

Model matematyczny zawieszenia UIC do wagonów towarowych

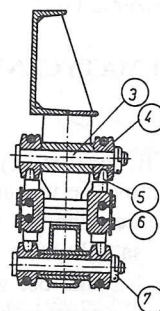
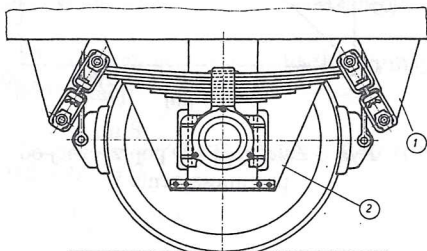
W artykule przedstawiono matematyczny model zawieszenia UIC do wagonów towarowych ukierunkowany na charakterystyki poprzeczną i wzdłużną. Charakterystyki te wpływają na dynamikę poprzeczną pojazdu. Uwzględniono geometrię układu i tarcie suche w węzłach, które wywiera silny wpływ na stateczność ruchu. Po szczegółowym modelowaniu matematycznym budowane są modele fenomenologiczne zawieszenia. Modele te mogą być użyte w symulacjach ruchu pojazdu.

1. WSTĘP

W Europie Zachodniej eksploatowana jest duża liczba wagonów z zawieszeniem typu UIC. Ten typ zawieszenia znajduje zastosowanie zarówno w wagonach dwuosiowych jak i wózkowych. Aktualnie kilku producentów taboru oferuje wózki z tym zawieszeniem. Zawieszenie UIC charakteryzuje się prostotą, niskim kosztem i dostateczną niezawodnością. Właściwości biegowe wagonów wyposażonych w ten typ zawieszenia nie są zadowalające ze względu na dynamikę poprzeczną i silną jej zależność od warunków eksploatacji, jednakże wagony z tym zawieszeniem pozostaną w eksploatacji przez następne kilkadziesiąt lat. W związku z tą perspektywą podejmowane są próby polepszenia właściwości biegowych wagonów z zawieszeniem UIC. Zawieszenie UIC jest podatne na modyfikacje i wysiłki te należy uznać za celowe. Mając to na uwadze koleje szwedzkie określiły nawet jako cel działań podwyższenie prędkości jazdy do 160 km/godz przy nacisku osi 180 kN.

Próby polepszenia właściwości biegowych wagonów z zawieszeniem UIC podjęte do roku 1999 zostały przedstawione przez Stichel'a [1]. Rozważając możliwości polepszenia właściwości biegowych wagonu Stichel poszukiwał się programem GENSYs służącym do symulacji dynamiki układów wielomasowych. Aby przeprowadzić symulacje Stichel wprowadził do GENSYs'u zmierzone, quasi-statyczne charakterystyki zawieszenia w postaci pętli histerezy na płaszczyźnie siła zwrotna- przemieszczenie. Charakterystyki te pokazują, że dyssypacja w zawieszeniu jest wywołana tarciami suchymi.

Stosowanie zmierzonych charakterystyk quasi-statycznych w symulacjach jest uproszczeniem powodującym nieznanne skutki dopóki nie dysponuje się modelem matematycznym, gdyż charakterystyki są rejestrowane przy stałym pionowym obciążeniu elementów zawieszenia, podczas gdy w rzeczywistości obciążenia podczas jazdy są zmienne.



Rys. 1 Zawieszenie UIC. Po prawej stronie przekrój przez wieszaki

Ponadto, dane z pomiarów nie zawierają informacji w jaki sposób modyfikacje zawieszenia mogą wpływać na charakterystyki a więc na działanie zawieszenia. Z tych powodów niezbędne jest opracowanie matematycznego modelu zawieszenia. Po przeprowadzeniu eksperymentalnej weryfikacji modelu, może on być z pożytkiem stosowany w pracach nad modyfikacją i optymalizacją zawieszenia.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie zbudowanego matematycznego modelu zawieszenia typu UIC.

Zawieszenie UIC składa się z resorów piórowych i układu wieszakowego. Schemat zawieszenia pokazano na Rys.1. Kamienie układu wieszakowego 4 zapewniają rozdzielanie działania w kierunkach wzdłużnym i poprzecznym. W przegubach układu wieszakowego występuje dzięki temu tarcie "jednowymiarowe", to znaczy takie, że prędkość ślizgania posiada niezmienny kierunek.

Ze względu na ukierunkowanie niniejszej pracy na dynamikę poprzeczną, resor piórowy realizujący usprężynowanie pionowe nie został uwzględniony.

Zawieszenie UIC jest skomplikowanym układem z punktu widzenia mechaniki, gdyż jego opis matematyczny musi uwzględniać złożoną geometrię i tarcie suche w przegubach.

W modelowaniu zawieszenia zastosowano następujące podejście:

- rozpatrywana jest równowaga quasi-statyczna układu wieszakowego przy dowolnym jego wychyleniu;
- otrzymane związki między przemieszczeniem a siłą są wykorzystywane do zbudowania modelu fenomenologicznego; model ten składa się z elementów sprężystych i suwaków tarcia suchego i

może być, przy użyciu metod mechaniki nieciągłej, zastosowany w symulacjach ruchu pojazdu.

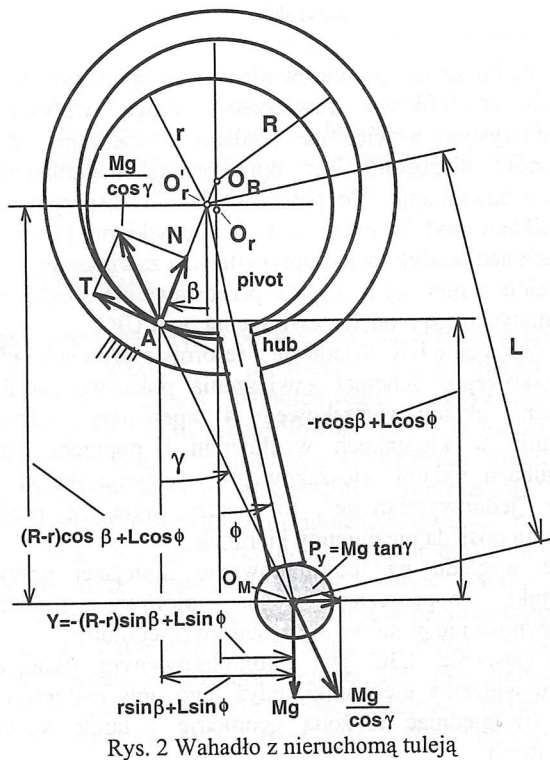
W ten sposób skomplikowany układ mechaniczny zostaje zastąpiony prostszym, w którym nie występują już szczegółowe parametry takie jak wymiary mechanizmu, średnice tulei, sworzni itp.

Ilustracją wyniku modelowania jest pętla histerezy w postaci zależności siły zwrotnej od przemieszczenia. Pętlę uzyskuje się przez całkowanie równań różniczkowych modelu fenomenologicznego. Charakterystyka w postaci pętli nie jest potrzebna do symulacji ruchu pojazdu.

Dla zilustrowania zastosowanego sposobu modelowania rozpatrywane jest najpierw tzw. wahadło techniczne (nazwa wprowadzona przez autora), które można wyodrębnić jako podstawowy element zawieszenia UIC.

2. MODEL MATEMATYCZNY WAHADŁA TECHNICZNEGO

W zawieszeniu UIC można wyodrębnić myślowo dwa rodzaje wahadeł a mianowicie wahadło z nieruchomym sworzniem i wahadło z nieruchomą tuleją. Wahadła z nieruchomym sworzniem są aktywne przy wzdłużnych przemieszczeniach korpusu łożyska osi względem ramy a z nieruchomą tuleją przy przemieszczeniach poprzecznych.



Rys. 2 Wahadło z nieruchomą tuleją

Jako przykład rozpatrywane jest wahadło z nieruchomą tuleją. Równowaga wahadła wymaga, aby siły działające w środku masy M oraz w punkcie styku A sworznia i tulei były współliniowe, równe co do wartości liczbowych i przeciwnie. Przy małym wychyleniu wahadła sworznię się po tulei. Łatwo wykazać, że przy cylindrycznych sworzniach i otworze tulei związek między kątem wychylenia i kątem styku jest następujący:

$$\beta = \frac{r}{R-r} \phi \quad (1)$$

Kierunek działania sił obciążających wahadło jest określony kątem γ .

$$\tan \gamma = \frac{L \sin \Phi + r \sin \beta}{L \cos \Phi - r \cos \beta} \quad (2)$$

Siła kontaktowa działająca w punkcie A może być rozłożona na składowe normalną i styczną.

$$N = \frac{Mg}{\cos \gamma} \cos(\beta + \gamma), \quad T = \frac{Mg}{\cos \gamma} \sin(\beta + \gamma).$$

Toczenie w czopie jest możliwe jeśli

$$\frac{T}{N} < f, \text{ a więc } \tan(\beta + \gamma) < f. \quad (3)$$

Warto zauważyć, że gdy obowiązuje prawo Coulomb'a tarcia suchego to warunek toczenia (3) nie zależy od wartości siły normalnej.

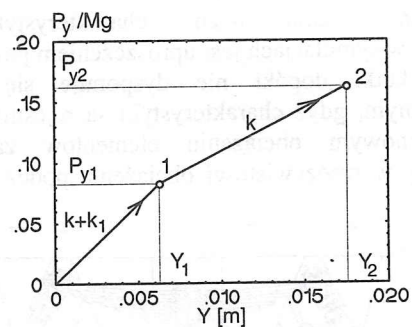
Przy wzroście wychylenia, w pewnym momencie, toczenie przestaje być możliwe, rozpoczyna się ślizganie i zamiast nierówności obowiązuje równość

$$\frac{T}{N} = f, \text{ lub } \tan(\beta + \gamma) = f. \quad (4)$$

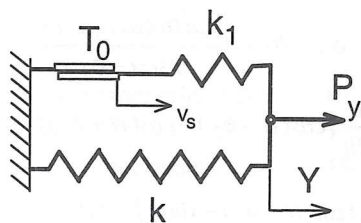
Warunek ślizgania (4) jest niezależny od wartości siły normalnej.

Zależność siły poprzecznej $P_y = Mg \tan \gamma$ od poprzecznego przemieszczenia Y może być wyznaczona na podstawie wyrażeń (1), (2), (3), (4). Przy małych przemieszczeniach, gdy występuje toczenie w czopie, siła może być obliczona analitycznie. Od momentu, gdy warunek toczenia przestaje być spełniony obliczenia wymagają iteracji po kącie styku β . Podobne do (1), (2), (3), (4) wyrażenia obowiązują dla wahadła o nieruchomym sworzniem.

Przykładowa zależność siły poprzecznej od monotonicznego przemieszczenia wahadła o nieruchomym sworzniem i parametrach $R=0.0135$, $r=0.0125$, $L=0.143$ m, $f=0.5$ jest pokazana na wykresie na Rys.3. Na odcinku 0-1 występuje toczenie w czopie a na odcinku 1-2 ślizganie. Ponieważ linie wykresu są praktycznie proste, model fenomenologiczny wahadła może być zbudowany z prostych elementów. Model fenomenologiczny jest pokazany na Rys. 4. Składa się on z dwóch sprężyn i suwaka tarcia suchego.



Rys. 3 Zależność siły poprzecznej od przemieszczenia Y



Rys. 4 Fenomenologiczny model wahadła technicznego

Parametrami modelu fenomenologicznego są sztywności k, k_1 sprężyn oraz parametr T_0 suwaka tarcia suchego. Siła tarcia T w suwaku jest opisana zależnością $T = \tau \cdot T_0$, $T_0 = f \cdot N$

gdzie mnożnik siły tarcia τ i prędkość ślizgania v_s są powiązane relacją

$$\tau(v_s) = \begin{cases} \langle -1, +1 \rangle & \text{if } |v_s| = 0 \\ \text{sign}(v_s) & \text{if } |v_s| \neq 0 \end{cases}$$

Tabela 1. Parametry fenomenologicznego modelu wahadła technicznego

f	Nieruchomy sworzeń			Nieruchoma tuleja		
	T_0 / Mg	$\frac{k}{Mg} [1/m]$	$\frac{k_1}{Mg} [1/m]$	T_0 / Mg	$\frac{k}{Mg} [1/m]$	$\frac{k_1}{Mg} [1/m]$
0.1	0.008	6.991	6.227	0.009	6.979	10.456
0.2	0.017	7.005	6.235	0.018	6.989	10.458
0.3	0.025	7.023	6.196	0.027	7.014	10.349
0.4	0.032	7.043	6.133	0.035	7.028	10.259
0.5	0.038	7.061	6.075	0.042	7.044	10.106

W Tab.1 podano obliczone parametry modeli fenomenologicznych obu typów wahadeł przy $R = 0.0135$, $r = 0.0125$ $L=0.143$ m oraz $f=0.1$ do 0.5.

Można zauważyć, że parametr T_0 zależy prawie liniowo od współczynnika tarcia a sztywności k, k_1 są prawie stałe, a więc nie zależą od współczynnika tarcia.

Pętla histerezy wahadła może być obliczona przez całkowanie równania różniczkowego modelu fenomenologicznego. Szczegóły opisu z zastosowaniem metod mechaniki nieciągłej można znaleźć w pracy Piotrowskiego i Grzesikiewicza [2].

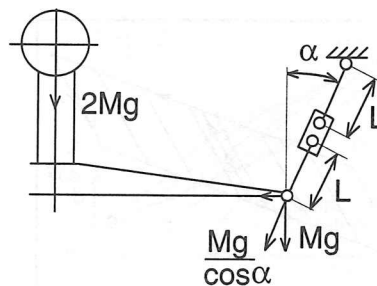
3. CHARAKTERYSTYKA ZAWIESZENIA W KIERUNKU POPRZECZNYM

Analiza wahadła technicznego może być łatwo rozszerzona na charakterystykę poprzeczną zawieszenia. Aby kontynuować analizę w konwencji wahadła zawieszenie zostało przedstawione na Rys. 5 w odwróconej pozycji - "do góry nogami".

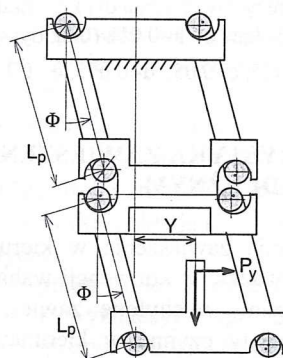
Zależności obowiązujące dla wahadła wymagają tylko nieznacznej modyfikacji.

$$\tan \gamma = \frac{L_p \sin \phi + 2r \sin \beta}{L_p \cos \phi - 2r \cos \beta} \quad Y = 2L_p \sin \phi - 4(R-r) \sin \beta$$

$$P_y = Mg \tan \gamma, \quad L_p = L \cos \alpha.$$



Rys.5 Zawieszenie z podwójnymi wieszakami w odwróconej pozycji



Rys. 6 Układ reprezentujący podwójne wieszaki zawieszenia UIC

Model fenomenologiczny zawieszenia dla kierunku poprzecznego ma tę samą postać co model wahadła i w ten sam sposób oblicza się jego parametry. W Tab. 2 przedstawiono parametry modelu fenomenologicznego. Obliczone przez całkowanie pętla histerezy przedstawiono na Rys. 7. Przy małych przemieszczeniach zawieszenie nie dyssypuje energii a sztywność jest wysoka. Przy większych przemieszczeniach dochodzi do ślizgania w czopach wieszaków, energia jest dyssypowana przez tarcie a sztywność maleje. Pewną paradoksalną własnością zawieszenia jest to, że przy wysokim współczynniku tarcia w przegubach dyssypacja może w ogóle nie zachodzić. Aby uzyskać dyssypację przy małych wychyleniach, współczynnik tarcia powinien być niski.

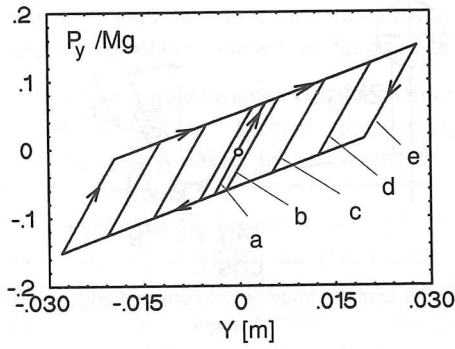
Jakościowe własności zawieszenia wygodnie jest analizować metodą linearyzacji harmonicznej. Analiza taka nie jest jednak przedmiotem niniejszej pracy.

Tabela 2. Parametry fenomenologicznego modelu dla kierunku poprzecznego

f	$\frac{T_0}{Mg}$	$\frac{k}{Mg}$	$\frac{k_1}{Mg}$
0.1	0.018	3.455	12.783
0.2	0.036	3.462	12.795
0.3	0.053	3.473	12.680
0.4	0.069	3.486	12.493
0.5	0.083	3.500	12.317

Uwaga: $\frac{k}{Mg}, \frac{k_1}{Mg} [1/m]$

Wymiary zawieszenia: $L_p = 0.165$ m
 $(L=0.143$ m), $R = 0.0135$ m, $r = 0.0125$ m,
 $\alpha = 30$ deg.



Rys. 7 Pętla histerezy zawieszenia dla kierunku poprzecznego.
Amplituda kąta ϕ : a- 0.018 (brak dyssypacji),
b- 0.025, c- 0.05, d- 0.075, e- 0.1 rad

4. CHARAKTERYSTYKA ZAWIESZENIA W KIERUNKU WZDŁUŻNYM

Analizę działania zawieszenia w kierunku wzdłużnym wygodnie jest prowadzić w konwencji wahadła. W tym celu na Rys. 8 pokazano wychylone zawieszenie w pozycji odwróconej. Elementy czynne w kierunku wzdłużnym to wahadła z ustalonym sworzniem.

Rzutuując człony mechanizmu na osie układu \bar{y}, \bar{z} otrzymuje się następujące równania:

$$(R-r)\sin(\alpha+\beta_1)+L\sin(\alpha+\phi_1)+(R-r)\sin(\alpha+\beta_2)+2b\cos\theta+(R-r)\sin(\alpha-\beta_4)+L\sin(\alpha-\phi_2)+(R-r)\sin(\alpha-\beta_3)=2b+2(R-r)\sin\alpha+2L\sin\alpha$$

$$-(R-r)\cos(\alpha+\beta_1)-L\cos(\alpha+\phi_1)-(R-r)\cos(\alpha+\beta_2)-2b\sin\theta+(R-r)\cos(\alpha-\beta_4)+L\cos(\alpha-\phi_2)+(R-r)\cos(\alpha-\beta_3)=0$$

Rzutowanie połówek mechanizmu na osie \bar{y}, \bar{z} daje:

$$(R-r)\sin(\alpha+\beta_1)+L\sin(\alpha+\phi_1)+(R-r)\sin(\alpha+\beta_2)+b\cos\theta+h\sin\theta=L\sin\alpha+2(R-r)\sin\alpha+b+Y$$

$$(R-r)\sin(\alpha-\beta_3)+L\sin(\alpha-\phi_2)+(R-r)\sin(\alpha-\beta_4)+b\cos\theta-h\sin\theta=L\sin\alpha+2(R-r)\sin\alpha+b-Y$$

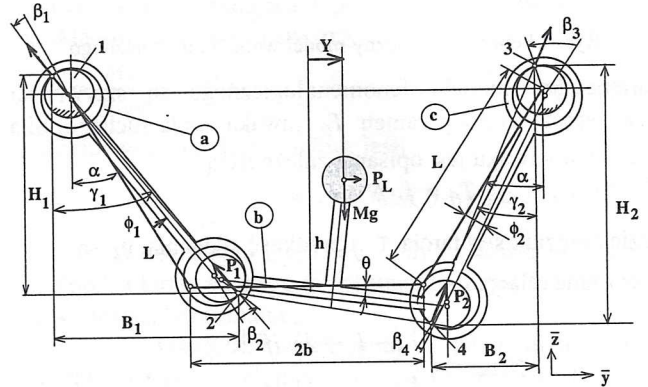
Ponieważ $(R-r) \ll L$, $(R-r) \ll b$, $(R-r) \ll h$ oraz $|\sin(\alpha \pm \beta_i)| < 1$, $|\cos(\alpha \pm \beta_i)| < 1$ iloczyny $(R-r)\sin(\alpha \pm \beta_i)$, $(R-r)\cos(\alpha \pm \beta_i)$ można pominąć.

Zakładając, że ϕ_1 jest zadany kąt oraz $\phi_2 = \phi_1 + \Delta\phi$, $|\Delta\phi| \ll 1$, linearyzujemy powyższe równania względem θ oraz $\Delta\phi$ otrzymując

$$\phi_2 \approx \phi_1 + 2 \frac{\sin\alpha(\cos\phi_1 - 1)}{\cos(\alpha - \phi_1)},$$

$$\theta \approx \frac{L}{2b} [\cos(\alpha - \phi_2) - \cos(\alpha + \phi_1)]$$

$$Y \approx L[\sin(\alpha + \phi_1) - \sin\alpha] + h\theta.$$



Rys. 8 Zawieszenie w odwróconej pozycji wychylone w kierunku wzdłużnym

Wykorzystując oznaczenia Rys. 9 można obliczyć:

$$\tan\gamma_1 = \frac{B_1}{H_1} = \frac{L\sin(\alpha+\phi_1)+R\sin(\alpha+\beta_1)+R\sin(\alpha+\beta_2)}{L\cos(\alpha+\phi_1)+R\cos(\alpha+\beta_1)+R\cos(\alpha+\beta_2)}$$

$$\tan\gamma_2 = \frac{B_2}{H_2} = \frac{L\sin(\alpha-\phi_2)+R\sin(\alpha-\beta_3)+R\sin(\alpha-\beta_4)}{L\cos(\alpha-\phi_2)+R\cos(\alpha-\beta_3)+R\cos(\alpha-\beta_4)}$$

$$P_L = Mg \frac{b_2 \sin\gamma_1 \cos\gamma_2 - b_1 \sin\gamma_2 \cos\gamma_1 + (h_1 + h_2) \sin\gamma_1 \sin\gamma_2 - \theta h \sin(\gamma_1 + \gamma_2)}{(b_1 + b_2) \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 + h_2 \cos\gamma_1 \sin\gamma_2 - h_1 \sin\gamma_1 \cos\gamma_2 + h \sin(\gamma_2 + \gamma_1)}$$

gdzie:

$$b_1 = b \cos\theta - r \sin(\alpha + \beta_2)$$

$$b_2 = b \cos\theta - r \sin(\alpha - \beta_4)$$

$$h_1 = b \sin\theta - r \cos(\alpha + \beta_2)$$

$$h_2 = b \sin\theta + r \cos(\alpha - \beta_4)$$

Pozostałe warunki zadania to związki kinematyczne obowiązujące podczas toczenia w czopach oraz warunki toczenia/ślizgania w czopach.

$$\beta_1 = \frac{r}{R-r} \phi_1, \quad \beta_2 = \frac{r}{R-r} (\phi_1 + \theta),$$

$$\beta_3 = \frac{r}{R-r} \phi_2, \quad \beta_4 = \frac{r}{R-r} (\phi_2 - \theta),$$

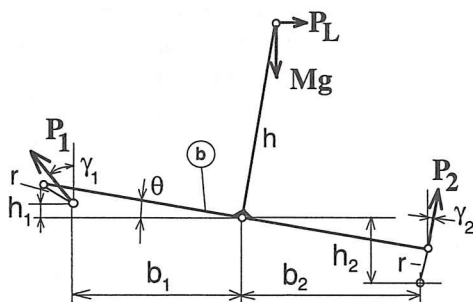
$\tan(\alpha + \beta_1 - \gamma_1) < f$: toczenie, ($lub = f$) : ślizganie,

$\tan(\alpha + \beta_2 - \gamma_1) < f$: toczenie, ($lub = f$) : ślizganie,

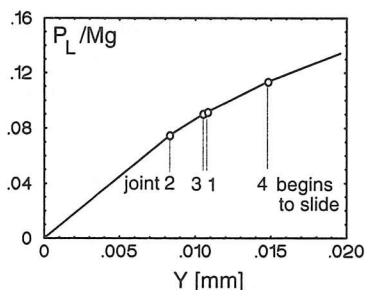
$\tan(\beta_3 - \alpha + \gamma_2) < f$: toczenie, ($lub = f$) : ślizganie,

$\tan(\beta_4 - \alpha + \gamma_2) < f$: toczenie, ($lub = f$) : ślizganie.

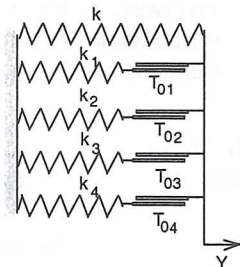
Przedstawiony opis umożliwia wyznaczenie parametrów modelu fenomenologicznego. Obliczenia są prowadzone podobnie jak w przypadku wahadła. Zakładając monotoniczny przyrost kąta wychylenia obliczana jest siła wzdłużna oraz przemieszczenie wzdłużne. Dopóki występuje toczenie we wszystkich przegubach to obliczenie nie wymaga iteracji. Jeśli chociaż jedna z nierówności nie jest spełniona, to od tego momentu wymagana jest iteracja po kątach styku.



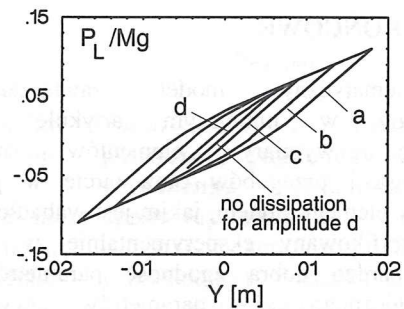
Rys.9 Położenie i obciążenia elementu b



Rys.10 Zależność między siłą a przemieszczeniem



Rys.11 Model fenomenologiczny zawieszenia dla kierunku wzdłużnego



Rys. 12 Pętle histerezy

Obliczenie jest prowadzone przynajmniej do takiej wartości przemieszczenia, że dochodzi do ślizgania we wszystkich przegubach.

Na Rys. 10 przedstawiono wynik obliczeń w postaci zależności między siłą wzdłużną a przemieszczeniem dla $\alpha = 30^\circ$, $L=0.285$, $b=0.6$, $h=0.36$, $R=0.01825$, $r=0.01725m$, $f=0.4$. Wykres składa się pięciu odcinków linii praktycznie prostych.

Na podstawie wyniku obliczeń można zbudować model fenomenologiczny i wyznaczyć jego parametry. Model składa się z pięciu sprężyn o charakterystykach liniowych i czterech suwaków tarcia suchego. Schemat modelu przedstawiono na Rys. 11 a jego parametry podaje Tab. 3.

Dla zilustrowania własności modelu obliczono jego pętle histerezy przy współ-czynniku tarcia $f = 0.3$ i kilku amplitud: a: 0.018, b: 0.0135, c: 0.09, d: 0.045m. Pętle przedstawiono na Rys. 11.

W odróżnieniu od pętli dla kierunku poprzecznego pętle dla kierunku wzdłużnego są bardziej "gładkie".

Tabela 3. Parametry fenomenologicznego modelu zawieszenia dla kierunku wzdłużnego

	Parametr	i =	1	2	3	4
f = 0.1	k /Mg	0.5502E-02				
	k_i /Mg		0.3435E-02	0.1998E-02	0.3334E-03	0.1901E-02
	T_{0i} /Mg		0.6981E-02	0.5111E-02	0.9058E-03	0.7163E-02
f = 0.2	k	0.5509E-02				
	k_i /Mg		0.3507E-02	0.1910E-02	0.3597E-03	0.1902E-02
	T_{0i} /Mg		0.1407E-01	0.9685E-02	0.1927E-02	0.1422E-01
f = 0.3	k	0.5511E-02				
	k_i /Mg		0.3561E-02	0.1902E-02	0.3534E-03	0.1862E-02
	T_{0i} /Mg		0.2103E-01	0.1425E-01	0.2784E-02	0.2059E-01
f = 0.4	k	0.5482E-02				
	k_i /Mg		0.3611E-02	0.1875E-02	0.3352E-03	0.1875E-02
	T_{0i} /Mg		0.2776E-01	0.1835E-01	0.3429E-02	0.2705E-01
f = 0.5	k	0.5443E-02				
	k_i /Mg		0.3679E-02	0.1822E-02	0.3675E-03	0.1849E-02
	T_{0i} /Mg		0.3439E-01	0.2173E-01	0.4557E-02	0.3249E-01

5. UWAGI KOŃCOWE

Matematyczny model zawieszenia UIC przedstawiony w niniejszym artykule uwzględnia konfigurację, wymiary elementów mechanizmu wieszakowego i przegubów oraz tarcie w przegubach. Podstawowy element modelu, jakim jest wahadło techniczne został zweryfikowany eksperymentalnie w pracy [3]. Uzyskano bardzo dobrą zgodność parametrów modelu fenomenologicznego i parametrów wyznaczonych eksperymentalnie. Weryfikacja potwierdziła słuszność przyjętego założenia, że w przegubach mechanizmu występuje tarcie suche i że można je opisać prawem Coulomb'a. Konsekwencją prawa Coulomb'a jest niezależność warunków toczenia/ślizgania w przegubach od ich obciążenia normalnego. Dzięki temu modele zawieszenia nadają się do zastosowania w modelach symulacyjnych dynamiki pojazdu. Aktualnie w Laboratorium Instytutu Pojazdów PW prowadzone są badania weryfikacyjne na rzeczywistym zawieszeniu UIC.

Opracowane modele są niezbędne do testowania modyfikacji zawiesznień i ich optymalizacji metodą symulacji komputerowych otwierając nowe możliwości w tym zakresie.

Efektywne użycie opracowanych modeli zawieszenia w dynamice pojazdu wymaga zastosowania metod mechaniki nieciągłej do opisu modelu układu pojazd - tor, ze względu na nieciągłe funkcje występujące w opisie tarcia suchego. Z przykładem zastosowania modeli zawieszenia UIC i metod mechaniki nieciągłej w dynamice pojazdu można się zapoznać w pracy Piotrowskiego [4] na temat dynamiki poprzecznej wagonu dwuosiowego.

Niniejsza praca powstała w ramach pracy statutowej Nr 504G/1153/2390 (2002r.) Instytutu Pojazdów Politechniki Warszawskiej.

6. LITERATURA

- [1] Stichel, S.: *How to Improve the Running Behaviour of Freight Wagons with UIC-Link Suspension. Supplement to Vehicle System Dynamics, Vol. 33 (1999), pp. 394-405.*
- [2] Piotrowski, J., Grzesikiewicz, W.: *A mathematical model to determine lateral characteristic of UIC link suspension. Mat. konf. "Transcomp 2001", Zakopane, pp.153-162.*
- [3] Piotrowski J.: *Weryfikacja matematycznego modelu wahadła technicznego jako elementu modelu zawieszenia typu UIC do wagonów towarowych. Część (nieopublikowanego) sprawozdania z pracy statutowej Nr 504G/1153/2390 Instytutu Pojazdów PW. 2002r.*
- [4] Piotrowski J.: *Dynamics of freight wagon with dry friction damping on straight track. VIII Seminaire Franco-Polonais en Mechanique 2001. Wyd. IPBM Warszawa, pp. 263-270.*