

Wpływ asymetrii parametrycznej pojazdu szynowego na przepustowość dynamiczną wymuszeń torowych (studium metodyki badań)

W artykule przedstawiono metodykę badania wpływu asymetrii parametrycznej modelu dwuosowego pojazdu szynowego, na dynamiczną przepustowość (transmitancję) wymuszeń torowych.

Zbadano wrażliwość nadwozia pojazdu na wymuszenia torowe, wywołane asymetrią wartości wybranych parametrów geometrycznych, sztywnościowych i dyssypacyjnych. W zakończeniu przedstawiono kilka podstawowych wniosków o charakterze inżynierskim z których wynika, że parametryczna asymetria pojazdu wywiera istotny wpływ na charakterystykę jego przepustowości dynamicznej w kierunku pionowym.

1. Wprowadzenie

Pod pojęciem asymetrii parametrycznej pojazdu będziemy w niniejszym opracowaniu rozumieć występowanie zróżnicowanych wartości wielkości konstrukcyjnych (geometrii, masy, sztywności, współczynników dyssypacji i innych) po obydwóch stronach płaszczyzny symetrii pojazdu, przy określonej i niezmienniej jego strukturze konstrukcyjnej. Wystąpienie asymetrii parametrycznej może mieć charakter wolnozmienny (na przykład eksploatacyjnie niesymetryczne zużycia powierzchni trących) oraz nagły, o charakterze awaryjnym, (na przykład przemieszczenie ładunku lub pęknięcie elementu nośnego).

Pojazdy drogowe, pod względem struktury konstrukcyjnej, mają tylko jedną **płaszczyznę symetrii**: podłużną; pojazdy szynowe – najczęściej dwie: podłużną i poprzeczną. Występowanie szeroko pojmowanej asymetrii parametrycznej stanowi czynnik zagrażający eksploatacyjnemu bezpieczeństwu szybkobieżnego ruchu pojazdów szynowych. Pośród technicznie znaczących wyróżników bezpieczeństwa pojazdów podczas ruchu należy przede wszystkim wymienić wartości (statycznych i dynamicznych - zmiennych w czasie) normalnych nacisków kół na szyny oraz sił bocznych prowadzących koło po szynie. Te zaś zależą nie tylko od równomierności rozmieszczenia ładunku lecz także od symetrii rozkładu wewnętrznej struktury sprężystej i dyssypacyjnej w samym pojeździe.

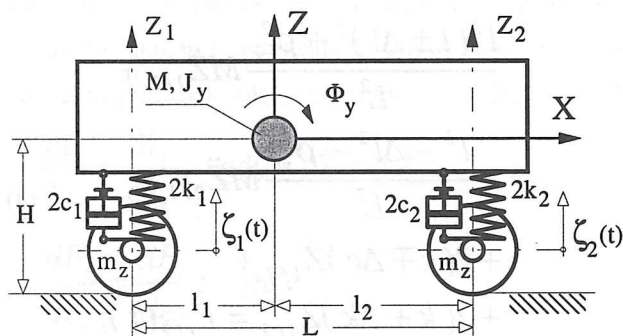
Eksploatacyjnie wywołana asymetria wartości parametrów po obydwóch stronach płaszczyzny symetrii pojazdu może (i powinna) stanowić kryterialny wyróżnik **diagnostycznego przyporządkowania** pojazdu do jednej z klas: eksploatacyjnej zdatności lub niezdatności. Jako bezwymiarową miarę asymetrii analizowanych parametrów będziemy przyjmować współczynnik $\varepsilon_x = \Delta X / X$ czyli stosunek wartości asymetryzującej odchyłki ΔX wybranego parametru x do jego wartości nominalnej X .

W dalszym ciągu, na elementarnym przykładzie modelu szynowego pojazdu dwuosowego, zostanie przedstawiona krytyka metody badania zdeterminowanej wrażliwości dynamicznej układu oraz metodyka badania wpływu asymetrii parametrycznej na dynamiczną przepustowość (transmitancję) wymuszeń torowych.

Porównując bowiem poszczególne wyróżniki wrażliwości transmitancyjnej nadwozia pojazdu na wymuszenia torowe, wywołane asymetrią wartości wybranych parametrów geometrycznych, sztywnościowych i dyssypacyjnych, możemy dokonać wyboru parametru diagnostycznego fizycznie w najsilniejszym stopniu odpowiedzialnego za bezpieczeństwo ruchu. Tym samym dokonamy wyboru najtańszej metody procesu diagnostycznego, co też stanowi jeden z celów niniejszego opracowania.

2. Model pojazdu szynowego

Model dwuosowego pojazdu szynowego, na przykładzie którego zostanie zilustrowana metodyka badania wpływu asymetrii parametrycznej pojazdu szynowego na przepustowość dynamiczną wymuszeń torowych, zaczerpnijmy wprost z pracy [2]. Model ten schematycznie przedstawiono na rysunku 1. Model matematyczny takiego pojazdu może być przedstawiony we współrzędnych $Z(t)$ i $\Phi(t)$ albo $Z_1(t)$ i $Z_2(t)$.



Rys.1 Schemat dwuosowego, podłużnie niesymetrycznego, pojazdu szynowego.

W pracy [2] wykazano wyższą użyteczność modelową współrzędnych $Z_1(t)$ i $Z_2(t)$ i te zostaną w dalszym ciągu przyjęte. We współrzędnych Z_1 i Z_2 masa zestawów m_z w ogóle nie występuje. Pionowe zaburzenia ruchu zestawów traktujemy jako znane. W praktyce mierzy je się łatwo. Ponadto, siły zaburzenia ruchu nadwozia są przyłożone na kierunku osi tych współrzędnych.

Zależności pomiędzy współrzędnymi Z i Φ_y oraz Z_1 i Z_2 , są następujące:

$$Z = \frac{l_2 Z_1 + l_1 Z_2}{L}; \quad \Phi_y = \frac{Z_1 - Z_2}{L}; \quad (1)$$

Na podstawie [2], dla przypadku drgań wymuszonych, otrzymujemy następujący model matematyczny dwuosowego pojazdu podłużnie asymetrycznego (w płaszczyźnie rysunku 1):

$$\begin{aligned} & \frac{l_2^2 + \rho_{yr}^2}{L^2} M \ddot{Z}_1 + \frac{l_1 \cdot l_2 - \rho_{yr}^2}{L^2} M \ddot{Z}_2 + \\ & + 2c_1 \dot{Z}_1 + 2k_1 Z_1 = F_1(t); \\ & \frac{l_1 \cdot l_2 - \rho_{yr}^2}{L^2} M \ddot{Z}_1 + \frac{l_1^2 + \rho_{yr}^2}{L^2} M \ddot{Z}_2 + \\ & + 2c_2 \dot{Z}_2 + 2k_2 Z_2 = F_2(t); \end{aligned} \quad (2)$$

Gdzie $F_1(t)$ i $F_2(t)$ – zewnętrzne siły wymuszające drgania pojazdu.

W równaniach (2) występuje także promień bezwładności

$$\text{nadwozia } \rho_{yr}^2 = \frac{J_y}{M};$$

Pozostałe wielkości występujące w równaniach (2) są zgodne z oznaczeniami przyjętymi na rysunku 1.

Wprowadźmy do równań (2) następujące wielkości opisujące zaburzenia wcześniej wymienionych parametrów ogólnie pojmowanej asymetrii omawianego modelu:

$$\begin{aligned} l_2 &= l + \Delta l; & k_2 &= k + \Delta k; & c_2 &= c + \Delta c; \\ l_1 &= l - \Delta l; & k_1 &= k - \Delta k; & c_1 &= c - \Delta c; \end{aligned} \quad (3)$$

Wówczas równania (2) przekształcają się do następującej postaci:

$$\begin{aligned} & \frac{l^2 (l \pm \Delta l)^2 + \rho_{yr}^2}{L^2} M \ddot{Z}_{1/2} + \\ & + \frac{l^2 - \Delta l^2 - \rho_{yr}^2}{L^2} M \ddot{Z}_{2/1} + \\ & + 2(c \mp \Delta c) \dot{Z}_{1/2} + \\ & + 2(k \mp \Delta k) Z_{1/2} = F_{1/2}(t); \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie znaki górne odpowiadają pierwszemu równaniu (2), dolne – drugiemu.

Jeżeli do równań (4) wprowadzimy bezwymiarowe współczynniki ε_j asymetrii długości „l”, sztywności „k” i tłumienia „c”, ε_j ; ($j = 1, k, c$) to otrzymamy układ wyjściowy równań modelu do badań wpływu asymetrii na przepustowość dynamiczną

$$\begin{aligned} & \frac{l^2 (1 + \varepsilon_l)^2 + \rho_{yr}^2}{L^2} M \ddot{Z}_1 + \frac{l^2 (1 - \varepsilon_l)^2 - \rho_{yr}^2}{L^2} M \ddot{Z}_2 + \\ & + 2c(1 - \varepsilon_c) \dot{Z}_1 + 2k(1 - \varepsilon_k) Z_1 = F_1(t); \\ & \frac{l^2 (1 - \varepsilon_l)^2 - \rho_{yr}^2}{L^2} M \ddot{Z}_1 + \frac{l^2 (1 + \varepsilon_l)^2 + \rho_{yr}^2}{L^2} M \ddot{Z}_2 + \\ & + 2c(1 + \varepsilon_c) \dot{Z}_2 + 2k(1 + \varepsilon_k) Z_2 = F_2(t); \end{aligned} \quad (5)$$

Zauważmy w tym miejscu, że macierze współczynników [A], [B] i [C], równań (5) w ich zapisie wektorowym (6), są symetryczne w określonym sensie. Sens formalny tej określoności zależy od stanu asymetrii obiektu fizycznego.

$$[A]\ddot{Z} + [B]\dot{Z} + [C]Z = [F] \quad (6)$$

gdzie:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix};$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix};$$

przy czym współczynniki macierzy bezwładności mają postać następującą:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{M}{L^2} [l^2 (1 + \varepsilon_l)^2 + \rho_{yr}^2]; \\ A_{12} &= \frac{M}{L^2} [l^2 (1 - \varepsilon_l^2) - \rho_{yr}^2]; \\ A_{21} &= \frac{M}{L^2} [l^2 (1 - \varepsilon_l^2) - \rho_{yr}^2]; \\ A_{22} &= \frac{M}{L^2} [l^2 (1 - \varepsilon_l)^2 + \rho_{yr}^2]; \end{aligned} \quad (7)$$

Symetria macierzy [A] współczynników równań (6) względem przekątnej głównej jest spełniona niezależnie od stanu asymetrii obiektu fizycznego. Natomiast symetria współczynników tej macierzy względem przekątnej pomocniczej jest spełniona wyłącznie w przypadku pełnej symetrii obiektu. Ogólnie jednak wyznacznik tej macierzy zawsze jest różny od zera dzięki czemu układ nie jest sprzeczny i ma rozwiązanie.

Współczynniki macierzy tłumienia i sztywności są następujące:

$$\begin{aligned} B_{11} &= 2c(1 - \varepsilon_c); & B_{12} &= 0; \\ B_{21} &= 0; & B_{22} &= 2c(1 + \varepsilon_c); \\ C_{11} &= 2k(1 - \varepsilon_k); & C_{12} &= 0; \\ C_{21} &= 0; & C_{22} &= 2k(1 + \varepsilon_k); \end{aligned} \quad (8)$$

Widzimy, że współczynniki (8) podlegają tym samym zasadom co (7). Fizyczne implikacje dynamiczne takiego stanu rzeczy zostaną przedstawione w punkcie 5 niniejszego opracowania.

3. Krytyka małej użyteczności dotychczas zastosowanych metod badania dynamicznych implikacji asymetrii parametrycznej.

We wcześniej wykonanych [1] badaniach dynamicznych implikacji asymetrii parametrycznej pojazdu szynowego korzystano z (bezwymiarowej) funkcji wrażliwości dynamicznej:

$$F_{1sen}^{i,j}(t) = \frac{\Delta X_i(t)}{X_i(t)} \cdot \frac{\Delta p_j}{p_j}; \quad \text{oraz}$$

$$F_{2sen}^{i,j}(t) = \frac{\Delta X_i(t)}{X_{max}} \cdot \frac{\Delta p_j}{p_j}; \quad (9)$$

gdzie: ΔX , Δp – przyrosty wartości odpowiednio i-tej zmiennej $x(t)$ i j-tego parametru zaburzenia symetrii p , przy czym i – numer zmiennej oraz j – numer parametru. Zmienna $x_i(t)$ może przybierać dowolnie małe wartości co prowadzi do niestateczności numerycznej. Dlatego w pracy [1] przyjęto drugą postać (9). Symulacyjne badanie wrażliwości dynamicznego układu pojazdu na geometryczną asymetrię położenia środka masy wykazało istotny wpływ tego parametru na szeroko rozumianą dynamikę ruchu pojazdu i jego oddziaływania na tor. Fakt ten stanowi zachętę do pogłębionej analizy.

Można również mówić o zastosowaniu wymiarowej funkcji wrażliwości w badaniach porównawczych dynamiki pojazdu:

$$F_{Xsen}^{i,j}(t) = \frac{\Delta X_i(t)}{\Delta p_j} \cdot \frac{p_j}{p_j}; \quad (10)$$

W takim ujęciu możemy porównywać relatywne przyrosty wartości zmiennych (na przykład sił nacisku kół na szyny) wywołane różnymi względnymi zaburzeniami wartości parametrów.

4. Dynamiczna wrażliwość parametryczna modelu

Wszystkie człony równań (5) mają wymiar siły. Stosując wymiarowe ujęcie (10) wrażliwości istnieje symulacyjna możliwość porównania wpływu współczynników zaburzeń

wartości względnych poszczególnych parametrów (długości, sztywności i tłumienia) pojazdu na dynamikę jego oddziaływań na tor. Takie porównanie odpowiadałoby na następujące pytania inżynierskie:

- Względna zmienność którego parametru (długości, sztywności i tłumienia) wywiera najsilniejszy wpływ na dynamikę określonych oddziaływań?
- Czy można wyznaczyć formalne warunki wyrównanej parametrycznej wrażliwości dynamicznej (warunki parametrycznej equisensytywności)? Jeżeli tak, to jakie one są?
- Czy wrażliwość układu na zaburzenia wartości jednorodnych parametrów jest jednakowa w obydwie strony (przyrost – spadek)?

Poszukując odpowiedzi na powyższe pytania zróżniczkujemy (5) kolejno względem ε_l , ε_c oraz ε_k , traktowanych jako stałe parametry stanu, pamiętając o zależności geometrycznej $l=L/2$.

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{d\varepsilon_l} &= \frac{M}{2} [(1 + \varepsilon_l) \ddot{Z}_1 - \varepsilon_l \ddot{Z}_2]; \\ \frac{dF_1}{d\varepsilon_c} &= -2c\dot{Z}_1; \quad \frac{dF_1}{d\varepsilon_k} = -2kZ_1; \\ \frac{dF_2}{d\varepsilon_l} &= -\frac{M}{2} [(1 - \varepsilon_l) \ddot{Z}_2 + \varepsilon_l \ddot{Z}_1]; \\ \frac{dF_2}{d\varepsilon_c} &= 2c\dot{Z}_2; \quad \frac{dF_2}{d\varepsilon_k} = 2kZ_2; \end{aligned} \quad (11)$$

Odpowiedź na drugie z wyżej postawionych pytań jest, w rozważanej problematyce, kluczowa.

Porównując stronami odpowiednio sześć wyrażeń (11) opisujących pochodne sił względem współczynników asymetrii długości, tłumienia i sztywności, otrzymujemy formalnie pięć następujących warunków względności:

$$\frac{dF_i}{d\varepsilon_c} = \frac{dF_i}{d\varepsilon_k}; \quad \text{gdy} \quad c\dot{Z}_i = kZ_i; \quad (i=1,2) \quad (12a)$$

$$\frac{dF_1}{d\varepsilon_c} = \frac{dF_1}{d\varepsilon_l}; \quad \text{gdy} \quad -2c\dot{Z}_1 = \frac{M}{2} [\ddot{Z}_1(1 + \varepsilon_l) - \ddot{Z}_2\varepsilon_l]; \quad (12b)$$

$$\frac{dF_1}{d\varepsilon_k} = \frac{dF_1}{d\varepsilon_l}; \quad \text{gdy} \quad -2k\dot{Z}_1 = \frac{M}{2} [\ddot{Z}_1(1 + \varepsilon_l) - \ddot{Z}_2\varepsilon_l]; \quad (12c)$$

$$\frac{dF_1}{d\varepsilon_k} = \frac{dF_2}{d\varepsilon_l}; \quad \text{gd}y$$

$$-2kZ_1 = -\frac{M}{2} [\ddot{Z}_2(1 - \varepsilon_l) + \ddot{Z}_1 \varepsilon_l]; \quad (12d)$$

Warunki (12) możemy przedstawić – odpowiednio – w postaci następujących transformat Fouriera:

$$+j\omega h = \Omega^2; \quad (13a)$$

$$4hZ_1 j\omega = \omega^2 [(1 + \varepsilon_l)Z_1 - Z_2 \varepsilon_l]; \quad (13b)$$

$$j\omega 4Z_1 \Omega^2 = \omega^2 [(1 + \varepsilon_l)Z_1 - Z_2 \varepsilon_l]; \quad (13c)$$

$$-4Z_1 \Omega^2 = \omega^2 [(1 - \varepsilon_l)Z_2 + Z_1 \varepsilon_l]; \quad (13d)$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

$$\frac{c}{M} = h; \quad \frac{k}{M} = \Omega^2; \quad (14)$$

natomiast „ Z_i ” w wyrażeniach (13), począwszy od tego miejsca, stanowi (umowny) zapis fourierowskich transformat zmiennych Z_i występujących w równaniach (12).

Wyznaczając stosunek Z_2/Z_1 na mocy (13d), dochodzimy do odpowiednich zapisów:

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{-(4\Omega^2 + \varepsilon_l \omega^2)}{\omega^2(1 - \varepsilon_l)}; \quad (15)$$

co w dwóch skrajnych przypadkach drgań „czysto” postępowych ($Z_1 = Z_2$) i drgań „czystego” galopowania ($Z_1 = -Z_2$), prowadzi – odpowiednio – do następujących warunków:

$$4\Omega^2 = -\omega^2(1 + 2\varepsilon_l); \quad (16)$$

oraz

$$4\Omega^2 = \omega^2(1 + 2\varepsilon_l); \quad (17)$$

Wzory (16) i (17) stanowią informację (o charakterze poznawczym) iż stosunek częstości własnej drgań postępowych Ω , według (14), do częstości wymuszenia ω jest zależny od jednakowego zaburzenia $\varepsilon_l = \varepsilon_k$ (geometrii i sztywności) układu w sposób osobliwy: przy drganiach „czysto” postępowych zmienia się w funkcji ε_l , zaś przy galopowaniu jest stały. Nie wpływają z tego żadne konkluzje technicznie jednoznacznie interpretowalne. Możemy jedynie odpowiedzieć na postawione na początku niniejszego podrozdziału pytania:

- wpływy parametrów asymetrii sztywności i długości na dynamikę pojazdu są porównywalne lecz nie proporcjonalne wprost;

- warunki ekwisytywności parametrycznej można formalnie wyznaczyć lecz ich użyteczność techniczna nie jest oczywista;
- wrażliwość układu na zaburzenia wartości jednorodzących parametrów ogólnie nie jest dynamicznie symetryczna „w obydwie strony” (różne są następstwa zaburzeń parametrów w kierunkach wzrost – spadek).

Powyższe odpowiedzi informują nas o tym, że przy specjalnym doborze częstości wymuszenia ω , ekwisytywność wpływu współczynników asymetrii długości i asymetrii sztywności może być w sposób szczególny spełniona. Taka osobliwość nie daje żadnych podstaw do konstruktywnego wnioskowania technicznego.

W świetle powyższego nie będziemy dalej analizować warunków (12a) i (12b) wpływających z zastosowania formalnej metody wrażliwości (do badania dynamicznych implikacji asymetrii parametrycznej) lecz przejdziemy do zastosowania ogólniejszej metody analizy widmowej.

5. Wrażliwość transmitancyjna modelu na sygnał losowy.

Zachowując ważność zapisu (14) możemy równania dla przypadku ustalonego procesu dynamicznego (5) przedstawić w następującej postaci transformat Fouriera:

$$-\frac{l^2(1 + \varepsilon_l)^2 + \rho_{yr}^2}{L^2} Z_1 \omega^2 - \frac{l^2(1 - \varepsilon_l^2) - \rho_{yr}^2}{L^2} Z_2 \omega^2 +$$

$$+ 2h(1 - \varepsilon_c) Z_1 j\omega + 2\Omega^2(1 - \varepsilon_c) Z_1 = \mathfrak{S} \left[\frac{F_1(t)}{M} \right]; \quad (18)$$

$$-\frac{l^2(1 - \varepsilon_l^2) - \rho_{yr}^2}{L^2} Z_1 \omega^2 - \frac{l^2(1 + \varepsilon_l)^2 + \rho_{yr}^2}{L^2} Z_2 \omega^2 +$$

$$+ 2h(1 + \varepsilon_c) Z_2 j\omega + 2\Omega^2(1 + \varepsilon_c) Z_2 = \mathfrak{S} \left[\frac{F_2(t)}{M} \right];$$

albo to samo w zapisie macierzowym:

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1(j\omega) \\ Z_2(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_1(j\omega) \\ \mathfrak{S}_2(j\omega) \end{bmatrix} \quad (19)$$

gdzie, według oznaczeń (7) i (8):

$$E_{11} = \frac{1}{M} [-\omega^2 A_{11} + j\omega B_{11} + C_{11}];$$

$$E_{12} = \frac{1}{M} [-\omega^2 A_{12}];$$

$$E_{21} = \frac{1}{M} [-\omega^2 A_{21}]; \quad (20a)$$

$$E_{22} = \frac{1}{M} [-\omega^2 A_{22} + j\omega B_{22} + C_{22}];$$

$$\mathfrak{S}_1(j\omega) = \mathfrak{S} \left[\frac{F_1(t)}{M} \right];$$

oraz:

$$\mathfrak{S}_2(j\omega) = \mathfrak{S} \left[\frac{F_2(t)}{M} \right]; \quad (20b)$$

Zauważmy, że macierz $[E]$ jest symetryczna względem przekątnej głównej lecz współczynniki leżące na tej przekątnej są jednakowe tylko wtedy, gdy współczynniki asymetrii ε_j ($j=1,c,k$) są równe zero. Ponadto, wyznacznik D tej macierzy zawsze jest różny od zera, dzięki czemu układ nie jest sprzeczny i ma rozwiązania ze względu na $D_r \neq 0$; ($r=1,2$).

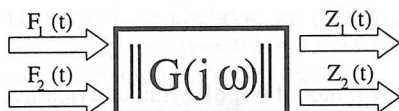
$$D = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix};$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \mathfrak{S}_1 & E_{12} \\ \mathfrak{S}_2 & E_{22} \end{vmatrix}; \quad (21a)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} E_{11} & \mathfrak{S}_1 \\ E_{21} & \mathfrak{S}_2 \end{vmatrix};$$

$$Z_1 = \frac{D_1}{D}; \quad Z_2 = \frac{D_2}{D}; \quad (21b)$$

Omawiany tu przykładowy model [2] pojazdu ma dwa "wejścia" i dwa "wyjścia" sygnałów dynamicznych.



Rysunek 2. Ilustracja dynamicznej przepustowości omawianego modelu pojazdu.

W tym miejscu zauważmy, że macierz transmitancji widmowej oraz widmowe ścieżki transmitancyjne rozważanego obiektu (według rysunku 2) mają (odpowiednio) następujące postacie szczegółowe [2]:

$\|G(j\omega)\|$ - macierz transmitancji widmowej układu.

$$\|G(j\omega)\| = \begin{vmatrix} G_{11}(j\omega) & G_{12}(j\omega) \\ G_{21}(j\omega) & G_{22}(j\omega) \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} Z_1(j\omega) \\ Z_2(j\omega) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_{11}(j\omega) & G_{12}(j\omega) \\ G_{21}(j\omega) & G_{22}(j\omega) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathfrak{S}_1(j\omega) \\ \mathfrak{S}_2(j\omega) \end{vmatrix}; \quad (22)$$

gdzie wyrazy G_{ij} opisują poszczególne widmowe ścieżki transmitancyjne:

$$G_{11} = \frac{Z_1(j\omega)}{\mathfrak{S}_1(j\omega)} \Big|_{\mathfrak{S}_2=0}; \quad G_{21} = \frac{Z_2(j\omega)}{\mathfrak{S}_1(j\omega)} \Big|_{\mathfrak{S}_2=0};$$

$$G_{12} = \frac{Z_1(j\omega)}{\mathfrak{S}_2(j\omega)} \Big|_{\mathfrak{S}_1=0}; \quad G_{22} = \frac{Z_2(j\omega)}{\mathfrak{S}_2(j\omega)} \Big|_{\mathfrak{S}_1=0}; \quad (23)$$

Zgodnie z (21) i (23) możemy napisać odpowiednio dla przypadków $\mathfrak{S}_1=0$ oraz $\mathfrak{S}_2=0$:

$$Z_1(j\omega) \Big|_{\mathfrak{S}_1=0} = \frac{D_{1|\mathfrak{S}_1=0}}{D} = \frac{1}{D} [-\mathfrak{S}_2 E_{21}];$$

$$Z_2(j\omega) \Big|_{\mathfrak{S}_2=0} = \frac{D_{2|\mathfrak{S}_2=0}}{D} = \frac{1}{D} [-\mathfrak{S}_1 E_{12}]; \quad (24a)$$

zatem:

$$G_{12} = -\frac{E_{21}}{D}; \quad \text{oraz:}$$

$$G_{21} = -\frac{E_{12}}{D}; \quad (24b)$$

i podobnie dla pozostałych dwóch ścieżek:

$$Z_1(j\omega) \Big|_{\mathfrak{S}_2=0} = \frac{D_{1|\mathfrak{S}_2=0}}{D} = \frac{1}{D} [\mathfrak{S}_1 E_{22}];$$

$$Z_2(j\omega) \Big|_{\mathfrak{S}_1=0} = \frac{D_{2|\mathfrak{S}_1=0}}{D} = \frac{1}{D} [\mathfrak{S}_2 E_{11}]; \quad (24c)$$

zatem:

$$G_{11} = \frac{E_{22}}{D}; \quad \text{oraz:}$$

$$G_{22} = \frac{E_{11}}{D}; \quad (24d)$$

Z wzorów (24b) i (24d) wynika, że poszczególne wyrazy macierzy transmitancji (22) możemy otrzymać wprost z (24), gdyż znamy (20).

$$\|G(j\omega)\| = \begin{vmatrix} G_{11}(j\omega) & G_{12}(j\omega) \\ G_{21}(j\omega) & G_{22}(j\omega) \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} E_{22} & -E_{21} \\ -E_{12} & E_{11} \end{vmatrix} = 1; \quad (25)$$

W tym miejscu, zgodnie z rysunkiem 1, szczególnie czytelnie ujawnia się fizyczna interpretacja wyrazów przekątnej macierzy (25) jako dwóch ścieżek przepustowości: „odpowiedź 1 na wymuszenie 1” oraz „odpowiedź 2 na wymuszenie 2”. Istnieje więc oczywista możliwość wykorzystania - zależnych od współczynników asymetrii ε_i ($i=l,k,c$) - zmian postaci wyrazów przekątnej głównej macierzy transmitancji $\|G(j\omega)\|$.

Wyrazy macierzy układu ogólnie niesymetrycznego, w stosunku do szczególnych postaci wyrazów odpowiadających układowi ściśle symetrycznemu, określają współczynniki dynamicznych zmian przepustowości widmowych μ_{ij} zależnych od wartości parametrów asymetrii układu.

Przykładowo, dla przekątnej macierzy (według 25):

$$\mu_{ij} = \frac{G_{ij|\varepsilon \neq 0}}{G_{ij|\varepsilon = 0}} = \frac{E_{ij|\varepsilon \neq 0}}{E_{ij|\varepsilon = 0}}; \quad (i=j) \quad (26a)$$

Relacje (26a) stanowią (macierzowo „przekątnie” pojmowane) ścieżki przepustowości bezpośredniej (i -ta reakcja na i -te wymuszenie gdyż $i=j$). Ogólnie jednak możemy wyznaczyć współczynniki wszystkich ścieżek transmitancyjnych według (25), zgodnie z rysunkiem 2.

$$\mu_{ij} = \frac{G_{ij|\varepsilon \neq 0}}{G_{ij|\varepsilon = 0}} = \frac{E_{ij|\varepsilon \neq 0}}{E_{ij|\varepsilon = 0}}; \quad (26b)$$

W wyrażeniu (26b) wielkość ε ogólnie symbolizuje ε_i ($i=l,k,c$).

Przykładowo, zespolona postać μ_{11} według (26b) jest następująca:

$$\mu_{11}(j\omega) = \frac{-\frac{\omega^2}{L^2} [l^2(1-\varepsilon_l)^2 + \rho_{yr}^2] + 2hj\omega(1+\varepsilon_c) + 2\Omega^2(1-\varepsilon_k)}{-\frac{\omega^2}{L^2} (l^2 + \rho_{yr}^2) + 2hj\omega + 2\Omega^2} \quad (26c)$$

W praktyce interesują nas moduły współczynników ścieżek transmitancyjnych. Wyznaczenie tych modułów (26c) jest już działaniem elementarnym.

W szczególnym przypadku technicznym, jakim jest - przedstawiony na rysunku 1 - pojazd dwuosiowy, interpretacyjnie całkowicie panując nad procesem przepustowości dynamicznej, możemy też, na podstawie (26b), na przykład badać stosunki dynamicznych przepustowości typu $G_{ij}/G_{i+1,j+1}$:

$$\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}} = \frac{G_{ij|\varepsilon \neq 0}}{G_{i+1,j+1|\varepsilon \neq 0}} = \frac{G_{11}}{G_{22}} = \frac{E_{22}}{E_{11}}; \quad (27)$$

Dla układu o dwóch stopniach swobody mamy jedną relację (27), której (przykładowa) jawna postać zespolona ze względu na wszystkie tu rozpatrywane współczynniki asymetrii, przedstawia się następująco:

$$\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}} = \frac{-\frac{\omega^2}{L^2} [l^2(1-\varepsilon_l)^2 + \rho_{yr}^2] + 2hj\omega(1+\varepsilon_c) + 2\Omega^2(1+\varepsilon_k)}{-\frac{\omega^2}{L^2} [l^2(1+\varepsilon_l)^2 + \rho_{yr}^2] + 2hj\omega(1-\varepsilon_c) + 2\Omega^2(1-\varepsilon_k)}; \quad (28)$$

Stosunki współczynników dynamicznych przepustowości typu (27) i (28) są trudniejsze do szczegółowego badania i poprawnej technicznej interpretacji aniżeli same współczynniki przepustowości typu (26b).

Ponadto, liczba możliwych relacji typu (27) bardzo silnie rośnie wraz z liczbą stopni swobody badanego obiektu:

$$K = \frac{n!}{2(n+2)!}; \quad n \geq 2; \quad (29)$$

Jednakże relacje (27) mają (bardziej niż 26b) wszechstronny charakter ze względu na możliwość zbadania technicznej kwantyfikacji transmitancyjnej ekwisytywności różnych parametrów. Techniczna kwantyfikacja ma poważne znaczenie w ustalaniu kryterialnie dopuszczalnych współczynników asymetrii w procesie diagnostyki ze względu na bezpieczeństwo ruchu pojazdu.

Przykładowo, moduł współczynnika dynamicznych zmian przepustowości widmowej μ_{11} , wywołanej asymetrią modelu pojazdu, według postaci ogólnej (26b) i postaci szczegółowej (26c) przedstawia się jak poniżej.

- postać widma zespolonego współczynnika zmian przepustowości:

$$\mu_{11}(j\omega) = \frac{Aj\omega + B}{Cj\omega + D}; \quad (30a)$$

gdzie:

$$A = 2h(1 + \varepsilon_c); \quad B = 2\Omega^2(1 - \varepsilon_k) - \omega^2 \frac{l^2(1 - \varepsilon_l)^2 + \rho_{yr}^2}{L^2}; \quad (30b)$$

$$C = 2h; \quad D = 2\Omega^2 - \omega^2 \frac{l^2 + \rho_{yr}^2}{L^2};$$

- widmowa postać rzeczywista modułu współczynnika zmian przepustowości:

$$|\mu_{11}(\omega)| = \frac{\sqrt{\pm A^2 C^2 \omega^4 \pm (4ABCD - B^2 C^2 - A^2 D^2) \omega^2 \pm D^2 B^2}}{-C^2 \omega^2 + D^2}; \quad (31)$$

Z (31), na mocy (30b) wynika, że dla przypadku $\varepsilon_i = 0$,

$$\mu_{11} = 1.$$

Zauważmy, że zmiennymi miary

$$|\mu_{ij}| = \mu_{ij}(\omega, \varepsilon_l, \varepsilon_c, \varepsilon_k) \text{ są, w naszym przypadku, cztery wielkości.}$$

W pojeździe symetrycznym $\mu = 1$. Zadanie badawcze powinno więc przede wszystkim zawierać wyniki obliczeń modułów współczynników dynamicznych

zmian przepustowości widmowej $|\mu_{ij}|$ typu (26b). Stosunki modułów tych współczynników dynamicznych przepustowości typu (27) mogą jednakże stanowić wartościowy badawczy materiał uzupełniający.

6. Konkluzje praktyczne

Badanie wpływu asymetrii parametrycznej pojazdu na przepustowość dynamiczną wymuszeń torowych powinno przede wszystkim zawierać wykresy widmowe

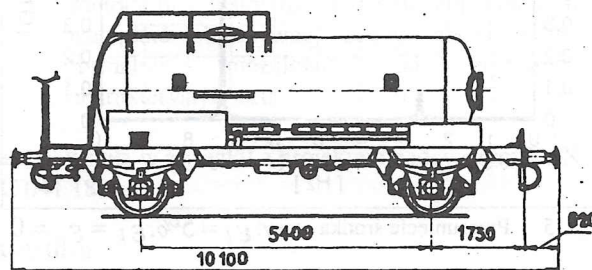
$|\mu_{ij}| = \mu_{ij}(\omega, \varepsilon_l, \varepsilon_c, \varepsilon_k)$, sporządzone przy różnych przyjętych wartościach ε_i ($i=l, c, k$), dla następujących przykładowych przypadków:

Przykładowe przypadki obliczeniowe $ \mu $		
$\varepsilon_l = 0,05; 0,1; 0,2;$	$\varepsilon_l = 0$	$\varepsilon_l = 0$
$\varepsilon_c = 0$	$\varepsilon_c = 0,05; 0,1; 0,2;$	$\varepsilon_c = 0$
$\varepsilon_k = 0$	$\varepsilon_k = 0$	$\varepsilon_k = 0,05; 0,1; 0,2;$

Dalszym etapem badań może być badanie stosunków wyznaczonych modułów dynamicznych przepustowości.

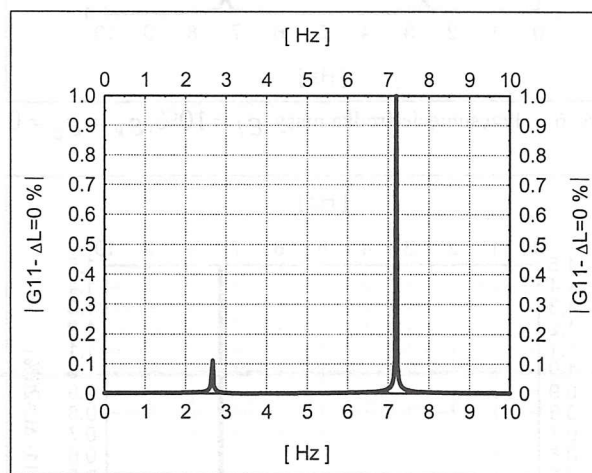
7. Przykład obliczeniowy

Do obliczeń wzięta została cysterna dwuosiowa [3]. Wymiary geometryczne cysterny przedstawiono na rys.3, zaś pozostałe parametry są następujące: masa cysterny wynosi 10000 kg, $\rho_{yr}^2 = 1$. Sztywność pionowa zawieszenia wynosi $0,7 \cdot 10^6$ [N/m], tłumienie $4 \cdot 10^4$ [Ns/m].

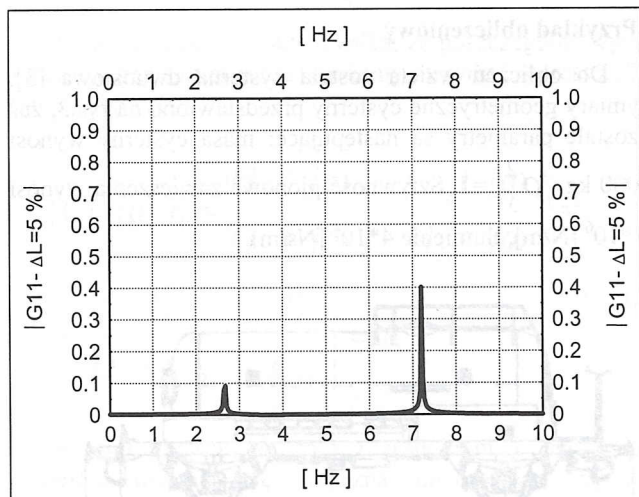


Rys. 3 Cysterna dwuosiowa [3]

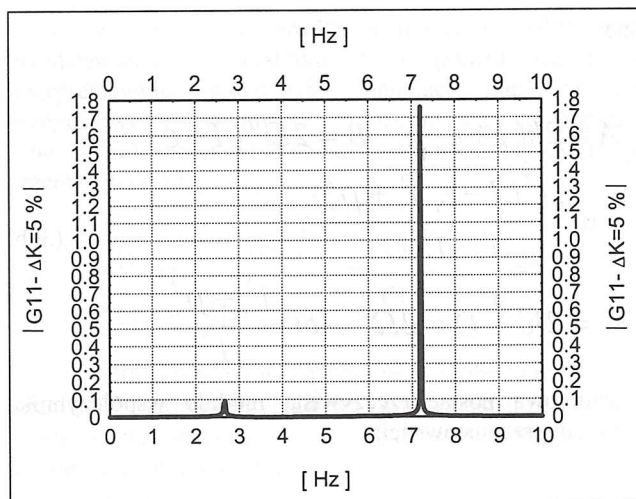
Analizę wykonano uwzględniając zmienność parametrów $\varepsilon_l, \varepsilon_k, \varepsilon_c$ w zakresie od 5% do 30%. Wyniki, w postaci modułów transmitancji widmowych, przedstawiono na rysunkach niżej. Wzorzec stanowi przypadek symetryczny, w którym maksymalne wartości modułu transmitancji unormowano do jedynki (rys.4), a odchyłki $\varepsilon_l, \varepsilon_k, \varepsilon_c$ wszystkich parametrów są zerowe. Pozostałe wyniki obliczeń odniesione zostały do przypadku symetrycznego.



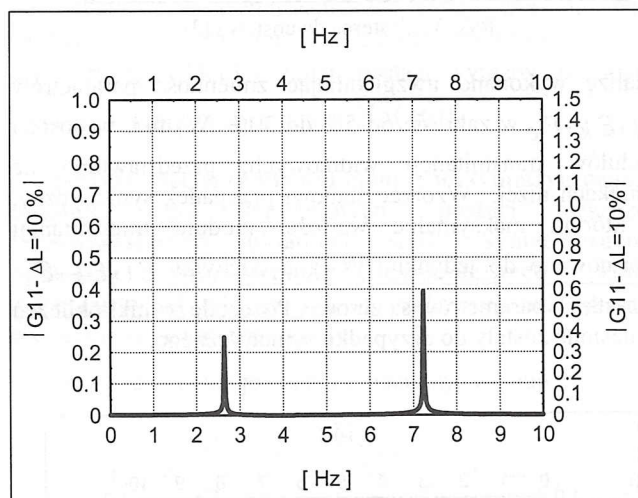
Rys. 4 Przypadek symetryczny (unormowany)



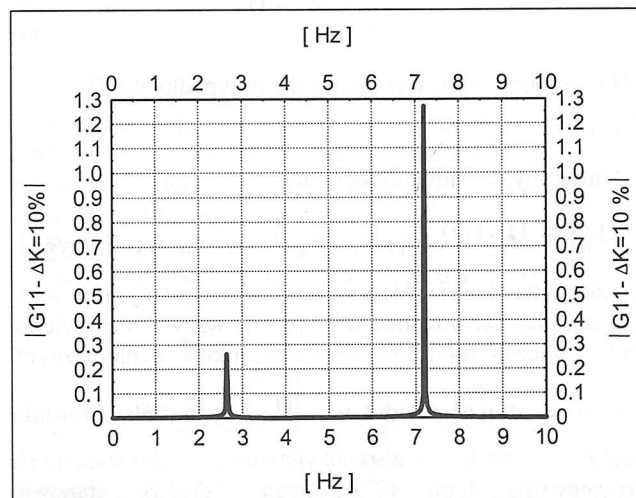
Rys. 5 Przesunięcie środka masy: $\varepsilon_l = 5\%$, $\varepsilon_k = \varepsilon_c = 0$



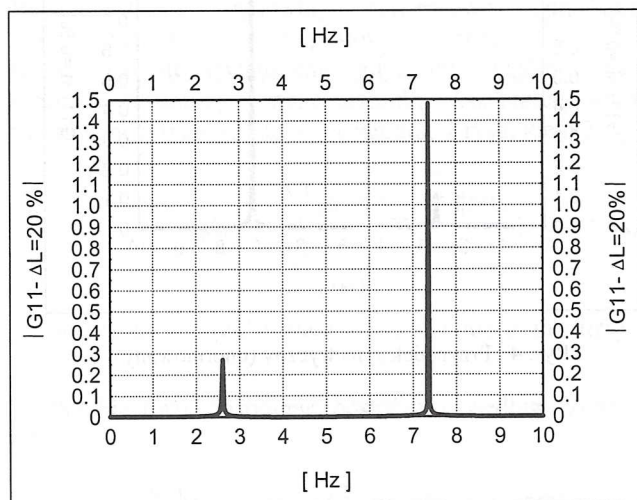
Rys. 8 Zaburzenie sztywności pionowej: $\varepsilon_l = 0$, $\varepsilon_k = 5\% \varepsilon_c = 0$



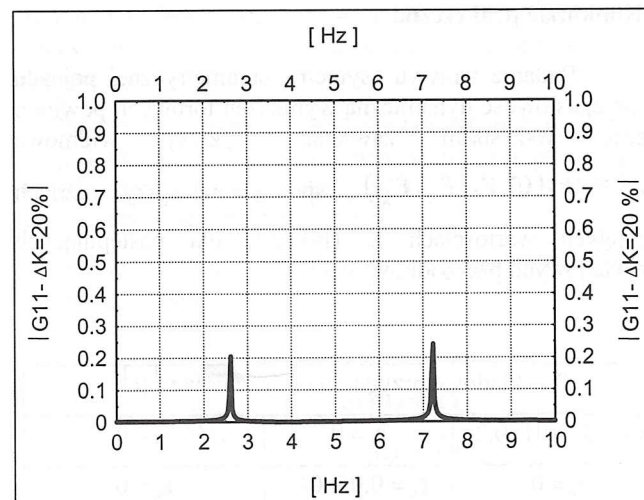
Rys. 6 Przesunięcie środka masy: $\varepsilon_l = 10\%$, $\varepsilon_k = \varepsilon_c = 0$



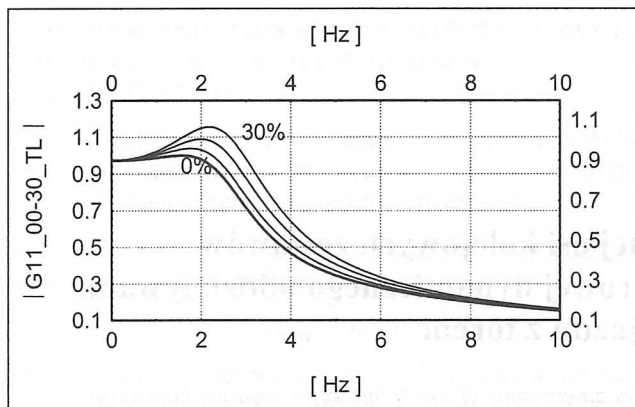
Rys. 9 Zaburzenie sztywności pionowej: $\varepsilon_l = 0$, $\varepsilon_k = 10\% \varepsilon_c = 0$



Rys. 7. Przesunięcie środka masy: $\varepsilon_l = 20\%$, $\varepsilon_k = \varepsilon_c = 0$



Rys. 10 Zaburzenie sztywności pionowej: $\varepsilon_l = 0$, $\varepsilon_k = 20\% \varepsilon_c = 0$



Rys.11 Zaburzenie tłumienia
pionowego: $\varepsilon_l = 0, \varepsilon_k = 0, \varepsilon_c = 0 \div 30\%$

Uzyskane wyniki obliczeń upoważniają do wysunięcia kilku podstawowych wniosków o charakterze inżynierskim:

- 1) Pojazd symetryczny posiada własną charakterystykę w postaci modułu transmitancji widmowej – rys.4.
- 2) Wprowadzenie zaburzenia badanego parametru (położenie środka masy, zmiana sztywności, zmiana tłumienia) zmienia charakterystykę wzorcową.
- 3) Zmiany charakterystyk zaburzonych, w stosunku do charakterystyki wzorcowej są na tyle duże, że można je z powodzeniem zidentyfikować. Wymaga to jednak wygenerowania odpowiednio dużej liczby przypadków obliczeniowych.
- 4) Parametryczna asymetria pojazdu wywiera istotny wpływ na charakterystykę jego przepustowości dynamicznej w kierunku pionowym.
- 5) Można oczekiwać, iż zarówno w płaszczyźnie poprzecznej (yz), jak też w płaszczyźnie poziomej

(xy) wpływ asymetrii okaże się równie wyrazisty (badania w toku).

- 6) Najbardziej ilościowo identyfikowalne są zaburzenia asymetrii geometrycznej (położenie środka masy) oraz sztywnościowej. Niniejszy wniosek wskazuje na skuteczność i użyteczność techniczną diagnostyki wibracyjnej taboru w perspektywie zastosowań zwłaszcza do taboru szybkobieżnego.
- 7) Metoda przepustowości dynamicznej stanowi proste narzędzie obiektywnej oceny taboru, gdyż jest formalnie niezależna od dynamicznych charakterystyk toru.

Praca powstała w związku z projektem badawczym KBN 9T 12C 041 18

Literatura

- [1] Choromański W., Madej J., Zboiński K.: *Dynamics of non-symmetric railway vehicles. 17-th. IAVSD Symposium on dynamics of vehicles on roads and tracks, 20-24 August 2001, Lyngby, Denmark (Poster presentation).*
- [2] Jerzy Madej: *Dynamiczne implikacje strukturalnej i parametrycznej asymetrii w pojazdach szynowych. XIV Konferencja POJAZDY SZYNOWE Kraków - Arłamów 9-13 października 2000 Druk w materiałach konferencji, stron 14. Także Zeszyty Instytutu Pojazdów 4(39)/2000.*
- [3] W.Grzesikiewicz, J.Osiecki, J.Piotrowski.: *Podstawy dynamiki pojazdów szynowych. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1974.*