

Drgania wymuszone wirującego koła kolejowego z niewyważeniami

Praca poświęcona jest analizie drgań wymuszonych wirującego koła kolejowego z niewyważeniami o ciągłym rozkładzie masy. Wymuszenie przyjmuje się w postaci wirujących skupionych sił radialnej i stycznej przyłożonych w punkcie odpowiadającym punktowi styku koła z szyną. Odpowiedzi układu, którego model matematyczny stanowi sześć równań różniczkowych cząstkowych poszukuje się metodą Fouriera.

1. WSTĘP

Wyniki teoretycznych i doświadczalnych badań oddziaływania koła i szyny wykazują [1], [2], że obciążenia dynamiczne szyn i kół już przy wzroście prędkości jazdy z 100 km/h do 120 km/h wzrastają kilkakrotnie. Otrzymywane niekiedy niewłaściwe wyniki badań teoretycznych związane są z modelowaniem kół, zestawów kołowych i szyn jako brył sztywnych, co w analizie dynamicznej w średnim i wysokim zakresie prędkości (od 160 km/h) i częstości (od 50 Hz) jest zbyt dalekim uproszczeniem. W celu istotnego poprawienia dokładności modelowania, efektywności i stabilności numerycznej proponuje się wykorzystać analityczny model koła.

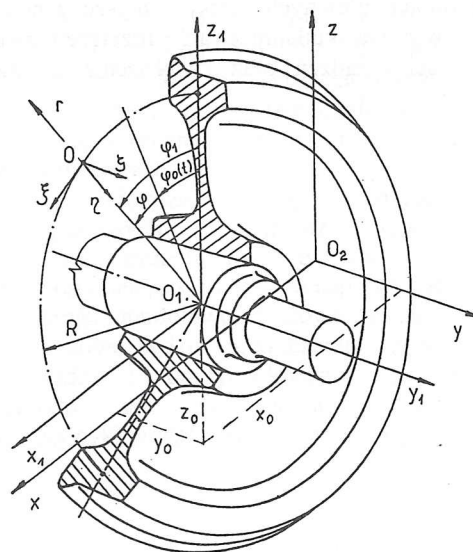
Wirujące koło kolejowe jest modelowane układem przestrzennym składającym się z wieńca jako zakrzywionej belki oraz tarczy modelowanej inercyjnym podłożem sprężystym. Proponowany model uwzględnia niewyważone masy wieńca i tarczy koła. Niewyważenia o ciągłym rozkładzie masy są skutkiem dopuszczalnych tolerancji wymiarowych w procesie wytwarzania kół i mogą być przesunięte w fazie. Powoduje to sprzężenie drgań pomiędzy formami własnymi, co może być przyczyną niestatecznego ruchu obrotowego (drgania samowzбудne) i bezpośrednio wpływać na zjawisko poligonizacji i korrugacji kół kolejowych. Z drugiej strony, przy stałej prędkości obrotowej koła, przesunięcie fazowe niewyważenia wieńca i tarczy jest źródłem wymuszeń dynamicznych o określonych częstotliwościach. Równocześnie koło wykazujące cechy poligonizacji lub współpracujące z skorrugowaną szyną doznaje wymuszeń kinematycznych objawiających się drganiami jego środka ciężkości. W efekcie tego, w ruchu tocznym koła jest prawdopodobny wzrost wartości amplitud drgań czego bezpośrednim skutkiem jest zwiększona emisja hałasu do otoczenia. W skrajnym przypadku może zostać naruszone kryterium bezpieczeństwa jazdy.

2. FIZYCZNY MODEL KOŁA, UKŁADY WSPÓLRZĘDNYCH, NIEWYWAŻENIA

Proponuje się model, w którym wieńiec koła kolejowego jest modelowany jako sprężysta zakrzywiona belka Timoshenki połączona z osią ciągłym inercyjnym podłożem sprężystym typu Winklera o charakterystyce liniowej. Podłoże sprężyste tworzy tarczę koła. Do rozważań przyjęto koło wirujące wokół osi y_1 , którego środek O_1 może dodatkowo przemieszczać się względem osi x, y, z odpowiednio o wartość x_0, y_0, z_0 . Środek koła O_1 pokrywa się

ze środkiem krzywizny osi obrotu. Na rys.1 pokazano układy współrzędnych wykorzystywanych do matematycznego opisu modelu:

- biegunowe układy współrzędnych r, φ i r, φ_1 o biegunie w środku koła O_1 , układ r, φ jest sztywno związany z wirującym kołem
- prostokątny prawoskrętny układ ξ, η, ζ , którego początek O leży na geometrycznej osi wieńca, a jego początek określony jest zmienną przestrzenną φ lub φ_1 ; wykorzystywany do opisu przemieszczeń, sił wewnętrznych i kształtu przekroju poprzecznego wieńca,
- prostokątny prawoskrętny układ x_1, y_1, z_1 o początku O_1 powstały w wyniku translacji układu x, y, z . Płaszczyzna x_1, z_1 jest płaszczyzną geometrycznej osi wieńca,



Rys. 1. Układy współrzędnych

Przez geometryczną oś wieńca (o promieniu krzywizny R) rozumie się miejsce geometryczne środków ciężkości przekrojów poprzecznych nieodkształconego wieńca koła.

Przy modelowaniu niewyważenia koła przyjęto następujące podstawowe założenia:

- niewyważenia są skutkiem ciągłego nierównomiernego rozkładu masy,
- niewyważenia mogą występować na wieńcu i tarczy koła,
- niewyważenia wieńca i tarczy mogą być różne i przesunięte w fazie,
- pomija się niewyważenia piasty koła i podpieraćia osi (małe przyspieszenia względne),

- rozkład niewyważień na obwodzie koła ma charakter harmoniczny,
- geometryczna oś nieodkształconego wieńca koła jest krzywą płaską.

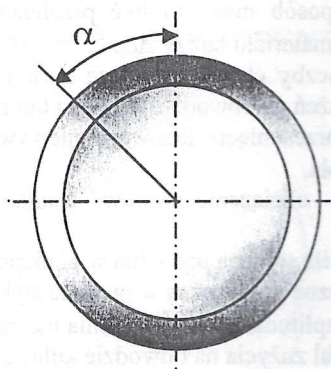
W rzeczywistości niewyważenia koła są skutkiem dopuszczalnych tolerancji wymiarowych, które powstają w procesie wytwarzania np. tolerancja szerokości wieńca, grubości tarczy koła. Mogą być one w łatwy sposób przeliczone na lokalną zmianę gęstości materiału.

Przyjęcie dwóch ostatnich założeń prowadzi do wniosku, że niewyważenia modeluje się w sposób przybliżony jako harmoniczną zmianę na obwodzie koła gęstości materiału wieńca lub tarczy, co można zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho + \Delta\rho \cos k\varphi \\ \rho_2 &= \rho_1 + \Delta\rho_1 \cos(l\varphi + \alpha) \end{aligned} \quad (1)$$

Gdzie odpowiednio:

- ρ_1, ρ_2 - gęstość materiału wieńca i tarczy koła,
- ρ, ρ_1 - średnia gęstość materiału wieńca i tarczy koła,
- $\Delta\rho, \Delta\rho_1$ - amplituda zmian gęstości materiału wieńca i tarczy koła,
- K, l - liczby naturalne dodatnie charakteryzujące harmoniczny rozkład niewyważień na obwodzie koła,
- α - kąt przesunięcia fazowego niewyważenia wieńca i tarczy koła (rys. 2).



Rys. 2. Koło z niewyważeniami wieńca i tarczy
($k=l=2, \alpha=45^\circ$)

Konsekwencją przyjętego rozkładu niewyważień jest to, że również takie parametry jak sztywność (obwodowa, radialna i binormalna) tarczy koła, masowe momenty bezwładności, zredukowane współczynniki tłumienia itp. Będą funkcją niezależnej zmiennej przestrzennej φ (rys. 1).

3. RÓWNANIA DRGAŃ WYMUSZONYCH WIRUJĄCEGO KOŁA Z NIWYWAŻENIAMI

Drgania wymuszone geometrycznej osi wieńca wirującego koła z niwyważeniami zostały wyprowadzone z zasady d'Alemberta. Model matematyczny koła stanowi układ sześciu cząstkowych równań różniczkowych, z których trzy opisują drgania odpowiednio względem osi ξ, η, ζ , a pozostałe trzy obroty przekroju poprzecznego wieńca względem tych osi (rys. 1). Równania te są sprzężone siłami

sprężystości i siłami bezwładności. Siły sprężystości i bezwładności powodujące sprzężenie drgań wynikają z asymetrycznego przekroju poprzecznego wieńca, niewyważień oraz przyspieszenia Coriolisa.

Z uwagi na objętość niniejszej pracy i skomplikowaną budowę równań poniżej przykładowo podano tylko dwa równaniu układu. Pierwsze z nich opisuje drgania podłużne (względem osi ξ) wieńca koła kolejowego z niewyważeniami wirującego z prędkością $\dot{\varphi}_o$ i przyspieszeniem kątowym $\ddot{\varphi}_o$, a drugie obrót przekroju poprzecznego tegoż wieńca względem osi ζ (osi prostopadłej do płaszczyzny koła):

$$\begin{aligned} & \left[E \frac{\partial}{\partial \varphi} + b_1 \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial t} \right] \left[\frac{A}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) - \frac{J_\zeta}{R^3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + v \right) - \frac{J_{\eta\zeta}}{R^3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - R\vartheta \right) \right] - \\ & - \frac{\alpha_\eta A}{R} \left(G + b_4 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - R\vartheta_\zeta \right) - r_t \\ & \left[k_u + c_1 \frac{\partial}{\partial t} + \left(\Delta k_u + \Delta c_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \cos(l\varphi + \alpha) \right] \\ & \left(u + l_1 \vartheta_\eta - h \vartheta_\zeta \right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[m_1 u - \right. \\ & - s_1 \vartheta_\eta + s_2 \vartheta_\zeta + \left(\Delta m_1 u - \Delta s_1 \vartheta_\eta + \Delta s_2 \vartheta_\zeta \right) \cos k\varphi + \\ & \left. \left(\Delta m_u u + \Delta s_3 \vartheta_\eta - \Delta s_4 \vartheta_\zeta \right) \cos(l\varphi + \alpha) \right] + 2\dot{\varphi}_o \frac{\partial}{\partial t} \\ & \left[m_2 v + s_3 \vartheta + \left(\Delta m_1 v + \Delta s_1 \vartheta \right) \cos k\varphi \right. \\ & \left. + \left(\Delta m_v v - \Delta s_5 \vartheta \right) \cos(l\varphi + \alpha) \right] = \\ & - Rq_\xi + \left[m_9 + \Delta m_1 \cos k\varphi + \Delta m_d \cos(l\varphi + \alpha) \right] \\ & \left(\ddot{x}_o \cos \varphi_1 - \dot{z}_o \sin \varphi_1 \right) + \\ & + \left[s_{12} + \Delta s_{18} \cos k\varphi + \Delta s_d \cos(l\varphi + \alpha) \right] \ddot{\varphi}_o, \quad (2) \\ & \left[E \frac{\partial}{\partial \varphi} + b_2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial t} \right] \left[\frac{J_\zeta}{R^3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + v \right) + \frac{J_{\eta\zeta}}{R^3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - R\vartheta \right) \right] + \\ & + \frac{\alpha_\eta A}{R} \left(G + b_4 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - R\vartheta_\zeta \right) + \\ & + \frac{hr_t}{R} \left[k_u + c_1 \frac{\partial}{\partial t} + \left(\Delta k_u + \Delta c_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \cos(l\varphi + \alpha) \right] \\ & \left(u + l_1 \vartheta_\eta - h \vartheta_\zeta \right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[m_7 u - s_9 \vartheta_\eta + s_{10} \vartheta_\zeta + \right. \\ & \left. + \left(\Delta m_3 u - \Delta s_9 \vartheta_\eta + \Delta s_{14} \vartheta_\zeta \right) \cos k\varphi - \right. \\ & \left. - \left(\Delta m_7 u + \Delta s_{15} \vartheta_\eta - \Delta s_{16} \vartheta_\zeta \right) \cos(l\varphi + \alpha) \right] + 2\dot{\varphi}_o \frac{\partial}{\partial t} \left[m_8 v + \right. \\ & \left. s_{11} \vartheta + \left(\Delta m_3 v + \Delta s_9 \vartheta \right) \cos k\varphi - \left(\Delta m_8 v - \Delta s_{17} \vartheta \right) \cos(l\varphi + \alpha) \right] = \\ & - m_\zeta + \left[m_{11} + \Delta m_3 \cos k\varphi - \Delta m_{10} \cos(l\varphi + \alpha) \right] \\ & \left(\ddot{x}_o \cos \varphi_1 - \dot{z}_o \sin \varphi_1 \right) + \left[s_{14} + \Delta s_{21} \cos k\varphi - \right. \\ & \left. - \Delta s_{22} \cos(l\varphi + \alpha) \right] \ddot{\varphi}_o \end{aligned}$$

gdzie:

u, v, w - przemieszczenie środka ciężkości O poprzecznego przekroju wieńca odpowiednio wzdłuż osi ξ, η, ζ (rys. 1.),

$\vartheta, \vartheta_\eta, \vartheta_\zeta$ - kąt obrotu przekroju wieńca odpowiednio względem ξ, η, ζ ,

E, G - moduły sprężystości materiału wieńca,

A - pole przekroju poprzecznego wieńca,

J_s, J_η, J_ζ - biegunowy i osiowe momenty bezwładności przekroju wieńca,

$J_{\eta\zeta}$ - moment dewiacji przekroju,

k_u, k_v, k_w - sztywność tarczy: obwodowa, radialna i binormalna,

m_i, s_i - zredukowane masy i momenty masowe wieńca i tarczy koła,

k_b, t_i - zredukowane sztywności wieńca i tarczy,

b_b, c_i - współczynniki tłumienia wewnętrznego wieńca i tarczy,

h, r, l_1, l_2 - wielkości charakteryzujące wymiary koła.

Wielkości występujące w (2) i oznaczone symbolem Δ oznaczają amplitudę zmian danego parametru wywołaną niewyważeniem tarczy lub wieńca koła. Prawe strony równań (2) reprezentują wymuszenia dynamiczne i kinematyczne jakie mogą działać na wirujące koło.

4. WYMUSZENIA DZIAŁAJĄCE NA WIRUJĄCE KOŁO

Na wirujące koło mogą działać wymuszenia dynamiczne i kinematyczne. Jako wymuszenie dynamiczne przyjmuje się skupione siły stykowe N, T_x i T_y działające na okręgu tocznym koła. Dokonując redukcji oraz wykorzystując właściwości funkcji δ -Diraca siły te można przedstawić jako szczególny przypadek liniowego obciążenia ciągłego działającego na geometryczną oś wieńca, a mianowicie:

$$q_\xi = \frac{T_x}{R} \delta(\varphi_1 - \pi), \quad q_\eta = \frac{N}{R} \delta(\varphi_1 - \pi), \quad q_\zeta = \frac{T_y}{R} \delta(\varphi_1 - \pi) \quad (3)$$

$$m_\xi = -\frac{a_s N + h_1 T_y}{R} \delta(\varphi_1 - \pi), \quad m_\eta = \frac{a_s T_x}{R} \delta(\varphi_1 - \pi),$$

$$m_\zeta = -\frac{h_1 T_x}{R} \delta(\varphi_1 - \pi)$$

Wymuszenie kinematyczne działające na koło jest skutkiem toczenia się spoligonizowanego koła po szynie co objawia się drganiami jego środka ciężkości. Jeżeli przyjmie się założenie, że prędkość kątowa koła $\dot{\varphi}_o = const$ to drgania pionowe środka ciężkości koła określone są zależnością (rys. 1):

$$z_o = \Delta R_1 \cos(k_1 \dot{\varphi}_o t + \alpha_1) \quad (4)$$

gdzie:

ΔR_1 - amplituda zmian promienia okręgu tocznego,

k_1 - liczba naturalna określająca liczbę fal zużycia na okręgu tocznym,

α_1 - kąt przesunięcia fazowego w stosunku do niewyważenia tarczy.

Z założenie $\dot{\varphi}_o = const$, wynika oczywisty wniosek, że w ruchu tocznym, środek ciężkości koła spoligonizowanego

doznaje również wymuszeń kinematycznych względem osi x (toczenie po zmiennym promieniu). Stąd też przyspieszenia środka ciężkości koła w kierunku poziomym (wzdłużnym) x i pionowym z wynoszą:

$$\ddot{x}_o = -\Delta R_1 k_1 \dot{\varphi}_o^2 \sin(k_1 \dot{\varphi}_o t + \alpha_1),$$

$$\ddot{z}_o = -\Delta R_1 (k_1 \dot{\varphi}_o)^2 \cos(k_1 \dot{\varphi}_o t + \alpha_1) \quad (5)$$

Wyrażenia (3) i (5) reprezentują dynamiczne i kinematyczne wymuszenie wirującego koła i służą do określenia prawej strony układu równań (2). Rozwiązania równań (2) poszukuje się metodą Fouriera w postaci funkcji o rozdzielonych zmiennych.

5. WYNIKI OBLICZEŃ

Przykładowe wyniki obliczeń numerycznych drgań wymuszonych wykonano dla koła o średnicy nominalnej $0.95m$ i grubości wieńca $0.05m$. Obliczenia wykonano dla przedziału prędkości kątowej $\dot{\varphi}_o = const$, której w ruchu tocznym odpowiada prędkość liniowa $V = 0 \div 400 km/h$. Do obliczeń numerycznych przyjęto następujące parametry charakteryzujące niewyważenia, poligonizację koła oraz wymuszenia dynamiczne i kinematyczne działające na koło:

$\Delta \rho = 79 kg/m^3$ - amplituda zmian gęstości materiału wieńca,
 $\Delta l_t = 1 mm$ - amplituda zmian grubości tarczy koła, co w prosty sposób może to być przeliczone na zmianę gęstości materiału tarczy $\Delta \rho_t$,

$K = l = 1$ - liczby charakteryzujące harmoniczny rozkład niewyważień na obwodzie wieńca i tarczy koła,

$\alpha = 0^\circ$ - kąt przesunięcia fazowego niewyważień wieńca i tarczy koła,

$N = 50000 n$ - obciążenie pionowe (radialne) w punkcie styku,

$T_x = -7500 n$ - siła styczna podłużna w punkcie styku,

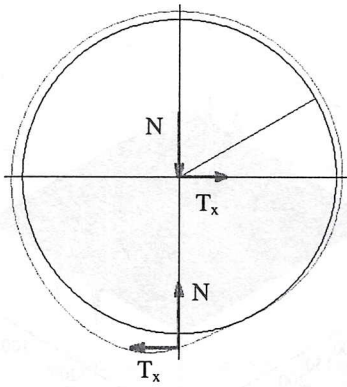
$T_y = 0$ - siła styczna poprzeczna w punkcie styku,

$\Delta R = 1 mm$ - amplituda zmian promienia tocznego koła,

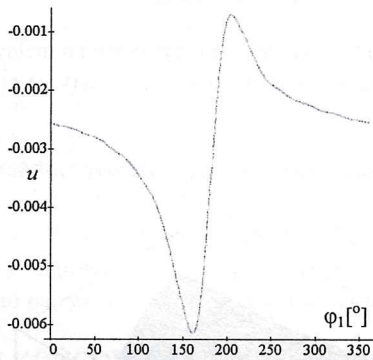
$k_1 = 6$ - liczba fal zużycia na obwodzie koła,

$\alpha_1 = 0^\circ$ - kąt przesunięcia fazowego zużycia powierzchni tocznej koła względem niewyważenia tarczy.

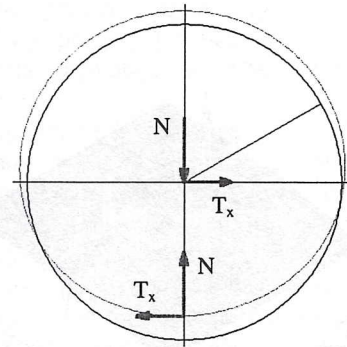
Na rys. 3 ÷ 5 przedstawiono zwroty sił wymuszających oraz przemieszczenia styczne, radialne i binormalne geometrycznej osi wieńca jako funkcji zmiennej przestrzennej φ_1 i prędkości kątowej koła, której w ruchu tocznym odpowiada prędkość $100 km/h$. Odształcenia koła zobrażowane na rys. 3 ÷ 5 odpowiadają chwili t dla której koło przebyło drogę kątową $\varphi_o = 120^\circ$ (rys. 1).



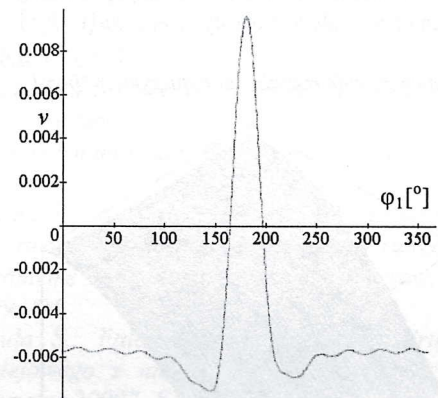
Przemieszczenie styczne "u" [mm]



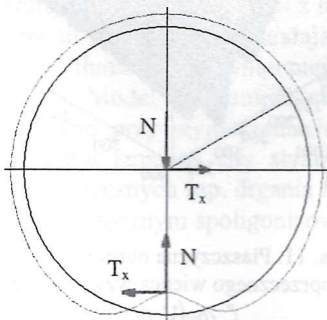
Rys. 3. Siły wymuszające oraz przemieszczenia styczne u



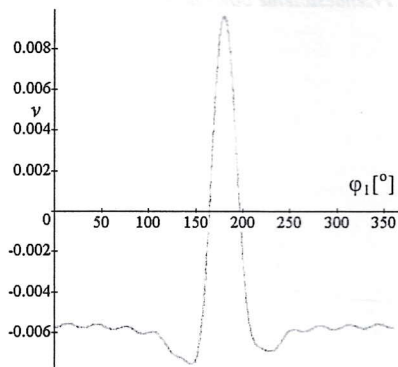
Przemieszczenie radialne "v" [mm]



Rys. 5. Siły wymuszające oraz przemieszczenia binormalne w

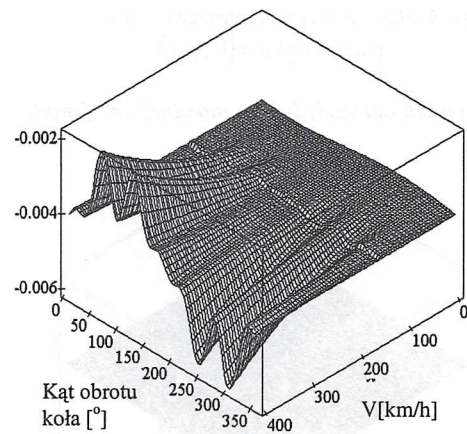


Przemieszczenie radialne "v" [mm]



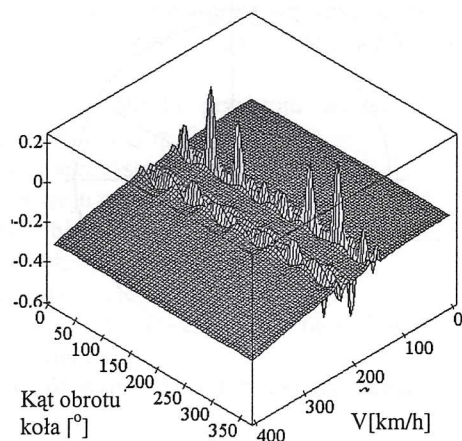
Rys. 4. Siły wymuszające oraz przemieszczenia radialne v

Przemieszczenie styczne punktu styku "u" [mm]



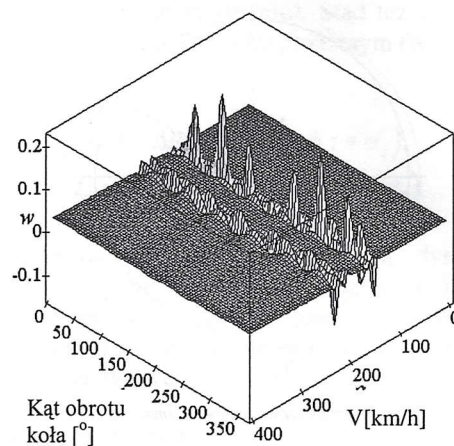
Rys. 6. Płaszczyzna przemieszczeń obwodowych (stycznych) punktu styku $u(V, \phi_o t)$

Obrot przekroju względem osi stycznej "au" [mrad]



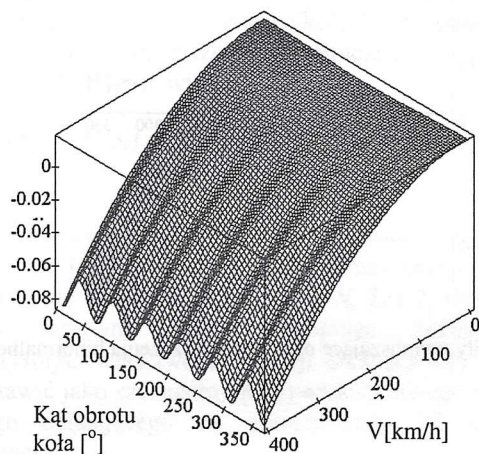
Rys. 7. Płaszczyzna obrotu przekroju poprzecznego wieńca koła względem osi stycznej ζ $au(V, \phi_o, t)$

Przeszczenie binormalne punktu styku "w" [mm]



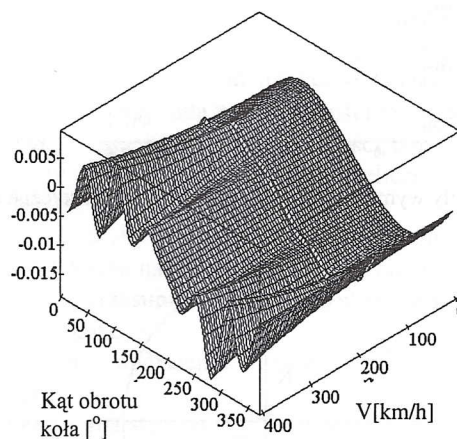
Rys. 10. Płaszczyzna przemieszczeń binormalnych (z płaszczyzny koła) punktu styku $w(V, \phi_o, t)$

Przeszczenie radialne punktu styku "v" [mm]



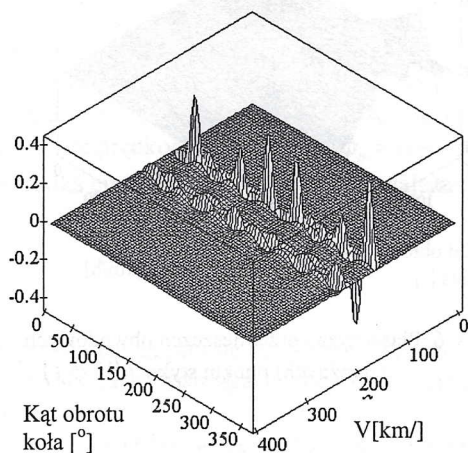
Rys. 8. Płaszczyzna przemieszczeń radialnych punktu styku $v(V, \phi_o, t)$

Obrot przekroju względem osi binormalnej "aw" [mrad]



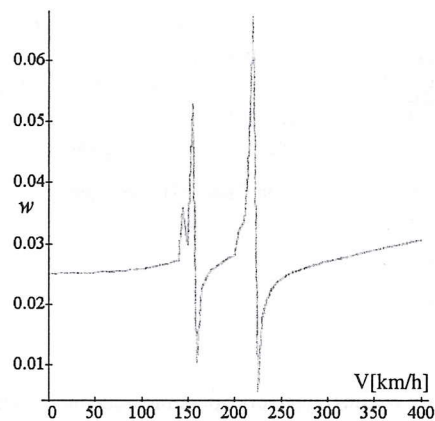
Rys. 11. Płaszczyzna obrotu przekroju poprzecznego wieńca względem osi ζ $aw(V, \phi_o, t)$

Obrot przekroju względem osi radialnej "av" [mrad]



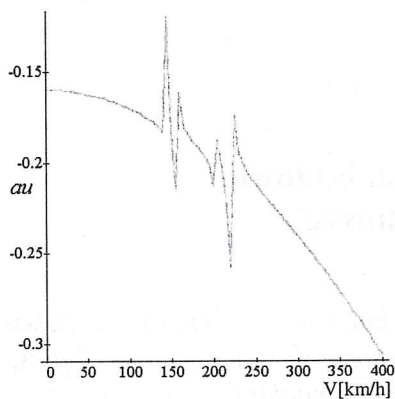
Rys. 9. Płaszczyzna obrotu przekroju poprzecznego wieńca koła względem osi η (radialnej) $av(V, \phi_o, t)$

Przeszczenie binormalne "w" [mm]



Rys. 12. Przeszczenie binormalne (z płaszczyzny koła) punktu styku dla kąta obrotu koła $\phi_o = 0^\circ$

Obrot przekroju względem osi stycznej "au" [mrad]



Rys. 13 Obrót przekroju poprzecznego $au(V)$ względem osi ξ (stycznej do geometrycznej osi wieńca) dla kąta obrotu koła $\phi_o = 0^\circ$

Rys. 6 ÷ 11 przedstawiają płaszczyzny przemieszczeń punktu leżącego na geometrycznej osi wieńca odpowiadającego punktowi przyłożenia sił wymuszających (punktowi styku koła z szyną) w funkcji prędkości w ruchu tocznym V i kąta obrotu koła $\phi_o = \phi_o t$ (rys. 1). Natomiast rys. 12 i 13 stanowią przekrój płaszczyzn przedstawionych odpowiednio na rys. 10 i 7 dla kąta obrotu koła $\phi_o = 0^\circ$.

6. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiony w pracy fizyczny i matematyczny ciągły model wirującego koła kolejowego z niewyważeniami uwzględnia wpływ sił poprzecznych działających w wieńcu koła oraz zjawisko tłumienia wewnętrznego w materiale wieńca i tarczy koła. Model koła umożliwia analizę drgań wymuszonych zarówno przy wymuszeniach dynamicznych (np. wirujące stałe lub zmienne siły stykowe) jak i przy wymuszeniach kinematycznych (np. drgania środka ciężkości koła wywołane ruchem tocznym spoligonizowanego koła lub

koła poruszającego po skorygowanej szynie). Rozwiązaniu zagadnienia brzegowego jednorodnego układu równań (2) poświęcone były prace [3] i [4]. Wykazano w nich, że wirowanie koła wywołuje w nim zjawisko bifurkacji częstotliwości.

Rozwiązania problemu drgań wymuszonych koła z niewyważeniami poszukiwano metodą Fouriera. (w pracy pominięto tłumienie wewnętrzne w materiale koła). Otrzymane wyniki obliczeń numerycznych, przedstawione w niniejszej pracy, ruchu wskazują na istnienie zakresów prędkości kątowej koła, w których występuje gwałtowny wzrost niektórych odkształceń koła. Wzrost ten o charakterze rezonansowym wywołany jest niewyważeniami koła oraz kinematycznym wymuszeniem drgań jako skutek tocznego ruchu spoligonizowanego koła.

Praca zrealizowana w ramach grantu KBN nr PB 0070/T12/99/17

7. LITERATURA

- [1] Bogacz R., Meinke P., Popp K.: *Zur Modellierung der hoherfrequenten Radsatz/ Gleisdynamik. Systemdynamik der Eisenbahn, Henningsdorf, 45÷55, 1994.*
- [2] Bogacz R., Meinke P., Dżuła S.: *Vehicle/track dynamic interaction for high speed-frequency range. Dynamical Problems of Mech. System, Warsaw, 1655÷179, 1993/94.*
- [3] Dżuła S.: *Falowe równania ruchu wirującego koła kolejowego z niewyważeniem. Konferencja „Pojazdy Szynowe 2000”, Kraków-Artamów, t. II, s. 71÷80, 2000.*
- [4] Dżuła S.: *Stateczność wirującego koła kolejowego z niewyważeniem o ciągłym rozkładzie masy. Problemy Eksploatacji, nr 1/2002(44), s. 20÷29, 2000.*