

Zastosowanie modalnych kryteriów sterowalności i obserwowalności w tworzeniu modelu dynamiki pojazdu

W artykule przedstawiono badania możliwości zastosowania modalnych miar obserwowalności i sterowalności układu do oceny jakości przyjętego wektora stanu układu. Rozważania przeprowadzono na przykładzie modelu pojazdu.

1. Wprowadzenie

Pojazd szynowy jest złożonym obiektem strukturalnie i funkcjonalnie. O jakości modelu zjawisk zachodzących w czasie ruchu pojazdu po torze decyduje przyjęcie odpowiedniego modelu fizycznego dla realizacji eksperymentu. Związane jest to z ustaleniem jakie wielkości, w których punktach i na jakich kierunkach należy mierzyć. Ze względu na ograniczenia aparaturowe, a także czas i koszty badań pojazdu w ruchu, konieczne jest przeprowadzenie wstępnej analizy w celu wyboru wielkości pomiarowych dających najwięcej informacji o stanie badanego układu.

W przygotowaniu i prowadzeniu badań pojazdu w ruchu oraz pojazdów i ich zespołów funkcjonalnych na stanowiskach symulacyjnych ważną rolę odgrywa analiza zjawisk w dziedzinie częstotliwości. Pomocna w tym zakresie jest analiza modalna.

Celem artykułu jest zilustrowanie na przykładzie modelu pojazdu zastosowania modalnych miar obserwowalności i sterowalności układu do oceny jakości przyjętych wariantów wektora stanu.

2. Sterowalność, obserwowalność, dominujące wartości własne

W badaniach dynamiki pojazdów powszechnie stosowany jest formalizm przestrzeni stanu generowanej przez wektory stanu utworzone przez wielkości istotne ze względu na przyjęty cel badań. Dynamikę układu w przestrzeni stanu opisuje równanie stanu [2]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.1)$$

oraz równanie wyjść

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.2)$$

gdzie \mathbf{x} jest n -wymiarowym wektorem stanu układu, \mathbf{u} wektorem wejść a \mathbf{y} wektorem wyjść. Macierz \mathbf{A} jest nazywana macierzą stanu układu, a macierze \mathbf{B} i \mathbf{C} macierzami (odpowiednio) wejść i wyjść.

Problem wyboru „najlepszych” wielkości pomiarowych i najlepszego sterowania jest ściśle związany z wyznaczeniem charakterystyk dotyczących obserwowalności i sterowalności badanego układu. Problem wyboru modelu o najmniejszym

wymiarze jest związany z określeniem tzw. dominujących wartości własnych macierzy stanu.

Dla układu opisanego modelem w przestrzeni stanu wprowadzono pojęcia: sterowalności, obserwowalności, dominujące wartości własne [2, 3].

Sterowalność układu: układ nazywamy całkowicie sterowalnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje sterowanie $\mathbf{u}(t)$, które przeprowadza układ z dowolnego stanu początkowego $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ do dowolnego stanu końcowego $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$ w skończonym czasie $t_k - t_0$.

Obserwowalność układu: układ nazywamy całkowicie obserwowalnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona chwila $t_k > t_0$ taka, że na podstawie znajomości sterowania $\mathbf{u}(t_0, t_k]$ i odpowiedzi $\mathbf{y}(t_0, t_k]$ w skończonym przedziale $(t_0, t_k]$ można wyznaczyć stan tego układu $\mathbf{x}(t)$ w chwili $t > t_0$, przy dowolnym stanie początkowym \mathbf{x}_0 .

Dominująca wartość własna: dana wartość własna λ_k nazywa się dominującą względem innych wartości własnych λ_l , jeśli wpływa ona na wybrane charakterystyki układu bardziej niż pozostałe wartości własne.

Dla określenia obserwowalności i sterowalności układu wprowadzono odpowiednie kryteria.

Kryteria oceny sterowalności układu:

1) Układ opisany równaniami (2.1) oraz (2.2) jest sterowalny, jeśli macierz sterowalności pierwszego rodzaju

$$\mathbf{Q}_s(t_k, t_0)$$

$$\mathbf{Q}_s(t_k, t_0) = \int_{t_0}^{t_k} e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_0-\tau)} d\tau \quad (2.3)$$

jest rzędu n .

2) Układ opisany równaniami (2.1) oraz (2.2) jest sterowalny, jeśli macierz sterowalności drugiego rodzaju \mathbf{Q}_{s2}

$$\mathbf{Q}_{s2} = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (2.4)$$

jest rzędu n .

Kryteria oceny obserwowalności układu:

1) Układ opisany równaniami (2.1) oraz (2.2) jest obserwowalny, jeśli macierz obserwowalności pierwszego rodzaju

$$\mathbf{Q}_b(t_k, t_0)$$

$$\mathbf{Q}_b(t_k, t_0) = \int_{t_0}^{t_k} e^{\mathbf{A}^T(t_0-\tau)} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)} d\tau \quad (2.5)$$

jest rzędu n .

2) Układ opisany równaniami (2.1) oraz (2.2) jest obserwowalny, jeśli macierz sterowalności drugiego rodzaju

$$\mathbf{Q}_{b2}$$

$$\mathbf{Q}_{b2} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{C}\mathbf{A} \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \quad \dots \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}]^T \quad (2.6)$$

jest rzędu n .

2.1. Modalne miary sterowalności i obserwowalności układu.

Oprócz badania sterowalności i obserwowalności fizycznych zmiennych stanu oceniana jest sterowalność i obserwowalność kolejnych modów układu. W przygotowaniu i prowadzeniu badań pojazdów w ruchu oraz pojazdów i zespołów funkcjonalnych na stanowiskach symulacyjnych ogromną rolę odgrywa analiza zachodzących zjawisk w dziedzinie częstości. W celu ilościowej oceny wpływu wartości własnych na charakterystyki układu wprowadzono pojęcie miar modalnych [1, 3]. Aby układ był sterowalny (obserwowalny) wszystkie wektory własne winny być sterowalne (obserwowalne).

Określono [4], że układ jest sterowalny gdy spełniony jest związek

$$\text{rzęd}[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}, \mathbf{B}] = n \quad (2.7)$$

oraz, że układ jest obserwowalny gdy spełniony jest związek

$$\text{rzęd}[\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{E}, \mathbf{C}^T] = n \quad (2.8)$$

dla wszystkich wartości własnych λ_i macierzy stanu (\mathbf{E} jest macierzą jednostkową).

W celu przeprowadzenia modalnej analizy obserwowalności i sterowalności układu charakteryzowanego macierzą stanu, wprowadzono transformację

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z} \quad (2.9)$$

gdzie \mathbf{z} jest wektorem współrzędnych modalnych, \mathbf{V} jest macierzą transformacji, której kolumny są prawymi wektorami własnymi macierzy stanu \mathbf{A}

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] \quad (2.10)$$

Dokonując odwrócenia macierzy \mathbf{V} otrzymano macierz \mathbf{W}

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1} = [\mathbf{w}_1^T, \mathbf{w}_2^T, \dots, \mathbf{w}_n^T]^T \quad (2.11)$$

której wiersze są lewymi wektorami własnymi macierzy stanu.

Równanie stanu (2.1) w postaci modalnej ma postać

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} \quad (2.12)$$

gdzie $\mathbf{\Lambda}$ jest macierzą wartości własnych

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

a $\hat{\mathbf{B}}$ ma postać

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{W}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \hat{b}_{11} & \dots & \hat{b}_{1p} \\ \dots & & \dots \\ \hat{b}_{n1} & \dots & \hat{b}_{np} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Równanie wyjść (2.2) w postaci modalnej ma postać

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{z} \quad (2.15)$$

gdzie $\hat{\mathbf{C}}$ ma postać

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \hat{c}_{11} & \dots & \hat{c}_{1n} \\ \dots & & \dots \\ \hat{c}_{q1} & \dots & \hat{c}_{qn} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Na podstawie zależności przedstawionych w [3] wprowadzono modalne miary oceny sterowalności kb

$$kb = \frac{\mathbf{w}_i^T \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{w}_i^*}{\mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i^*} \quad (2.17)$$

obserwowalności kc

$$kc = \frac{\mathbf{v}_i^* \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i^*} \quad (2.18)$$

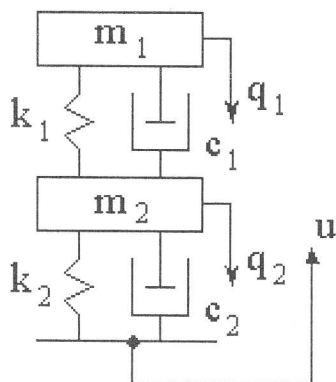
oraz miarę dominowania wartości własnych sk

$$sk = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p \left| \frac{\hat{c}_{ik} \hat{b}_{kj}}{\lambda_k} \right| \quad (2.19)$$

gdzie \mathbf{v}_i^* , \mathbf{w}_i^* są wektorami sprzężonymi do wektorów \mathbf{v}_i , \mathbf{w}_i .

3. Przykład

Badania związane z zastosowaniem przedstawionych miar oceny sterowalności, obserwowalności oraz dominowania przeprowadzono na przykładzie modelu przedstawionego na rysunku 1.



Rys. 1. Model badanego układu

Ocenie poddano trzy warianty modelu reprezentowane wektorami stanu:

$$- \mathbf{x}^I = [q_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T$$

$$- \mathbf{x}^{II} = [q_2 - q_1 \quad \dot{q}_1 \quad q_1 \quad \dot{q}_2 - \dot{q}_1]^T$$

$$- \mathbf{x}^{III} = [q_2 \quad \dot{q}_2 \quad q_2 - q_1 \quad \dot{q}_2 - \dot{q}_1]^T$$

Macierz stanu \mathbf{A}^I odpowiadająca wektorowi stanu \mathbf{x}^I ma dla przyjętych w przykładzie danych wartości własne λ^I

$$\lambda_{1,2}^I = -38,696 \pm j \cdot 32,243$$

$$\lambda_{3,4}^I = -1,872 \pm j \cdot 9,015$$

gdzie: $j = \sqrt{-1}$ (jednostka urojona)

oraz wektory własne \mathbf{v}^I

$$\mathbf{v}_{1,2}^I = \begin{bmatrix} 0,001 \pm j \cdot 0,002 \\ -0,015 \pm j \cdot 0,013 \\ -0,087 \pm j \cdot 0,036 \\ 1,000 \pm j \cdot 0,000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{3,4}^I = \begin{bmatrix} 0,022 \pm j \cdot 0,106 \\ 0,002 \pm j \cdot 0,028 \\ 1,000 \pm j \cdot 0,000 \\ 0,252 \pm j \cdot 0,054 \end{bmatrix}$$

Macierz stanu \mathbf{A}^{II} odpowiadająca wektorowi stanu \mathbf{x}^{II} ma wartości własne λ^{II}

$$\lambda_{1,2}^{II} = -38,696 \pm j \cdot 32,243$$

$$\lambda_{3,4}^{II} = -1,872 \pm j \cdot 9,015$$

oraz wektory własne \mathbf{v}^{II}

$$\mathbf{v}_{1,2}^{II} = \begin{bmatrix} -0,015 \pm j \cdot 0,013 \\ -0,081 \pm j \cdot 0,031 \\ 0,001 \pm j \cdot 0,001 \\ 1,000 \pm j \cdot 0,000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{3,4}^{II} = \begin{bmatrix} 0,022 \pm j \cdot 0,078 \\ 1,000 \pm j \cdot 0,000 \\ -0,022 \pm j \cdot 0,106 \\ -0,748 \pm j \cdot 0,054 \end{bmatrix}$$

Macierz stanu \mathbf{A}^{III} odpowiadająca wektorowi stanu \mathbf{x}^{III} ma wartości własne λ^{III}

$$\lambda_{1,2}^{III} = -38,696 \pm j \cdot 32,243$$

$$\lambda_{3,4}^{III} = -1,872 \pm j \cdot 9,015$$

oraz wektory własne \mathbf{v}^{III}

$$\mathbf{v}_{1,2}^{III} = \begin{bmatrix} -0,014 \pm j \cdot 0,011 \\ -0,919 \pm j \cdot 0,031 \\ 0,015 \pm j \cdot 0,013 \\ 1,000 \pm j \cdot 0,000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{3,4}^{III} = \begin{bmatrix} -0,003 \pm j \cdot 0,037 \\ -0,329 \pm j \cdot 0,096 \\ -0,022 \pm j \cdot 0,106 \\ 1,000 \pm j \cdot 0,000 \end{bmatrix}$$

W artykule przedstawiono wybrane wyniki badania obserwowalności układu. Badania obserwowalności przeprowadzono dla wybranych macierzy wyjść \mathbf{C} , np.

$$- \mathbf{C}_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$- \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$- \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dla oceny sterowalności układu przyjęto macierz sterowania **B** jednakową dla wszystkich wariantów modelu.

Dla przyjętych macierzy wyjść **C**, macierzy wejścia **B** i odpowiednich macierzy stanu A^I , A^{II} , A^{III} zbudowano macierze sterowalności (2.7) i obserwowalności (2.8). Stwierdzono, że badane układy są sterowalne i obserwowalne. Przykładowe wartości miar sterowalności (2.17) oraz obserwowalności (2.18) i dominowania (2.19) dla badanych wariantów zebrano w tabeli 1 dla modelu reprezentowanego wektorem stanu x^I , w tabeli 2 dla modelu reprezentowanego wektorem stanu x^{II} oraz w tabeli 3 dla modelu reprezentowanego wektorem stanu x^{III} .

Modalne miary sterowalności, obserwowalności oraz dominowania dla modelu A^I

Tabela 1

Wielkość \ Wariant mody	kb	kc	sk
$A^I BC_1$			
1,2	1,319e3	0,008	0,055
3,4	0,091e3	0,011	0,056
$A^I BC_2$			
1,2	1,319e3	0,001	0,646
3,4	0,091e3	0,012	0,704
$A^I BC_3$			
1,2	1,319e3	0,991	30,351
3,4	0,091e3	0,062	1,473

Modalne miary sterowalności, obserwowalności oraz dominowania dla modelu A^{II}

Tabela 2

Wielkość \ Wariant mody	kb	kc	sk
$A^{II} BC_1$			
1,2	0,304e3	0,001	0,642
3,4	0,077e3	0,004	0,420
$A^{II} BC_2$			
1,2	0,304e3	0,008	3,437
3,4	0,077e3	0,637	5,576
$A^{II} BC_3$			
1,2	0,304e3	0,999	35,150
3,4	0,077e3	0,988	9,023

Modalne miary sterowalności, obserwowalności oraz dominowania dla modelu A^{III}

Tabela 3

Wielkość \ Wariant mody	kb	kc	sk
$A^{III} BC_1$			
1,2	0,609e3	0,001	0,306
3,4	20,78e3	0,002	3,087
$A^{III} BC_2$			
1,2	0,609e3	0,458	15,718
3,4	20,78e3	0,105	31,512
$A^{III} BC_3$			
1,2	0,609e3	0,999	32,168
3,4	20,78e3	0,998	111,141

4. Podsumowanie

Przeprowadzone analizy numeryczne wykazały, że stosując przedstawione miary sterowalności i obserwowalności możliwe jest uzyskanie odpowiedzi na pytania: które mody poddają się łatwiej sterowaniu oraz które mody można odtworzyć łatwiej na podstawie mierzonych wielkości wyjściowych.

Badania przeprowadzone dla modelu pokazanego na rysunku, wykazały wpływ przyjęcia wektora stanu na sterowalność i obserwowalność układu. Prowadzone są badania układu o wielu stopniach swobody, co umożliwi praktyczne zastosowanie metody przedstawionej w artykule w procesie tworzenia modelu dla eksperymentu w badaniach dynamiki pojazdów szynowych.

Literatura

- [1] Barczak A., Pewne aspekty strukturalnej dekompozycji w badaniu dynamiki pojazdu, Konferencja Specjalistyczna „Postęp w Budowie, Badaniach i Eksploatacji Pojazdów Szynowych”, Warszawa 1984.
- [2] Kaczorek T., Teoria wielowymiarowych układów dynamicznych liniowych, WNT, Warszawa 1983.
- [3] Litz L., Modale Masse für Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Regelbarkeit und Dominanz – Zusammenhänge, Schwachstellen, neue Wege, Regelungstechnik 31, 1983.
- [4] Wilkinson J. H., The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford University Press, 1965.