ekwiwalentnie w postaci „całkowicie obserwowalnej”, znanej formie kanonicznej

$$w = z_1,$$

$$\dot{z}_1 = z_2 + \sigma_1(t),$$

$$\dot{z}_2 = z_3 + \sigma_2(t),$$

.

.

.

$$\dot{z}_{\rho-1} = z_\rho + \sigma_{\rho-1}(t),$$

$$\dot{z}_\rho = -q_1 z_1 - q_2 z_2 - \dots - q_\rho z_\rho + \sigma_\rho(t)$$

gdzie symboliczne działanie  $\omega(t)$  w równaniu (8) zastąpione jest w równaniu (9) funkcjami  $\sigma_i(t)$ ,  $i=1,2,\dots,\rho$ , stanowiącymi ciągi nieznanych, losowych funkcji Diraca, zaś kropka oznacza operator  $d/dt$ .

W ogólnym przypadku należy oczekiwać, że równanie różniczkowe (8) lub układ równań różniczkowych (9) będą zawierać współczynniki zmienne  $q_i$  i/lub człony nieliniowe względem  $w, dw/dt$  itp. Zatem, szukany „model stanu” dla zakłóceń  $w(t)$ , posiadających strukturę falową może być przedstawiony w formie jednego równania różniczkowego rzędu wysokiego

$$\frac{d^\rho w}{dt^\rho} + f\left(w, \frac{dw}{dt}, \dots, \frac{d^{\rho-1}w}{dt^{\rho-1}}, t\right) = \omega(t) \quad (10)$$

lub w formie układu równań różniczkowych rzędu pierwszego

$$\dot{\omega} = W(z, t),$$

$$\dot{z} = Z(z, t) + \sigma(t);$$

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_\rho) \quad (11)$$

(9)

Zauważmy, iż model (11) ma pewną przewagę nad modelem (10), gdyż wykorzystuje metody zmiennych stanu. Jeżeli  $w(t)$  jest zakłóceniem wielowymiarowym, zawierającym  $p$  komponentów  $w = (w_1, w_2, \dots, w_p)$ , to model stanu należy określić dla każdego niezależnego komponentu  $w_i(t)$ .

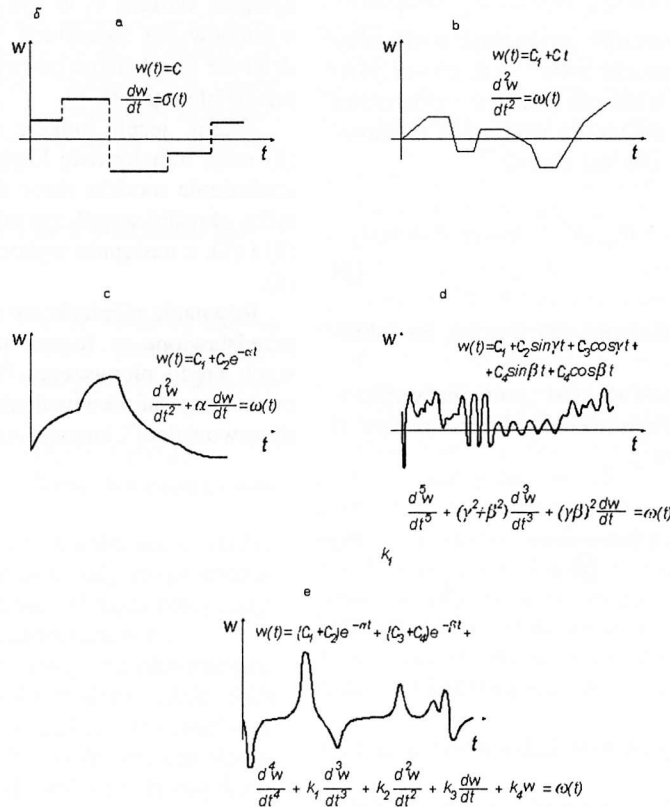
#### 4. Przykłady modeli stanu dla realnych zakłóceń w układzie tor-pojazd szynowy

Modele stanu, wyrażone równaniami (10) i (11) dla realnych zakłóceń, występujących co najmniej w krótkich odstępach czasowych, w układzie tor-pojazd szynowy można określić na bazie zapisów eksperymentalnych oscylogramów, pokazanych na rys.2.

Przykład 1. W przypadku pokazanym na rys.2a zakłócenia spełniają następujące równanie różniczkowe

$$\frac{dw}{dt} = 0 \quad (12)$$

c w tym przypadku jest wielkością stałą. Aby uwzględnić nieznane losowe, skokowe zmiany  $c$ , należy do równania (12) dodać człon  $\sigma(t)$ , który składa się z nieznanego ciągu funkcji



Rys. 2. Zakłócenia o strukturze falowej w realnych układach tor-pojazd szynowy.

Diraca. Model stanu zakłóceń  $w(t)$ , pokazanych na rys. 2a. przyjmuje ostatecznie następującą postać

$$\frac{dw}{dt} = \sigma(t) \quad (13)$$

Przykład 2. Zakłócenia pokazane na rys. 2b. są opisane równaniem  $w(t) = c_1 + c_2 t$ , które spełnia następujące równanie różniczkowe rzędu drugiego

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \omega(t) \quad (14)$$

gdzie  $\omega(t)$  oznacza nieznaną ciąg losowych pojedynczych i podwójnych impulsów o intensywności losowej. Model ekwiwalentny w formie układu (9) ma postać

$$w(t) = (1, 0) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$z_1 = z_2 + \sigma_1(t), \quad z_2 = 0 + \sigma_2(t), \quad (16)$$

Przykład 3. Zakłócenia  $w(t)$ , pokazane na rys. 2c. o transformacie Laplace'a

$$w(s) = c_1 \left( \frac{1}{s} \right) + c_2 \left( \frac{1}{s + \alpha} \right) \quad (17)$$

mogą być przedstawione w formie równania (4) następująco

$$w(s) = \frac{[c_1(s + \alpha) + c_2 s]}{s(s + \alpha)} \quad (18)$$

W tym przypadku  $Q(s) = s^2 + \alpha s$ , zaś z równań (5) i (8) wynika, że  $w(t)$  spełnia następujące równanie różniczkowe rzędu drugiego

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \alpha \frac{dw}{dt} = \omega(t) \quad (19)$$

Ekwiwalentny model stanu ma postać

$$w = (1, 0) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$z_1 = z_2 + \sigma_1(t), \quad z_2 = \alpha z_2 + \sigma_2(t), \quad (21)$$

Przykład 4. Zakłócenia  $w(t)$  typu drobnych fal pokazane na rys. 2d. mają następującą transformatę Laplace'a

$$w(s) = \frac{P(s)}{s(s^2 + \gamma^2)(s^2 + \beta^2)} \quad (22)$$

A więc, zgodnie z równaniami (5)-(8),  $w(t)$  spełnia następujące równanie różniczkowe rzędu piątego

$$\frac{d^5 w}{dt^5} + (\gamma^2 + \beta^2) \frac{d^3 w}{dt^3} + (\gamma\beta)^2 \frac{dw}{dt} = \omega(t) \quad (23)$$

Ekwiwalentne przedstawienie równania (23) ma postać

$$w(t) = (1, 0, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 + \sigma_1(t), & z_2 &= z_3 + \sigma_2(t), \\ z_3 &= z_4 + \sigma_3(t), & z_4 &= z_5 + \sigma_4(t), \\ z_5 &= -(\gamma\beta)^2 z_2 - (\gamma^2 + \beta^2) z_4 + \sigma_5(t), \end{aligned} \quad (25)$$

Przykład 5. Zakłócenia typu impulsowego pokazane na rys. 2e. o transformacie Laplace'a

$$w(s) = \frac{P(s)}{(s^4 + k_1 s^3 + k_2 s^2 + k_3 s + k_4)} \quad (26)$$

gdzie  $k_i$  – są funkcjami dwóch znanych parametrów  $\alpha$  i  $\beta$ , spełniają następujące równanie różniczkowe

$$\frac{d^4 w}{dt^4} + k_1 \frac{d^3 w}{dt^3} + k_2 \frac{d^2 w}{dt^2} + k_3 \frac{dw}{dt} + k_4 w = \omega(t) \quad (27)$$

lub

$$w(t) = (1, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 + \sigma_1(t), \\ z_2 &= z_3 + \sigma_2(t), \\ z_3 &= z_4 + \sigma_3(t), \\ z_4 &= -k_4 z_1 - k_3 z_2 - k_2 z_3 - k_1 z_4 + \sigma_4(t) \end{aligned} \quad (29)$$

gdzie  $k_i$  są znanymi współczynnikami, zależnymi od parametrów  $\alpha$  i  $\beta$ .

## LITERATURA

- [1] Брайсон А., Хо-Ю-Ши Прикладная теория оптимального управления.-М.: Мир, 1972.
- [2] Квакернаак Х., Сиван З. Линейные оптимальные системы управления.-М.: Мир, 1977.
- [3] Johnson C. D. Theory of Disturbance-Accommodating Controllers. Chapter in the book, *Control and Dynamic Systems; Advances in Theory and Applications*, Vol. 12, edited by C. T. Leondes, Academic Press., Inc., New York, 1976, p. 627.
- [4] Johnson C. D. Accommodation of External Disturbances in Linear Regulator and Servomechanism Problems, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-16, pp. 635-643, 1971.