dr inż.. Stanisław Bocian
Instytut Pojazdów Szynowych „TABOR"

Model matematyczny regulatora PID do komputerowego sterowania przetwornikiem elektropneumatycznym sterowanym analogowo

W pracy opisano model matematyczny regulatora PID do komputerowego sterowania przetwornikiem elektropneumatycznym sterowanym analogowo. Przeprowadzono symulację współpracy modelu matematycznego regulatora PID z modelem matematycznym przetwornika elektromagnetycznego dla różnych parametrów regulatora PID.
(Artykuł powstał w ramach projektu badawczego KBN nr 9T12C 01018 „Opracowanie i wybór na podstawie badań systemu mikroprocesorowego sterowania wielo-systemowymi układami hamulców pojazdów szynowych")

1. Wstęp

Przedmiotem artykułu jest model matematyczny regulatora PID do komputerowego sterowania przetwornikiem elektropneumatycznym sterowanym analogowo. Regulator będzie stanowił element układu regulacji ciśnienia w przewodzie głównym układu hamowania pociągu. Dla prawidłowego doboru struktury i parametrów regulatora korzystne jest uzyskanie jego modelu matematycznego, a także modelu matematycznego całego układu z uwzględnieniem obiektu regulacji i elementów wykonawczych.

Sterowanie komputerowe umożliwia elastyczny i optymalny dobór algorytmu i parametrów sterowania. Dla wykorzystania tej możliwości konieczna jest znajomość statyki i dynamiki całego układu sterowania. Zakłada się uzyskanie wstępnego, przybliżonego modelu układu opartego na teoretycznej znajomości zjawisk i dotychczasowych doświadczeniach. W toku dalszych prac model ten będzie precyzowany zgodnie z danymi uzyskiwanymi z prac badawczych.

W pracy przedstawiono model teoretyczny regulacji obiektu w oparciu o wiedzę dotyczącą podstaw automatyki [18], ogólnej teorii sterowania i systemów [9,12,17], techniki regulacji automatycznej [1, 5, 6, 8, 13, 14], systemów cyfrowych automatyki [11], cyfrowego sterowania [4, 16,] i teorii regulatorów [5, 6, 7, 15].

Przedstawiono także symulacje regulatorów z wykorzystaniem opisu układu dynamicznego w przestrzeni stanów [7, 9].

Do badania modelu układu regulacji planuje się zastosowanie metod symulacji komputerowej. Propozycję takiego podejścia przedstawiono w dalszej części pracy przy wykorzystaniu programu MATLAB wersji 5.2 i jego przybornika (biblioteki) pod nazwą SIMULINK. W artykule przedstawiono pierwszy etap pracy symulujący zachowanie się obiektu (przetwornika elektropneumatycznego) na wyjściu pod wpływem skoku jednostkowego na wejściu (zmiana sygnału wejściowego z zera na określoną wartość) przy zmianie parametrów regulatora PID.

2. Pojęcia podstawowe

Sterowaniem nazywać będziemy celowe oddziaływanie (wpływanie) na przebieg procesów. Sterowanie dzielimy na sterowanie ręczne i automatyczne. Sterowaniem ręcznym nazywamy sterowanie realizowane przez człowieka, a sterowaniem automatycznym - sterowanie realizowane przez odpowiednie urządzenie sterujące. Rozróżniamy sterowanie w układzie otwartym i sterowanie w układzie zamkniętym, czyli w układzie ze sprzężeniem zwrotnym. Sterowanie w układzie zamkniętym nazywać będziemy regulacją. Regulacja jest więc pojęciem węższym od sterowania. Regulacją automatyczną nazywać będziemy sterowanie w układzie zamkniętym realizowane samoczynnie (bez udziału człowieka) przez odpowiednie urządzenia sterujące. Urządzenia te, wykorzystując różnice między odpowiednimi sygnałami (wielkościami) zadanymi i mierzonymi, wytwarzają sygnały oddziaływujące celowo na przebieg procesów; zwane są one wielkościami sterującymi (sterowaniami).

Za pojęcia pierwotne (których nie definiujemy) przyjmujemy pojęcie środowiska i układu fizycznego. Układem nazywać będziemy umownie wyodrębniony ze środowiska układ fizyczny lub jego część.

Wielkości charakteryzujące oddziaływanie środowiska na wyodrębniony układ nazywać będziemy wymuszeniami lub wielkościami (sygnałami) wejściowymi. Wymuszenia dzielimy na wielkości sterujące (sterowania) i wielkości zakłócające (zakłócenia). Wielkościami sterującymi nazywamy wielkości zmieniane celowo tak, aby osiągnąć pożądane zachowanie układu, a wielkościami zakłócającymi wielkości podlegające zmianom przypadkowym (losowym).

Wielkości charakteryzujące oddziaływanie układu na środowisko nazywać będziemy odpowiedziami lub wielkościami (sygnałami) wyjściowymi układu.

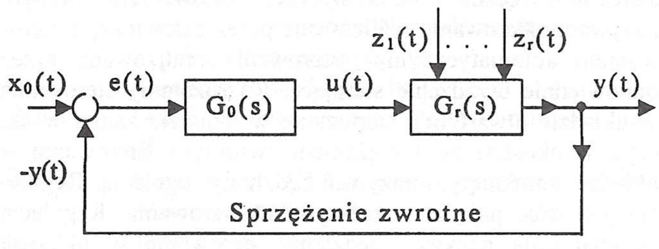
Stanem układu nazywać będziemy najmniejszy liczebnie zbiór wielkości, którego znajomość w chwili początkowej t_0 oraz znajomość wymuszeń w przedziale $(t_0,t]$ pozwala wyznaczyć stan i odpowiedzi układu w dowolnej chwili $t > t_0$. Dla szeroki klasy układów dynamicznych znajomość stanu układu w chwili początkowej t_0 oraz; wymuszenia $u(t)$, $t \geq t_0$ pozwala wyznaczyć stan oraz odpowiedź tego układu dla $t > t_0$.

2.1. Istota i definicja układu regulacji automatycznej

Układem regulacji automatycznej nazywać będziemy układ ze sprzężeniem zwrotnym, który samoczynnie (bez udziału człowieka) zapewnia pożądany przebieg wybranych wielkości charakteryzujących proces, zwanych wielkościami regulowanymi [9].

W układzie regulacji automatycznej wyróżnić można obiekt regulacji i regulator (urządzenie sterujące). Obiektem regulacji (obiektem) nazywać będziemy proces technologiczny lub urządzenie, w którym zachodzi proces podlegający regulacji.

Regulatorem nazywać będziemy urządzenie, które wykorzystując różnice miedzy odpowiednimi wielkościami zadanymi i mierzonymi tak oddziałuje za pomocą wielkości sterujących na obiekt, aby wielkości regulowane miały pożądany przebiec Schemat blokowy układu regulacji automatycznej jednej wielkości regulowanej y(t) przedstawia rys. 1.



Rys.1 Schemat blokowy układu regulacji automatycznej

W schemacie tym obiekt jest reprezentowany przez człon o transmitancji operatorowej $G_0(s)$, a regulator - przez człon o transmitancji operatorowej $G_r(s)$. Porównanie wielkości regulowanej y(t) z jej wartością zadana $x_0(t)$ (wielkością zadającą lub wielkością odniesienia) dokonuje się w węźle sumacyjnym. Różnicę $e(t) = x_0(t) — y(t)$ nazywamy uchybem regulacji. Układ regulacji automatycznej pracuje dobrze (idealnie), jeżeli mimo działających na obiekt zakłóceń $z_1(t)$, $z_2(t)$, ..., $z_r(t)$ uchyb regulacji e(t) jest możliwie mały (teoretycznie równy zeru). Podstawowym celem układu regulacji automatycznej jest więc samoczynne zerowanie uchybu regulacji, wywołanego zmianą $x_0(t)$ lub działających na obiekt zakłóceń $z_1(t)$, $z_2(t)$, ..., $z_r(t)$. Zadaniem regulatora jest wytworzenie na podstawie e(t) takiego sygnału sterującego (sterowania) u(t), aby uchyb regulacji teoretycznie zmalał do zera.

2.2. Klasyfikacja układów regulacji automatycznej

Układy regulacji automatycznej można klasyfikować według różnych kryteriów, takich jak: liniowość, liczba wejść i wyjść, charakter sygnałów, zadania układu, zdolność do samoczynnego dopasowywania parametrów i charakterystyk do zmieniających się właściwości obiektów i zakłóceń itp.

Ze względu na cechę (właściwość) liniowości układy regulacji automatycznej dzielimy na:

1) liniowe;
2) nieliniowe.

Układ regulacji automatycznej będziemy nazywać liniowym, jeżeli spełnia on zasadę superpozycji.

Układ spełnia zasadę superpozycji [9], jeżeli odpowiedź na wymuszenie (1).

$$u = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \qquad (a_i) - \text{liczby rzeczywiste} \qquad (1)$$

będące kombinacją liniową wymuszeń $u_1, u_2 ..., u_m$, równa się kombinacji liniowej (2).

$$y = \sum_{i=1}^{m} a_i y_i \qquad (2)$$

odpowiedzi $y_1, y_2, ..., y_m$, dla y_i (i = 1, 2, ..., m) są odpowiedziami tego układu na wymuszenie u_i.

Układy liniowe opisane są liniowymi równaniami algebraicznymi, różniczkowymi (zwyczajnymi lub cząstkowymi), różnicowymi, całkowymi czyli operatorami liniowymi. Łatwo wykazać, że warunkiem koniecznym, ale nie dostatecznym, liniowości układu jest liniowość jego charakterystyk statycznych.

Układ regulacji automatycznej nazywać będziemy nieliniowym. Jeżeli nie spełnia on zasady superpozycji. Układy nieliniowe opisane są nieliniowymi równaniami algebraicznymi, różniczkowymi (zwyczajnymi lub cząstkowymi), różnicowymi, całkowymi czyli operatorami nieliniowymi.

Ze względu na liczbę wejść i wyjść (wielkości regulowanych) układy regulacji automatycznej dzielimy na:

1) układy o jednym wejściu i jednym wyjściu;
2) układy o wielu wejściach i wielu wyjściach.

Ze względu na liczbę zmiennych niezależnych operatorów opisujących układy, układy te dzielimy na:

1) układy jednowymiarowe;
2) układy wielowymiarowe.

Układy jednowymiarowe są opisywane operatorami jednej zmiennej niezależnej, którą zwykle jest czas ciągły (układy ciągłe) lub dyskretny (układy dyskretne).

Układy wielowymiarowe są opisywane operatorami zależnymi od przynajmniej dwóch zmiennych niezależnych.

Ze względu na charakter sygnałów układy regulacji automatycznej dzielimy na:

1) układy ciągłe;
2) układy dyskretne.

Układami ciągłymi nazywamy układy, w których sygnały mają charakter ciągły. Dynamiczne układy ciągłe są zwykle opisane równaniami różniczkowymi zwyczajnymi lub cząstkowymi.

Układami dyskretnymi nazywamy układy, w których przynajmniej jeden sygnał ma charakter dyskretny. Dynamiczne układy dyskretne są zwykle opisane równaniami różnicowymi.

Ze względu na zadanie, jakie mają spełniać, układy regulacji automatycznej dzielimy na:

1) układy regulacji stałowartościowej (stabilizacji automatycznej);
2) układy regulacji programowej;
3) układy regulacji nadążnej (układy nadążne lub śledzące);
4) układy regulacji ekstremalnej.

Układami regulacji stałowartościowej nazywamy układy, których wielkość zadająca $x_0(t)$ ma stałą wartość.

Układami regulacji programowej nazywamy układy, których wielkość zadająca $x_0(t)$ jest znaną z góry funkcją czasu ($x_0(t)$ zmienia się według znanego z góry programu).

Układami regulacji nadążnej nazywamy układy, których wielkość zadająca $x_0(t)$ nie jest znaną z góry funkcją czasu, ale zależy od zjawisk występujących na zewnątrz układu. W układzie nadążnym wielkość regulowana $y(t)$ nadąża za zmianami $x_0(t)$ (śledzi zmiany $x_0(t)$).

Układami regulacji ekstremalnej nazywamy układy, w których wielkości regulowane przybierają wartości ekstremalne. Regulację ekstremalną stosuje się do obiektów o charakterystykach statycznych ekstremalnych, tzn. będących krzywymi mającymi maksima lub minima.

Ze względu na zdolność do samoczynnego dopasowywania parametrów i charakterystyk do zmieniających się właściwości obiektów i zakłóceń, układy regulacji automatycznej dzielimy na:

1) układy adaptacyjne;
2) układy zwykłe (nieadaptacyjne).

Układami adaptacyjnymi nazywamy układy mające zdolności do samoczynnego dopasowywania parametrów i charakterystyk do zmieniających się właściwości obiektów i zakłóceń.

Przyjmując za kryterium jakości (wskaźnik jakości) układów regulacji automatycznej funkcję Q możemy układy te podzielić na:

1) optymalne;
2) nieoptymalne.

Układami optymalnymi nazywamy układy zapewniające ekstremalną (maksymalną lub minimalną) wartość wskaźnika jakości Q, a układami nieoptymalnymi układy, które nie zapewniają ekstremalnej wartości tego wskaźnika. Ze względu na sposób realizacji sterowania układy dzielimy na:

1) układy jednowarstwowe;
2) układy wielowarstwowe.

W układach wielowarstwowych (zwanych również układami wielopoziomowymi lub hierarchicznymi) występują przynajmniej dwie warstwy (poziomy). W typowym układzie wielowarstwowym występuje warstwa stabilizacji, warstwa optymalizacji (lub adaptacji) i warstwa koordynacji. Regulator najniższej warstwy (poziomu) stabilizacji stabilizuje wielkość regulowaną na zadanym poziomie, który jest wyznaczony przez regulator warstwy optymalizacji (lub adaptacji). Regulator (komputer sterujący) warstwy najwyższej koordynuje współdziałanie poszczególnych regulatorów lokalnych.

Podstawowym problemem techniki sterowania jest wyznaczenie przyszłych przebiegów zmiennych procesowych. Sterowanie takie nazywamy sterowaniem predykcyjnym. Predykcja tych zmiennych umożliwia realizację regulacji optymalnej lub sterowania optymalnego tych zmiennych. Sterowanie predykcyjne stanowi podstawę projektowania wielu współczesnych algorytmów sterowania obiektami z czasem ciągłym lub dyskretnym. Predykcja taka może bazować wyłącznie na znajomości poprzednich wartości zmiennej procesowej, której przyszłe wartości należy wyznaczyć.

2.3. Opis układu dynamicznego w przestrzeni stanów

Przedmiotem naszego zainteresowania są układy dynamiczne. Cechą charakterystyczną fizycznych układów dynamicznych jest zdolność do akumulowania energii. Oznacza to, że jeżeli na układ dynamiczny działa sygnał wejściowy $u(t)$, to znajomość tego sygnału w chwili $t = t_0$ nie wystarcza do określenia sygnału wyjściowego $y(t_0)$. Na wartość tego sygnału w chwili t_0 wpływa bowiem, również przebieg sygnału $u(t)$ w przeszłości, dla $t < t_0$, decydujący o nagromadzonej w układzie energii. Aby odciąć się od przeszłości, wprowadza się pojęcie stanu. Stan jest to minimalna liczba danych charakteryzująca przeszłość układu dynamicznego i umożliwiająca jednoznaczne określenie jego zachowanie się w przyszłości (pod warunkiem znajomości przyszłych sygnałów wejściowych).

W przypadku ogólnym przebieg wielkości (sygnałów) w czasie w układzie dynamicznym zależy nie tylko od wartości wymuszeń w danej chwili, ale również od wartości tych wymuszeń w przeszłości, a w pewnych przypadkach nawet w przyszłości. Układ dynamiczny ma więc pamięć, w której są gromadzone skutki przeszłych oddziaływań na układ. Dla reprezentacji tej pamięci układ wprowadza się pojęcie stanu.

Stanem procesu (układu) [9] nazywać będziemy zbiór liniowo niezależnych wielkości $x_1, x_2, \dots x_n$ określających w pełni skutki przeszłych oddziaływań na układ, który jest wystarczający do wyznaczenia przebiegu procesu w przyszłości. Wielkości $x_1, x_2, \dots x_n$ nazywać będziemy zmiennymi (współrzędnymi) stanu.

Załóżmy, że modelem matematycznym układu dynamicznego jest równanie różniczkowe zwyczajne rzędu n-tego

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = u(t) \tag{3}$$

Znajomość prawej strony równania (3), modelującej sygnał wejściowy $u(t)$, oraz warunków początkowych $y(t_0),\dots,y^{(n-1)}(t_0)$ w liczbie równej rzędowi równania, określa jednoznacznie rozwiązanie, czyli sygnał wyjściowy układu $y(t)$. Można więc stwierdzić, że warunki początkowe określają stan układu w chwili t_0.

Każde równanie różniczkowe zwyczajne rzędu n-tego można sprowadzić do postaci normalnej, czyli przedstawić w postaci układu n równań różniczkowych rzędu pierwszego

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1,\dots,x_n;u_1,\dots,u_m;t) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1,\dots,x_n;u_1,\dots,u_m;t) \end{aligned} \tag{4}$$

przy czym $x_i \equiv x_i(t)$, $u_i \equiv u_i(t)$.

Znajomość zmiennych x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) w dowolnej chwili t_0 oraz sygnałów $u_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) dla $t \geq t_0$ umożliwia określenie zachowania się układu dla wszystkich chwil stanu układu i stąd są nazywane współrzędnymi stanu.

Zapis równań (4) można przedstawić w postaci symboliki wektorowej.

$$\frac{dx}{dt} = x' = f(x, u, t) \tag{5}$$

z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$, przy czym: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$; $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$; $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$; n – wymiar wektora stanu, m – wymiar wektora sygnałów sterujących, T – transpozycja (zamiana dwóch elementów w zbiorze uporządkowanym).

Zapis (5) jest bardzo dogodny. Umożliwia bowiem stosowanie aparatu matematycznego rachunku macierzystego i wektorowego.

Wektor x, którego elementami są współrzędne stanu, nazywa się wektorem stanu, a przestrzeń n-wymiarowa o współrzędnych x_i (i=1, 2, ..., n) nosi nazwę przestrzeni stanu. Zmiany wektora stanu z biegiem czasu tworzą w przestrzeni stanu krzywą nazywaną trajektorią stanu.

Sygnały $y \equiv y(t)$, które zjawiają się na wyjściu układu, są pewnymi funkcjami współrzędnych stanu, mogą być również zależne bezpośrednio (nie przez współrzędne stanu) od sygnałów wejściowych u. Równania

$$y = f_y(x, u) \qquad (6)$$

nazywają się równaniami wyjścia układu dynamicznego, przy czym: $y = (y_1, y_2, ..., y_s)^T$; $f_y = (f_{y1}, f_{y2}, ..., f_{ys})^T$; s- wymiar wektora sygnałów wyjściowych. Zauważmy, że są to równania algebraiczne, bowiem cały opis dynamiki układu jest zawarty w równaniu stanu (5).

W ten sposób pełny opis układu obejmuje równania (5) oraz (6).

Linearyzacja równań (5) i (6) w otoczeniu wybranego punktu (x_0, u_0) daje w wyniku

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial u}u + \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (7)$$

$$y = \frac{\partial f_y}{\partial x}x + \frac{\partial f_y}{\partial u}u \qquad (8)$$

przy czym:

Ogólnie, równania (7) i (8) obowiązują w pewnym małym zakresie zmian wielkości x oraz u.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0\\u=u_0}}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{y1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_{y1}}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial f_{y1}}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial f_{yp}}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_{yp}}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial f_{yp}}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0\\u=u_0}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}, \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial u_2}, \ldots, & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0\\u=u_0}}$$

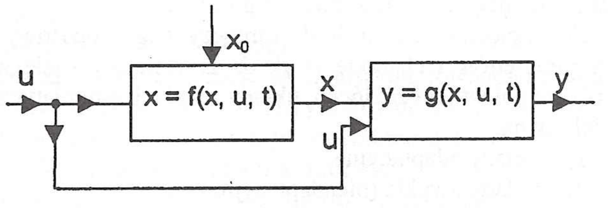
$$\frac{\partial f_y}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{y1}}{\partial u_1}, & \frac{\partial f_{y1}}{\partial u_2}, \ldots, & \frac{\partial f_{y1}}{\partial u_m} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial f_{yp}}{\partial u_1}, & \frac{\partial f_{yp}}{\partial u_2}, \ldots, & \frac{\partial f_{yp}}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0\\u=u_0}}$$

Zwykle nie wszystkie zmienne stanu są dostępne (bezpośrednio mierzalne), czyli wektor stanu x nie jest zarazem wektorem odpowiedzi y układu. Dla pełnego opisu procesu potrzebne jest jeszcze równanie wiążące **y** z **x** i z wektorem wymuszenia **u** o postaci.

$$y = g(x, u, t) \qquad (9)$$

Równanie (5) nazywać będziemy równaniem stanu układu, a równania (6) i (9)– równaniami wyjścia tego układu.

Równaniom (5), (6) i (9) odpowiada schemat blokowy układu przedstawiony na rys.2.



Rys.2 Schemat blokowy układu dynamicznego w præstrzeni stanów.

W przypadku równań liniowych o stałych współczynnikach macierze pochodnych cząstkowych są macierzami współczynników stałych a równania uzyskują postać:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \qquad (10)$$

$$y = Cx + Du \qquad (11)$$

przy czym A, B, C, D – macierze współczynników: (n × n), (n × m), (p × n), (p × m).

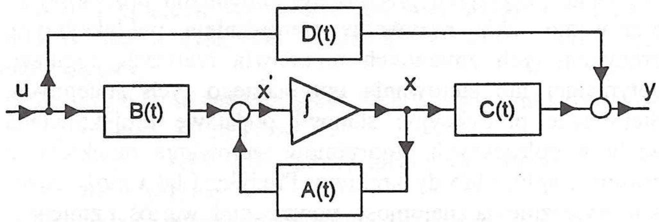
Dla układów liniowych funkcje wektorowe f i g są funkcjami liniowymi x i u. Dla układów liniowych niestacjonarnych (o parametrach zależnych od czasu t) równania przybierają postać:

$$x' = A(t)\, x + B(t)\, u, \qquad (12)$$

$$y = C(t)\, x + D(t)\, u, \qquad (13)$$

przy czym macierze procesu A(t), wymuszenia (wejścia) B(t), odpowiedzi (wyjścia) C(t) i transmisyjna D(t) mają odpowiednio wymiary n × n, n × m, p × n, p × m i elementy zależne od czasu t.

Równaniom (12 i 13) odpowiada schemat blokowy liniowego niestacjonarnego macierzowego układu w przestrzeni stanów (rys3).



Rys.3. Schemat blokowy liniowego niestacjonarnego macierzowego układu dynamicznego w przestrzeni stanów.

gdzie: u – wektor sterowania (m × 1)
x – wektor zmienny stanu (n × 1)
y – wektor sygnałów wyjściowych (p × 1)
A(t) - macierz stanu (n × n)

B(t) - macierz wejść (n × m)
C(t) - macierz wyjść (p × n)
D(t) - macierz transmisyjna (p × m)

Dla nieliniowych układów (procesów) dyskretnych równanie stanu i równanie wyjścia mają postać

$$x_{i+1} = f(x_i, u_i, i) \qquad (i = 0, 1, ...), \qquad (14)$$

$$y_i = g(x_i, u_i, i) \qquad (15)$$

przy czym $x_i \in R^n$ jest wektorem stanu, $u_i \in R^m$ jest wektorem wymuszenia, a $y_i = R^p$ jest wektorem odpowiedzi w chwili i.

W przypadku liniowego układu dyskretnego niestacjonarnego równania (14, 15) przybierają postać

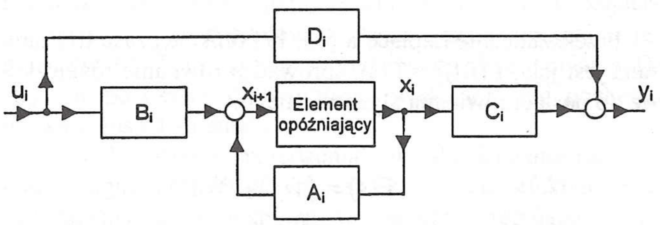
$$x_{i+1} = A_i x_i, + B_i u_i \qquad (i = 0, 1, ...), \qquad (16)$$

$$y_i = C_i x_i, + D_i u_i \qquad (17)$$

przy czym A_i, B_i, C_i, D_i są macierzami o wymiarach odpowiednio (n × n) (n × m) (p × n) (p × m) oraz elementach zależnych od i.

Dla liniowych układów dyskretnych stacjonarnych elementy macierzy A, B, C, D są stałe i nie zależą od i.

Równaniom (16 i 17) odpowiada schemat blokowy układu przedstawiony na rys.4.



Rys.4 Schemat blokowy liniowego niestacjonarnego dyskretnego układu dynamicznego w przestrzeni stanów.

3. Modele matematyczne układów automatycznej regulacji.

3.1. Synteza układu regulacji automatycznej.

Układ automatycznej regulacji można sprowadzić do trzech podstawowych układów:

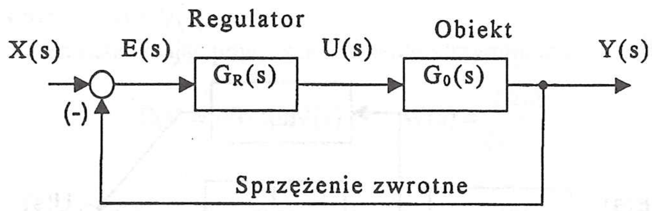
- układu otwartego w którym zakłócenie nie będzie korygowane w trakcie pracy układu,
- układu zamkniętego (z sprzężeniem zwrotnym) gdzie eliminuje się zakłócenia,
- układu kombinowanego.

W układach sterowania otwartego (kompensacyjnego) trudna lub wręcz niemożliwa jest praktyczna realizacja regulatora, która wytwarzałaby sygnał dokładnie kompensujący wpływ zakłóceń. W przypadkach stosunkowo prostych tam gdzie ma przeważający wpływ jedno lub niewiele zakłóceń, zastosowanie układu kompensacji może być uzasadnione. Działanie układu kompensacji może być szybsze niż działanie układów zamkniętych. Układ w układzie kompensacji ingeruje już w chwili zjawienia się zakłóceń, podczas gdy w układzie zamkniętym regulator działa dopiero wtedy, kiedy zakłócenie wywarło już wpływ na obiekt sterowany. To opóźnienie może spowodować zjawienie się w układzie zamkniętym niekontrolowanych drgań wielkości sterowanej.

Olbrzymią zaletą układów ze sprzężeniem zwrotnym jest to, że regulator rozpoczyna swoją działalność po otrzymaniu sygnału zakłócenia lub odchylenia między sygnałem wyjściowym a jego przebiegiem żądanym.

Istnieją także układy regulacji kombinowanej, które łączą zalety sterowania otwartego i zamkniętego. W układach tych kompensuje się w przybliżeniu podstawowe zakłócenia, natomiast eliminacją małych zakłóceń spowodowanych wieloma czynnikami przypadkowymi zapewnia układ regulacji ze sprzężeniem zwrotnym.

Schemat blokowy najprostszego układu zamkniętego automatycznej regulacji przedstawiono na rys.5.



Rys. 5. Schemat ideowy zamkniętego układu regulacji automatycznej

Układ składa się:

a) z regulatora, którego zadanie polega na utrzymaniu wielkości regulowanej blisko wielkości zadającej,
b) z obiektu regulacji u którego jedna z kilku wielkości fizycznych podlega regulacji,
c) ujemnego sprzężenia zwrotnego, którego jest środkiem utrzymania pewnego poziomu bliskiego równowagi.

Automatyczna regulacja ma na celu prowadzenie układu według określonego programu, niezależnie od wpływu czynników zakłócających. Struktura układu musi być inwariantna (odporna) na wpływ zakłóceń i czuła na wszystkie odchylenia od założonego programu.

Na wejście układu podawany jest sygnał wejściowy X(s). Sygnał odchyłki (błędu) regulacji E(s) = X(s) - Y(s) steruje regulatorem, którego sygnał wyjściowy U(s) steruje obiektem regulacji. Sygnał wyjściowy Y(s) może sterować dowolnym elementem wykonawczym.

Układ regulacji automatycznej pracuje dobrze (idealnie), jeśli mimo działających na obiekt zakłóceń uchyb regulacji E(s) jest możliwie mały (teoretycznie równy zera). Podstawowym celem układu regulacji automatycznej jest więc samoczynne zerowanie uchybu regulacji, wywołanego zmianą X(s) lub działających na obiekt zakłóceń. Zadaniem regulatora jest wytworzenie na podstawie E(s) takiego sygnału sterującego (sterowania) U(s), aby uchyb regulacji teoretycznie zmalał do zera.

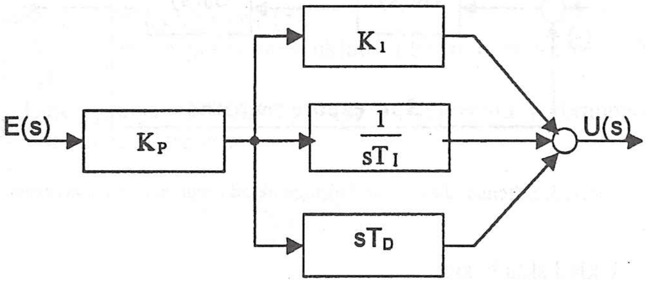
W naszych rozważaniach będziemy analizowali układy regulacji ze sprzężeniem zwrotnym. Analizować będziemy szczegółowo układy regulacji z wykorzystaniem regulatora PID (proporcjonalno, całkująco, różniczkującego), jak również stosować będziemy opis układu dynamicznego w przestrzeni stanów.

3.2. Podstawowe typy regulatorów PID

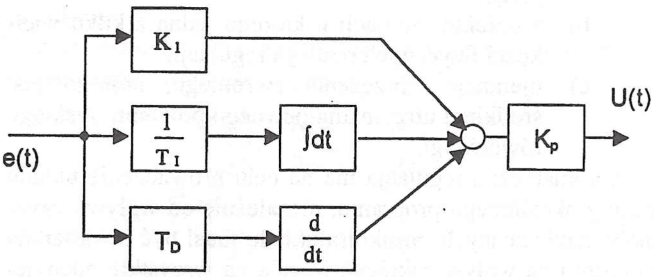
W dotychczasowych systemach automatyki przemysłowej regulator PID miał powstać z osobnego regulatora sprzętowego lub mikroprocesorowego. W systemach auomatyki z wykorzystaniem systemów komputerowych jest to na ogół specjalna uniwersalna procedura, która musi być właściwie sparametryzowana w programie użytkowym. Na rys.6 przedstawiony został model regulatora PID w postaci operatorowej, czasowej i tabeli, gdzie przedstawiono różne typy regulatorów w zależności od istnienia paranetrów mających wpływ na sposób regulacji.

Na rys. 6 przedstawiono podstawowy regulator PID zrealizowany jako równoległe połączenie elementów proporcjonalnego (P), całkującego (I) i różniczkującego (D).

a)



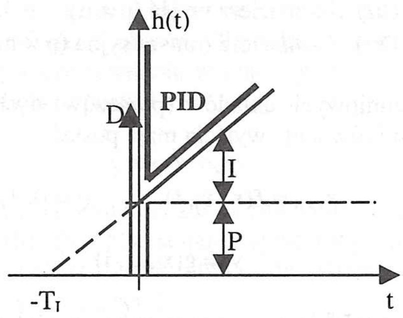
b)



c)

	K_I	K_p	T_I	T_D
I	0	+	+	0
P	1	+	∞	0
PD	1	+	∞	+
PI	1	+	+	0
PID	1	+	+	+

Rys.6. Struktura uniwersalnego regulatora PID
a) postać operatorowa b) postać czasowa c) tabela zależności



Rys.7. Funkcja przejścia idealnego regulatora PID

Na rys.7 przedstawiono funkcje przejścia (transmitancji) idealnego regulatora, gdy na wejściu podawana jest funkcja impulsowa $\delta(t)$ (Diraca) o jednostkowej powierzchni.

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t) = 1; \qquad \varepsilon > 0$$
$$\delta(0) = \infty \tag{18}$$
$$\delta(t) = 0 \qquad \text{dla wszystkich} \quad t \neq 0$$

Transmitancja regulatora pokazana na rys.6a przyjmuje postać

$$G_{PID}(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D\right) \tag{19}$$

Przekształcenie Laplace'a [13, 17] funkcje czasu f(t) zapisana jest jako L[f(t)] = F(s), sprowadza równanie różniczkowe do postaci równania algebraicznego.

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

przy czym przyjmuje się, że sygnał f(t) istnieje tylko do czasów dodatnich $0 \leq t \leq \infty$, (e – podstawa logarytmu naturalnego), zaś $s = \sigma + j\omega$ jest zmienną zespoloną ($\omega = 2\Pi f$ jest pulsacją o częstotliwości f). Jeżeli f(t) jest skokiem jednostkowym rozpoczynamy całkowanie bezpośrednio po punkcie nieciągłości, który występuje przy $t = 0$ i wtedy otrzymujemy dla skoku jednostkowego L:

$$L = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Zatem przekształcenie Laplace'a odwzorowuje funkcję określoną w dziedzinie czasu w funkcję określoną w dziedzinie zmiennej s.

Dla funkcji impulsowej (18) całkowanie musi rozpocząć się przy $t=0^-$. Zatem

$$L[\delta(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t) = 1$$

ponieważ $e^{-st} = 1$ dla $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$, gdy $\varepsilon \to 0$.

Transformata odwrotna h(t) z rys.6a przedstawiono na rys.7.

$$h(t) = K_p\left(1+\frac{1}{T_I}+T_D\delta(t)\right) \qquad t\geq 0. \qquad (20)$$

Równanie 20 można przekształcić do innej postaci, mianowicie:

$$G_{PID}(s) = K_p\left(1+\frac{1}{sT_I}+sT_D\right)=\frac{K_p}{sT_I}\left(1+sT_I+s^2T_IT_D\right) \qquad (21)$$

Parametry K_p, T_I, T_D należy uważać za dające się nastawić stałe w pewnych zakresach w danym regulatorze. Stałe te noszą następujące nazwy

K_p - współczynnik wzmocnienia

$\frac{1}{K_p}$ 100% = P – zakres proporcjonalności

T_I [s, min] - czas zdwojenia

T_D [s, min] - czas wyprzedzenia

Przez „zakres proporcjonalności" rozumie się procentową w stosunku do pełnego zakresu zmianę wielkości X potrzebną do wywołania pełnej, to jest o pełen zakres, zmiany wielkości Y.

„Czas zdwojenia" [5] wyraża intensywność działania całkującego; jest to czas potrzebny na to, aby przy wymuszeniu skokowym sygnał będący rezultatem działania całkującego stał się równy sygnałowi z części proporcjonalnej w regulatorze PI. Tym samym sygnał łączny (bez działania D) staje się po czasie T_I dwukrotnie większy i stąd pochodzi nazwa „czas zdwojenia".

Stała T_D „czas wyprzedzenia" określa działanie różniczkujące regulatora. Jej nazwa jest uzasadniona efektami ekstrapolacyjnymi, osiąganymi w układzie regulacji przez wprowadzenie pochodnej. Wartość T_D można zdefiniować następująco:

T_D jest to czas [5], po którym przy włączeniu na wejściu regulatora PD sygnału narastającego liniowo sygnał związany z działaniem proporcjonalnym zrówna się z sygnałem pochodzącym od działania różniczkowego.

W pracy [5, 6, 18] przedstawiono różnego rodzaju regulatory pneumatyczne, hydrauliczne, elektryczne i elektroniczne typu P, PI, PD i PID o wyjściu ciągłym. W artykule będziemy analizować analogowy i cyfrowy model komputerowego regulatora PID.

Regulator PID jest najbardziej optymalnym regulatorem do sterowania przetwornikiem elektropneumatycznym w porównaniu z regulatorem typu PI i PD ponieważ:

- regulator PI zapewnia dobrą regulację tylko przy zakłóceniach o małych częstotliwościach.,
- regulator PD zapewnia szersze pasmo regulacji niż regulator PI, lecz gorszą jakość regulacji przy małych częstotliwościach,
- regulator PID łączy w sobie zalety obu tych regulatorów.

3.3. Zasada budowy regulatorów oparta na sprzężeniu zwrotnym

Podstawą budowy regulatorów są wzmacniacze bezinercyjne o dużym wzmocnieniu. Działanie całkujące lub różniczkujące uzyskuje się przez zastosowanie w tych wzmacniaczach odpowiednich sprzężeń.

Jeśli za podstawę rozpatrywanego rodzaju regulatora przyjmujemy strukturę przedstawioną na rys.8, transmitancja. (stosunek sygnału wyjściowego do wejściowego) obiektu i regulatora określamy w następujący sposób to:

$$\frac{U(s)}{W(s)} = G_0(s) \quad ; \quad \frac{V(s)}{U(s)} = G_r(s)$$

dodatkowo równanie dla węzła sumacyjnego ma postać: $W(s) = E(s) \pm V(s)$.

Przekształcając powyższe równanie otrzymujemy:

$$E(s) = W(s) \pm V(s) \quad ; \quad W(s) = \frac{U(s)}{G_0(s)}$$

$$U(s)=G_0(s)\,W(s) \quad ; \quad V(s)=G_r(s)\,U(s)$$

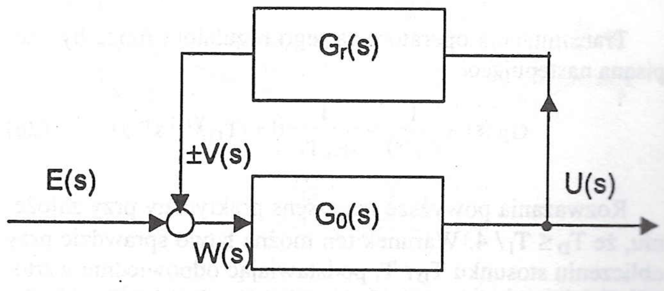
Ponieważ $G_R = \frac{U(s)}{E(s)}$ określa transmitancję (funkcję przejścia) elementu ze sprzężeniem zwrotnym podstawiając odpowiednie wartości otrzymujemy:

$$G_R = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{G_0(s)\,W(s)}{W(s)\pm V(s)} = \frac{G_0(s)}{1\pm\frac{V(s)}{W(s)}} = \frac{G_0(s)}{1\pm\frac{G_r(s)\,U(s)}{W(s)}} =$$

$$= \frac{G_0}{1\pm\frac{G_0(s)\,G_r(s)U(s)}{U(s)}} = \frac{G_0(s)}{1\pm G_0(s)\,G_r(s)}$$

W przypadku sprzężenia zwrotnego ujemnego (stosowanego w regulatorach opartych na sprzężeniu zwrotnym) obowiązuje w mianowniku znak + ; mamy wówczas transmitancję tego regulatora wyrażoną zależnością:

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)\,G_r(s)} \qquad (22)$$



Rys.8. Prosty układ ze sprzężeniem zwrotnym wykorzystany do realizacji regulatorów

Założymy, że transmitancja sprzężenia zwrotnego przyjmuje postać

$$G_r(s) = K_r; \tag{23}$$

Wówczas dla $G_0(s)=K_0$ transmitancja

$$G_R(s) = \frac{K_o}{1 + K_o K_r} \tag{24}$$

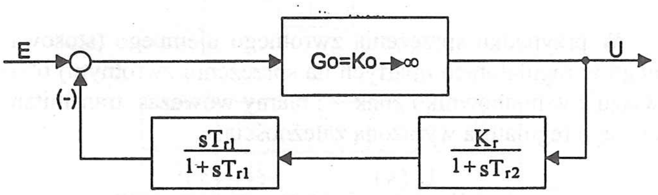
Ponadto jeśli uwzględnimy, że K_o jest bardzo duże (bardzo duże wzmocnienie), to można napisać:

$$G_R(s) \approx \frac{1}{K_r} \approx \frac{1}{G_r(s)} \tag{25}$$

Z powyższego wzoru wynika, że funkcja przejścia układu pokazanego na rys.8 jest w przybliżeniu równa odwrotności funkcji przejścia elementu sprzężenia zwrotnego. Aby uzyskać element różniczkujący, należy stosować jako element sprzężenia zwrotnego element całkujący i odwrotnie, by uzyskać element całkujący, należy zastosować jako element sprzężenia zwrotnego element różniczkujący.

Na rys.9 przedstawiono schemat blokowy regulatora PID. Sprzężenie zwrotne zrealizowane jest przez dwa szeregowo połączone człony: różniczkujący rzeczywisty $\frac{sT_{r1}}{1+sT_{r1}}$ i inercyjny pierwszego rzędu (całkujący) $\frac{K_r}{1+sT_{r2}}$. Aby przebieg był zbliżony do własności regulatorów idealnych zakładamy bardzo duży współczynnik wzmocnienia w torze głównym regulatora.

$$G_0 = K_0 \to \infty \quad \text{i} \quad G_r = \frac{s\,T_{r1}\,K_r}{(1+sT_{r1})(1+sT_{r2})}$$



Rys.9 Schemat blokowy regulatora PID realizowany przy pomocy sprzężenia zwrotnego z członami inercyjno-różniczujacymi [16].

Transmitancja operatorowa tego regulatora może być zapisana następująco:

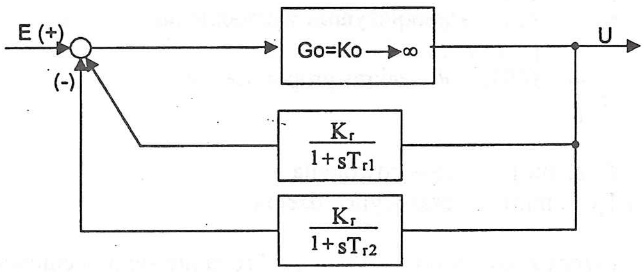
$$G_R(s) \cong \frac{1}{G_r(s)} = \frac{1}{sK_r T_{r1}}(1+sT_{r1})(1+sT_{r2}) \tag{26}$$

Rozważania powyższe mają sens praktyczny przy założeniu, że $T_D \leq T_I / 4$. Warunek ten można łatwo sprawdzić przy obliczeniu stosunku T_D / T_I podstawiając odpowiednie wartości T_{r1} dla układu różniczkującego i T_{r2} dla układu całkującego.

Dla regulatorów firmowych wzór (19) przyjęto następujące zależności [16]:

- zakres proporcjonalności $K_p = \frac{1}{K_r}\left(1+\frac{T_{r1}}{T_{r2}}\right)$
- czas całkowania $T_I = T_{r1} + T_{r2}$
- stała czasu różniczkowania $T_D = \frac{T_{r1} \times T_{r2}}{T_{r1} + T_{r2}}$

Na rys.10 przedstawiono schemat blokowy regulatora PID realizowany przy pomocy dwóch równoległych inercyjnych sprzężeń zwrotnych pierwszego rzędu.

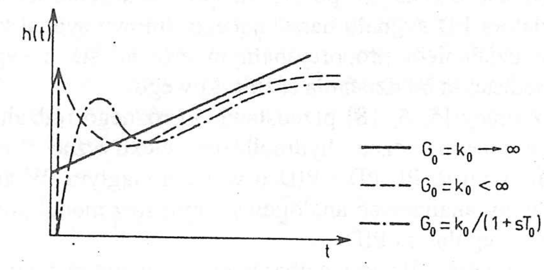


Rys.10. Schemat blokowy regulatora PID realizowany przy pomocy dwóch równoległych inercyjnych sprzężeń zwrotnych [16].

Transmitancję regulatora obliczamy z zależności

$$G_R(s) = \frac{1}{G_r(s)} = \frac{1}{\frac{K_r}{1+sT_{r2}} - \frac{K_r}{1+sT_{r1}}} = \frac{(1+sT_{r1})(1+sT_{r2})}{sK_r(T_{r1}-T_{r2})} \tag{27}$$

niech $T_D \leq T_I/4$ i $T_{r\,I} > T_{r\,2}$ wtedy przebiegi czasowe dla schematów blokowych regulatorów PID z rys. 9 i 10 przyjmują postać jak na rys.11.



Rys.11. Funkcja przejścia regulatora PID [16]

3.3. Nastawianie regulatorów

Zasady nastawiania regulatorów, które można spotkać wśród praktyków i w literaturze oparta jest na ogół na założeniu, że rodzaj regulatora (P, PI, PID) jest z góry określony i trzeba ustalić tylko najlepsze nastawy regulatora. Sytuacja ta odpowiada dużej części przypadków praktycznych, przynajmniej w odniesieniu do regulatorów uniwersalnych. Trzeba jednak rozporządzać choćby przybliżonymi wskazówkami, jaki rodzaj regulatora wybrać dla danego obiektu, zakłóceń i wymagań. W wielu przypadkach praktycznych spotykamy się z zadaniem regulacji, bez ścisłego sformułowania wymagań, zwłaszcza dynamicznych, wówczas droga przybliżona jest zupełnie wystarczająca. Zadaniem naszym staje się zatem przybliżone ustalenie właściwego rodzaju regulatora oraz takich jego nastaw, które zapewniają zadawalającą pracę całego układu.

Wybór rodzaju regulatora stosunkowo dogodnie jest przedstawić na podstawie charakterystyki częstotliwościowej obiektu regulacji.

Wychodzimy tu z dwóch warunków, które muszą być spełnione jednocześnie:

a) żądamy dostatecznie dużej wartości modułu transmitancji układu otwartego w ustalonym paśmie częstotliwości;
b) żądamy z dostatecznym zapasem stabilności układu zamkniętego,

Stwierdzono także potrzebę sformułowania zasad nastawiania regulatorów, do których użycia nie potrzeba byłoby dokonywać pomiarów właściwości dynamicznych obiektu. Po raz pierwszy zasady takie podali w 1942r Ziegler i Nichols w następującej postaci:

a) regulator zainstalowany przy obiekcie należy nastawić na działanie P (proporcjonalne) i zwiększać stopniowo jego współczynnik wzmocnienia K_p dochodząc do granicy stabilności;
b) w stanie wzbudzonym oscylacji należy zmierzyć ich okres t_{osc} oraz współczynnik wzmocnienia $K_p = K_{kr}$, przy którym oscylacje te wystąpiły;
c) zależnie od tego typu regulatora należy przyjąć:

dla regulatora P $K_p = 0{,}5\ K_{kr}$
dla regulatora PI $K_p = 0{,}45\ K_{kr}$, $T_I = 0{,}85t_{osc}$
dla regulatora PID $K_p = 0{,}6K_{kr}$, $T_I = 0{,}5t_{osc}$ $T_D = 0{,}12t_{osc}$

Zasady Zieglera i Nicholsa nie zapewniają określonego standardu jakości regulacji, bowiem ustalenie właściwości obiektu sprowadzone jest do dwóch tylko liczb K_{kr} oraz t_{osc}.

W literaturze spotkać można również nieco odmienne zasady nastawiania oparte o te same parametry charakterystyczne obiektu t_{osc} oraz K_{kr}. Według Pessena [5] sformułowanie dla regulatorów PID wielkości to:

$$K_p = 0{,}2K_{kr}, \qquad T_I = 0{,}33t_{osc} \qquad T_D = 0{,}5t_{osc}$$

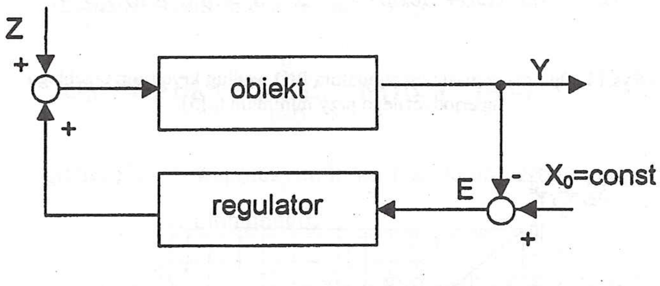
gdzie w stosunku do dawnych reguł zwiększono tu wpływ działania D regulatora. Znane też jest nastawianie regulatorów według cech przebiegu przejściowego. Opracowanie zasad nastawiania regulatorów, jest możliwe dla pewnych stałych warunków, przy czym najczęściej

a) rozpatruje się przebieg przejściowy w ustalonym punkcie układu;
b) wymuszenie zewnętrzne na ustalony kształt;
c) wymuszenie zewnętrzne jest doprowadzone do ustalonego punktu układu.

W wymienionych warunkach możemy ustalić jeszcze ocenę jakości przebiegu przejściowego, na przykład w postaci czasu regulacji, i wtedy dla ustalonego typu obiektu można wyznaczyć optymalne nastawy różnego rodzaju regulatorów. Trzeba podkreślić, że już zmiana miejsca doprowadzenia wymuszenia zewnętrznego, a tym samym bardziej zmiana jego kształtu, zmieni wartość oceny jakości przebiegu przejściowego; zmienia się zazwyczaj również nastawy optymalne, przy których osiągane jest eksteremum wybranej oceny.

Ponieważ wybór rodzaju oceny przebiegu przejściowego nie daje się ściśle uzasadnić, łatwo dojść do wniosku, że oparte o przebieg przejściowy zasady nastawiania regulatorów mimo pozornej ścisłości pozostają zasadami orientacyjnymi, a otrzymane według nich wartości nastaw nie muszą być przestrzegane z dużą dokładnością. Niemniej jednak tego typu zasady nastawiania odgrywają pozytywną rolę, ułatwiające projektantowi układu przybliżonej wybór parametrów.

Poniżej przytoczymy opis wytycznych wyboru nastaw regulatorów [5]. Wytyczne podamy dla układu jak na rys.12.

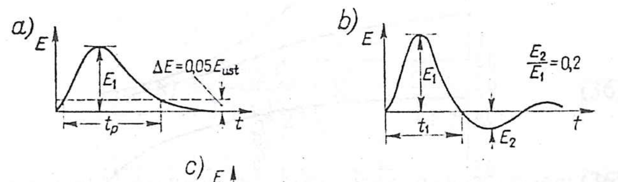


Rys.12 Schemat układu, dla którego ustalono optymalne nastawy regulatorów

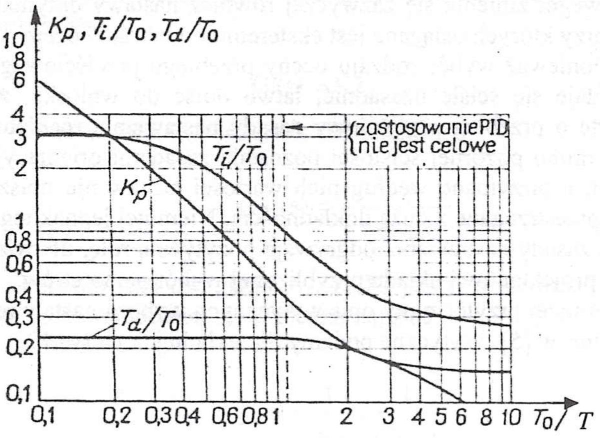
Na rys.12 dla X_0=const rozpatrujemy przebieg przejściowy odchyłki (błędu) E(t) przy przyłożeniu skokowego zakłócenia Z(t) w miejscu jak na rysunku, to jest na wejściu obiektu. Zakładamy, że obiekt ma transmitancję typu $G(s)=e^{-sT0}/(sT+1)$. Wartość T_0 określa skalę czasu, a T_0/T jest parametrem umożliwiającym porównanie różnych obiektów. Przyjmowane są trzy różne kryteria jakości:

1. Przebieg aperiodyczny, ze wskaźnikiem E_1 oraz t_p (rys.13a) Przy określeniu czasu t_p jako wartości E_{ust} przyjęto wartość uchybu jaka ustaliłoby się w układzie bez regulatora.
2. Przebieg oscylacyjny (rys.13b) z przeregulowaniem $E_2/E_1=20\%$
3. Przebieg oscylacyjny (rys.13c) z minimalną wartością całki kwadratu uchybu

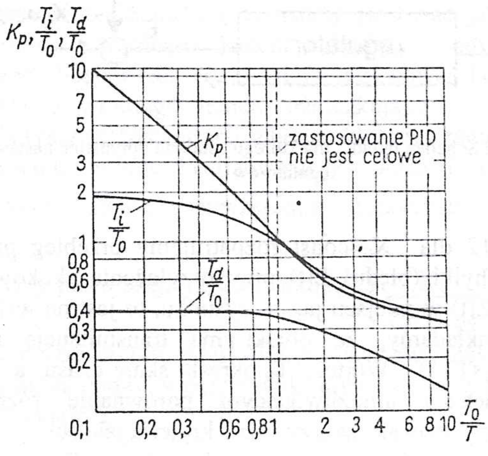
$$I = \int_0^\infty E^2(t)dt = I_{min}$$



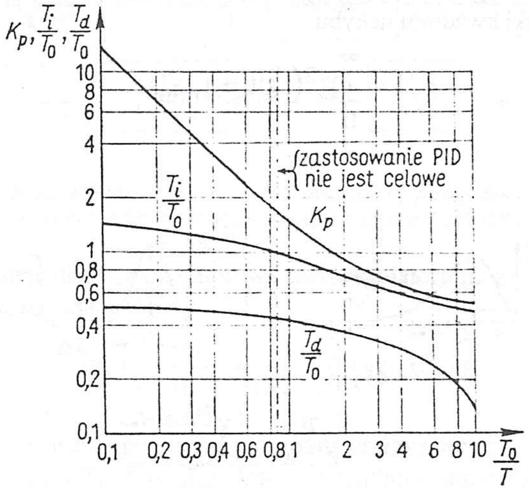
Rys.13 Określenie przebiegów optymalnych i oznaczenia ich wskaźników [5].
a) przebieg aperiodyczny
b) przebieg oscylacyjny z 20% przeregulowaniem
c) przebieg z minimum całki kwadratu uchybu



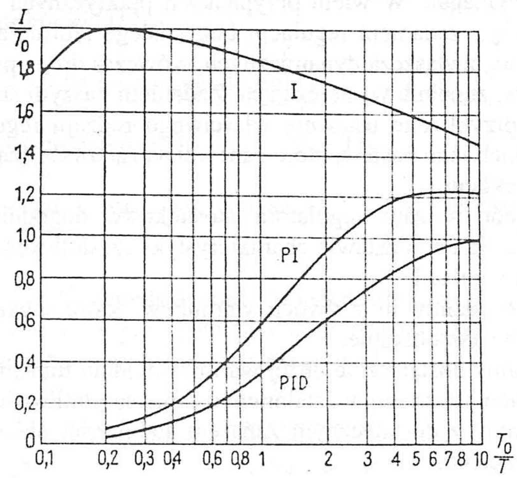
Rys.14 Optymalne nastawy regulatora PID według kryterium przebiegu aperiodycznego przy minimum t_p [5].



Rys.15 Optymalne nastawy regulatora PID według kryterium 20% przeregulowania i minimum czasu t_1 [5].



Rys.16 Optymalne nastawy regulatora PID według kryterium minimum całki kwadratu uchybu [5].



Rys.17 Wartość całki kwadratu uchybu I osiągane przy nastawianiu regulatorów na minimum tej całki [5].

Inne metody nastaw regulatorów to metoda częstotliwościowa i metody wskaźników całkowych. Przy stosowaniu metod częstotliwościowych dogodnie jest oceniać efektywność z jaką układ regulacji zmniejsza wpływ zakłóceń za pomocą wskaźnika regulacji.Wskaźnik regulacji jest funkcją częstotliwości $\omega=2\Pi f$ zakłóceń sinusoidalnych. Problemem tym nie będziemy się zajmować. Opisany jest on w pracy [11]

Metody wskaźników całkowych pozwalają na określenie nastaw regulatorów umożliwiających otrzymanie minimum następujących wskaźników dobroci regulacji:

- całki kwadratu uchybu regulacji (ISE – Integral of the Square Error)

$$ISE = \int_0^\infty [e(t)-e(\infty)]^2 dt \qquad (28)$$

- całki modułu uchybu regulacji (IAE – Integral of the Absolute value of the Error)

$$IAE = \int_0^\infty |e(t)-e(\infty)| dt \qquad (29)$$

- całki iloczynu czasu i modułu uchybu regulacji (ITAE – Integral of Time multiplied by the the Absolute value of the Error)

$$ITAE = \int_0^\infty t|e(t)-e(\infty)| dt \qquad (30)$$

W pracy [11] przedstawiono zestawienie nastaw regulatorów minimalizujących wymienione wskaźniki całkowe dla przypadku skokowej zmiany wartości zadanej i skokowej zmiany zakłócenia wprowadzonego na wejście obiektu o transmitancji

$$G(s)=\frac{k\cdot e^{-sT_0}}{1+sT}.$$

Metody nastawiania regulatorów w przypadku zakłóceń stochastycznych omówiono w pracy [5]

3.5 Cyfrowe wersje algorytmów PID

Odpowiednie zaprojektowanie regulatora dyskretnego pozwala na osiągnięcie wyników podobnych do wersji ciągłej. Idealne regulatory charakteryzują się bezinercyjnością członów oraz brakiem interakcji między nimi.

W realizacjach praktycznych transmitancja regulatora przyjmuje zwykle postać [16]:

$$G_R(s)=\frac{K_R}{1+sT_F}\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right) \tag{31}$$

Gdzie: T_F – stała czasowa filtru dolnoprzepustowego ograniczającego wysokie częstotliwości sygnału wejściowego.

Zakładają, że $T_F=\gamma T_2$, przekształcić można wzór (31) do postaci

$$G_R(s)=K_1\frac{1+sT_2}{1+\gamma T_2 s}\left(1+\frac{1}{sT_1}\right) \tag{32}$$

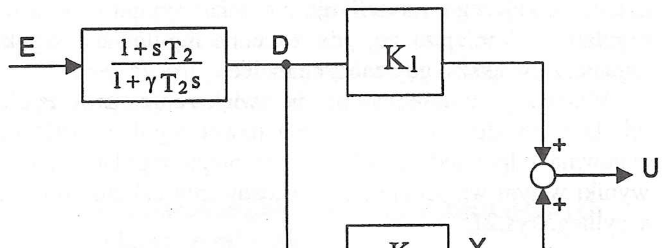
gdzie: $K_1=\frac{K_R T_1}{T_I}$ to wzmocnienie regulatora,

T_1 - rzeczywista stała całkowania,

T_2 - rzeczywista stała różniczkowania.

Schemat blokowy rzeczywistego układu regulatora PID przedstawia rys.18.

Na rys.18 można wyróżnić dwa charakterystyczne bloki:



Rys.18. Schemat blokowy rzeczywistego regulatora PID.

a) blok różniczkujący o transmitancji

$$G_D(s)=\frac{1+sT_2}{1+\gamma T_2 s};$$

c) blok całkujący o transmitancji

$$G_I(s)=\frac{K_1}{sT_1};$$

Dla układów cyfrowych stosujemy zamiast równań różniczkowych równania różnicowe. Zastępując różniczkę pierwszą różnicą, otrzymujemy postać dyskretną pochodnej:

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{x_n-x_{n-1}}{T} \tag{33}$$

gdzie: T – czas próbkowania

$$x_n=x(nT),$$
$$x_{n-1}=x(nT-T).$$

W przypadku idealnego regulatora PID można przedstawić równanie dyskretne w postaci [16].

$$U_n=K_P E_n+K_I\sum_{i=0}^{n}E_i+K_D(E_n-E_{n-1}), \tag{34}$$

gdzie: K_P – współczynnik wzmocnienia członu proporcjonalnego;

$K_I=\frac{K_P T}{T_i}$ K_I - stała wzmocnienia całkowania,

$K_D=\frac{K_P T_D}{T}$ K_D- stała wzmocnienia różniczkowania

Różnicę ΔU_n można opisać wzorem [16]

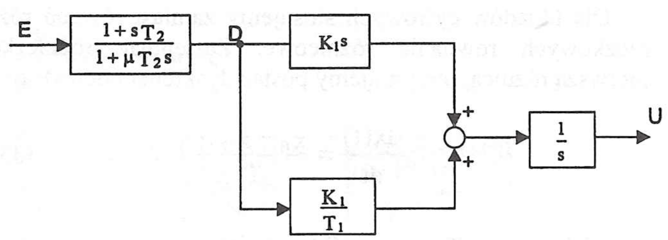
$$\Delta U_n=U_n-U_{n-1}=K_P(E_n-E_{n-1})+K_I E_n+K_D(E_n-2E_{n-1}+E_{n-2}). \tag{35}$$

Algorytm realizujący równanie (34) przyjęto nazywać pozycyjnym, natomiast realizujący równanie (35) – przyrostowym (prędkościowy). Algorytm przyrostowy PID otrzymuje się w wyniku różnicowania algorytmu pozycyjnego (34).

Algorytm przyrostowy umożliwia łagodne przejście od sterowania cyfrowego „na ręczne" względnie analogowe, lub odwrotne. Algorytm pozycyjny natomiast wymaga wcześniejszego zrównania aktualnego sygnału generowanego przez regulator analogowy lub nastawnik ręczny z sygnałem sterującym z jednostki centralnej. Możliwe jest również wyeliminowanie tej niedogodności poprzez niewielką modyfikację rzeczywistego algorytmu do postaci [16]:

$$G_R(s)=\frac{1+sT_2}{1+\gamma T_2 s}\left(K_1 s+\frac{K_1}{T_1}\right)\frac{1}{s}. \tag{36}$$

Schemat blokowy układu odpowiadającego równaniu (36) przedstawiono na rys.19.



Rys.19. Schemat blokowy zmodyfikowanej wersji regulatora rzeczywistego PID (μ=γ) [16]

Gdzie:

$$K_1 = K_p + K_I + K_D,$$
$$K_2 = K_I - K_D$$
$$K_3 = K_I.$$

Dla poprawienia jakości regulacji wprowadza się zwykle szereg modyfikacji. Problemem jest na przykład sprawa aproksymacji różniczki pierwszą różnicą. Dla „gładkiego" przebiegu sygnału błędu i odpowiednio dobranych kroków impulsowania, jest to zwykle wystarczające przybliżenie. Posługiwanie się takim sygnałem nie jest jednak wskazane ze względu na szumy istniejące w mierzalnej zmiennej regulowanej.

Wejściowy filtr dolnoprzepustowy ogranicza wysokie częstotliwości (równanie 31). Dodatkowo stosuje się wygładzające formuły interpolacyjne oraz specjalne schematy różnicowe.

Szereg modyfikacji dotyczy również sposobów całkowania. Metodę prostokątów zastępuje się często metodą trapezów. W literaturze można znaleźć szereg innych, bardziej dokładnych sposobów całkowania:

a) dwupunktowe metody Adamsa,
b) trójpunktowa metoda Simsona,
c) trójpunktowa metoda Adamsa-Bashfortha.

Dalsze zwiększenie dokładności daje zastosowanie metod ekstrapolacyjno-interpolacyjnych o stosunkowo dużych nakładach obliczeniowych.

Szereg modyfikacji algorytmów PID dotyczy możliwości nie w pełni prawidłowego ich działania w pewnych warunkach. W przypadku gdy stosunek T/T_I jest duży, regulator (dla algorytmu pozycyjnego) przestaje działać poprawnie, gdyż zanika praktycznie wpływ działania proporcjonalnego, a dominuje całkowanie. Gdy błąd zostaje sprowadzony w pobliże zera, ponownie ujawnia się człon proporcjonalny, co może spowodować skokową zmianę sygnału wejściowego. Aby tego uniknąć, wprowadza się zmiany do algorytmu pozycyjnego.

$$U_n = K_p E_n + \frac{T}{T + T_1} \sum_{i=0}^{n-1} E_i + \frac{T_D}{T} \Delta E_n \tag{37}$$

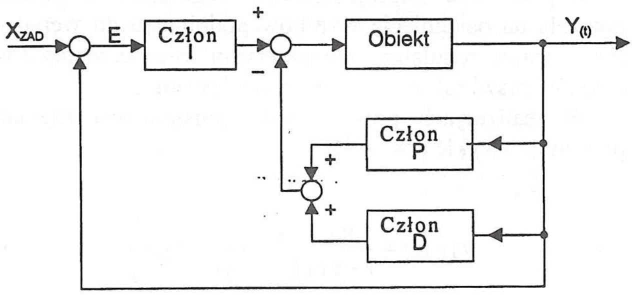
Gdy wzrasta czas próbkowania T, równanie przyjmuje postać [16]

$$U_n = K_p \sum_{i=0}^{n-1} E_i \tag{38}$$

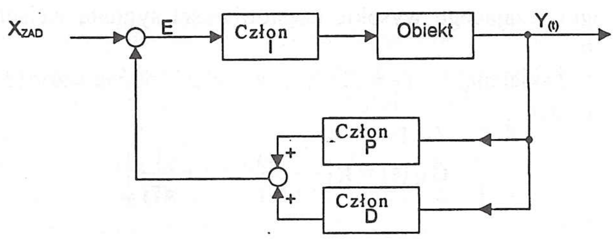
Dla małych wartości T różnica między wzorami (35) i (37) jest minimalna.

W rozwiązaniach regulatorów PID często przenosi się człon proporcjonalno-różniczkujący PD do toru sprzężenia zwrotnego. Zapobiega to nagłej zmianie wielkości sterującej przy skoku wartości zadanej. Dwie możliwe realizacje takiego układu przedstawiono na rys.20.

a)



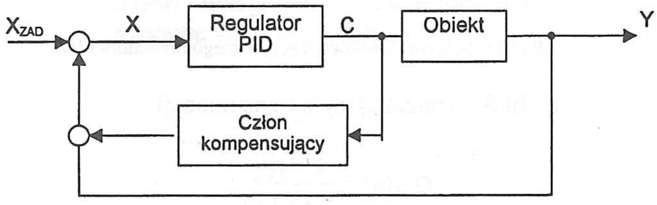
b)



Rys.20. Schematy blokowe dwóch modyfikacji regulatora PID

Wersja przedstawiona na rys.20b ma korzystniejsze właściwości w zakresie ograniczenia zjawiska nasycenia się członu I. Człon różniczkujący w sprzężeniu zwrotnym powoduje, że dla dużych różnic pomiędzy sygnałem zadającym a zmienną regulowaną sygnał błędu, sterujący integratorem jest mały. Umożliwia to zmniejszenie przeregulowania przy pewnym (nieznacznym) wydłużeniu czasu regulacji. Układ ten wprawdzie nie całkiem zabezpiecza przed nasyceniem się członu całkującego, modyfikuje natomiast sygnał wyjściowy regulatora. Zmniejsza go, gdy zmienna regulowana szybko narasta, a zwiększa, gdy zaczyna maleć.

Wiąże się z tym jednak pewne zwiększenie czasu regulacji. Dla obiektów z opóźnieniem nawet regulator PID nie zapewnia odpowiedniej jakości przebiegu regulacji. Dobre wyniki w tym względzie daje zastosowanie członu kompensacyjnego rys.21.



Rys.21. Układ kompensacji czasu martwego obiektu

3.6. Podstawowe struktury układów regulacji cyfrowej

Wyróżniamy dwie podstawowe struktury układów regulacji w systemach cyfrowych automatyki:

a) Układu regulacji cyfrowej nadrzędnej (Supervisory Control, Set-Point Control, SPC), charakteryzującego się tym, ze system cyfrowy nastawia za pomocą sygnału cyfrowego wartość zadaną regulatora analogowego, wyposażonego w cyfrowy nastawnik wartości zadanej, np. silnik krokowy.

b) Układ regulacji cyfrowej bezpośredniej (Direct Digital Control, DDC), charakteryzującego się tym, że zmienna regulowana jest przez układ wejść analogowych przetwarzana w dyskretnych chwilach czasu, najczęściej periodycznie, w sygnał cyfrowy, który z kolei jest przetwarzany zgodnie z zaprogramowanym algorytmem regulacji. Obliczone w wyniku tego przetwarzania wartości zmiennej sterującej są przekształcane w układzie wyjść analogowych w sygnał analogowy na wejście wzmacniacza sterującego element nastawczy.

Regulacja cyfrowa nadrzędna umożliwia obliczanie wartości zadanych analogowych układów regulacji na podstawie złożonych algorytmów sterowania, funkcji dużej liczby innych zmiennych procesowych. Dzięki niej można realizować złożone układy regulacji nadążnej, układy wielokrotnej regulacji kaskadowej, układy sterowania w funkcji zakłóceń, których realizacja analogowa byłaby zbyt trudna lub kosztowna. Rozwiązanie to jest więc pozbawione niedogodności regulacji wyłącznie analogowej. Obecnie regulacja cyfrowa nadrzędna jest najbardziej rozpowszechnioną postacią regulacji stosowaną w systemach cyfrowych automatyki.

Regulacja cyfrowa bezpośrednia umożliwia realizację wszystkich tych zadań co regulacja cyfrowa nadrzędna, a ponadto realizację takich zadań, które wymagają „programowanego" algorytmu regulacji i nie są możliwe do realizacji za pomocą algorytmów regulacji regulatorów analogowych. Regulacja cyfrowa bezpośrednia ma jednakże tę niedogodność, że w przypadku objęcia nią wszystkich zmiennych regulowanych należy zabezpieczyć się przed skutkami ewentualnej awarii jednostki centralnej systemu cyfrowego, deaktywizującej wszystkie obwody regulacji.

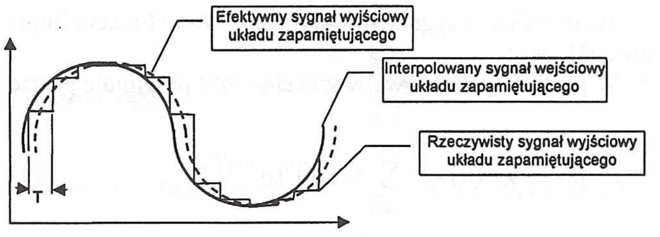
3.7. Dobór parametrów algorytmów podstawowych regulatorów cyfrowych

Zasadnicza różnica między metodami doboru parametrów algorytmów regulacji dla regulatorów analogowych i układów bezpośredniej regulacji cyfrowej polega na tym, że ostatnie wymagają uwzględnienia dodatkowego parametru, którym jest częstotliwość próbkowania.

3.7.1. Dobór parametrów na podstawie tablic nastaw dla regulatorów analogowych

Ze względu na istnienie stosunkowo dobrze opracowanych tablic do określania nastaw typowych regulatorów analogowych, interesujące są możliwości korzystania z tych tablic do określania parametrów odpowiadających tym regulatorom algorytmów regulacji cyfrowej. Możliwość ta wynika stąd, że transmitancję operatorową układu zapamiętującego można aproksymować transmitancją elementu o czasie martwym równym połowie okresu próbkowania.

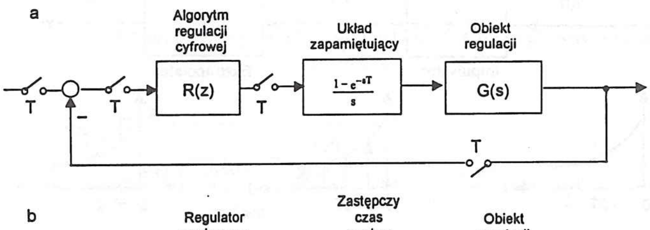
$$\frac{1-e^{-sT}}{s} \approx e^{-sT/2} \tag{39}$$



Rys.22 Heurystyczne uzasadnienie możliwości zastąpienia układu zapamiętującego elementem o czasie martwym równym połowie okresu próbkowania.

Uzasadnienie tej możliwości [11] przedstawia rys. 22 . Dzięki dużej inercji obiektu regulacji, tłumiącej silnie składowe o większych częstotliwościach zawarte w schodkowym sygnale wyjściowym elementu zapamiętującego, sygnał wyjściowy obiektu różni się bardzo niewiele od tego, który wystąpiłby, gdyby obiekt pobudzić sygnałem przedstawionym na rys. 22 linią przerywaną. Sygnał ten, zwany efektywnym sygnałem wyjściowym układu zapamiętującego, jest opóźniony o T/2 względem sygnału ciągłego uzyskanego w wyniku interpolacji ciągu liczbowego wprowadzanego na wejście układu zapamiętującego.

Dzięki temu przebiegi przejściowe zmiennej regulowanej w układzie regulacji cyfrowej o schemacie blokowym z rys 23a będą się przy jednakowych pobudzeniach różnić bardzo niewiele od przebiegów uzyskanych w układzie regulacji analogowej z rys. 23b.



Rys.23. Schemat blokowy układu regulacji cyfrowej (a) i zastępczy układ regulacji analogowej (b).

3.8. Cyfrowe układy regulacji automatycznej

Podstawowym elementem w cyfrowych układach regulacji automatycznej jest człon, w którym następuje dyskretyzacja wielkości wejściowej i zamiana jej na postać cyfrową. Zakładamy, że na wejściu może pojawić się sygnał ciągły x lub uchyb e(t) = (w-x), który zostaje spróbkowany w impulsatorze, a następnie skwantowany w ekstrapolatorze. W pierwszym przybliżeniu można przyjąć, że okres próbkowania jest stały i wynosi T.

W zapisie formalnym proces próbkowania przedstawia się następująco:

$$x^*(t) = x(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta_0(t-nT), \tag{40}$$

gdzie : $x^*(t)$ – sygnał spróbkowany, δ_0 – funkcja impulsowa (Diraca).

W postaci operatorowej wyrażenie (40) przyjmuje postać

$$x^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nTs}, \tag{41}$$

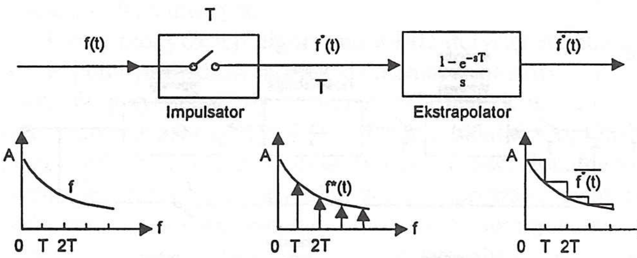
Sygnał ten po przejściu przez ekstrapolator przyjmuje przebieg y(s), który określony jest równaniem

$$y(s) = x^*(s)\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-sT}\right]. \tag{42}$$

Stąd transmitancja ekstrapolatora

$$\frac{y(s)}{x^*(s)} = \frac{1-e^{-sT}}{s} \tag{43}$$

Wygładzenie danych próbkowanych przez ekstrapolator rzędu zerowego przedstawiono na rys.24. Sygnał na wyjściu układu jest schodkową wersją sygnału pierwotnego, przy czym przyjmuje on między próbkami wartość stałą ustaloną na poprzedzającym poziomie.



Rys.24. Układ z impulsatorem i ekstrapolatorem rzędu zerowego.

Impulsator wraz z ekstrapolatorem stanowi człon dynamiczny, który z sygnału wejściowego, określonego przez funkcję $f(t)$, pobiera próbki $f(nT)$ w dyskretnych chwilach czasu t=nT oraz zapamiętuje każdą z próbek do następnej chwili impulsowania. Sygnał wejściowy ma więc postać funkcji schodkowej, którą zapisujemy:

$$f(t) = f(nT) \quad \text{dla} \quad nT < t < nT+T, \quad n=0, 1, 2,... \tag{44}$$

Za wielkość wejściową do członu dyskretyzacji można przyjąć sygnał zadający **x** lub uchyb x_w . Sygnał ten, który składa się z ciągu próbek, jest zliczany przez licznik czasu okresu T_m. Czas zliczania T_m w stosunku do czasu próbkowania T może spełniać jeden z trzech warunków:

a) $T_m \ll T$,
b) $T_m \gg T$,
c) $T_m = T$

Warunek (a) jest praktycznie nierealizowany. Warunek (c) przebiegu zilustrowano na rys.24.

W tym przypadku transmitancję ekstrapolatora wyznaczono na podstawie następującego przekształcenia:

$$x_1^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x(nT)+x[(n-1)T]}{2}e^{-nTs} = \frac{1+e^{-sT}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)e^{-nTs} = \frac{1+e^{-sT}}{2}x^*(s). \tag{45}$$

Korzystając z pewnej analogii do równania (42) tzn.

$$y(s) = x_1^*(s)\frac{1-e^{-sT}}{s},$$

oraz uwzględniając w tym równaniu zależność (45) otrzymamy

$$\frac{y(s)}{x^*(s)} = \frac{1+e^{-sT}}{2}\,\frac{1-e^{-sT}}{s} = \frac{1-e^{-2sT}}{2s}. \tag{46}$$

Następnym z kolei istotnym członem układu regulacji automatycznej jest regulator. Zakładamy regulator typu PID. Dla układów ciągłych dla postaci czasowej na rys. 6b i rys. 6c przyjmuje on zależność funkcyjną o następującej postaci:

$$y = K_p\left[e(t)+\frac{1}{T_I}\int_0^t e\,dt + T_D\frac{de(t)}{dt}\right] \tag{47}$$

W przypadku układu dyskretnego, przy założeniu T = const, analogiczne równanie przyjmuje postać:

$$y_n - y_{n-1} = K_p\left[(x_{w_n}-x_{w_{n-1}})+\frac{1}{T_I}Tx_{w_n}+\frac{T_D}{T}(x_{w_n}-2x_{w_{n-1}}+x_{w_{n-2}})\right] \tag{48}$$

lub w postaci operatorowej [16]

$$y_n = x_{w_n}\frac{1}{1+C_1e^{-sT}}\left(d_0+e^{-sT}d_1+e^{-2sT}d_2\right) \tag{49}$$

gdzie:

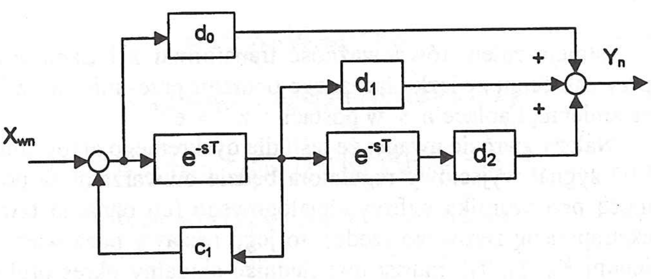
$$C_1 = -1$$

$$d_0 = K_p\left(1 + \frac{T}{T_I} + \frac{T_D}{T}\right),$$

$$d_1 = -K_p\left(1 + 2\frac{T_D}{T}\right),$$

$$d_2 = K_p\frac{T_D}{T}.$$

Schemat blokowy równania (49) przedstawiono na rys.25.



Rys.25. Struktura blokowa dyskretnego regulatora PID [16]

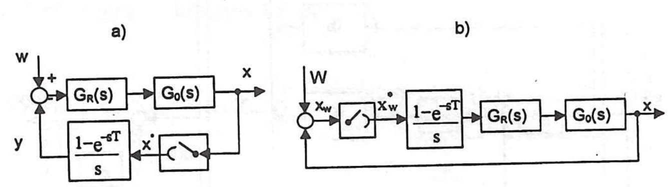
Uogólniając problem, transmitancję regulatora dyskretnego można zapisać w następującej postaci:

$$G_R(s) = \frac{d_0 + d_1 e^{-sT} + d_2 e^{-2sT} + \cdots + d_n e^{-nsT}}{C_0 + C_1 e^{-sT} + C_2 e^{-2sT} + \cdots + C_m e^{-msT}} \tag{50}$$

Przetwarzanie sygnałów ciągłych na postać cyfrową może być dokonywane w torze sprzężenia zwrotnego lub w torze głównym. Obydwa przypadki pokazano na rys.26.

Następnie łącząc schematy blokowe przedstawione na rys.25 i rys.26b otrzymamy schemat blokowy cyfrowego układu regulacji automatycznej (rys.27).

Algorytm PID w komputerowych systemach sterowania musi być realizowany przez szczególną postać regulatora, która może być nazwana regulatorem cyfrowym (rys. 28) . Cechą charakterystyczną takiego regulatora jest stały okres próbkowania T. Układ próbkowania sygnału wyjściowego obiektu regulacji na postawie sygnału y(t) wyznacza ciąg wartości dyskretnych y(k). Algorytm regulacji na podstawie ciągu wartości dyskretnych odchyłki regulacji $e(k) = x_{zad}(k) - y(k)$ określa ciąg dyskretnych wartości sygnału sterującego u(k) dla k=0, 1, 2, 3 ...



Rys.26. Schemat układu z impulsatorem; a) w obwodzie sprzężenia zwrotnego, b) w torze głównym[16].

Na wyjściu regulatora cyfrowego znajduje się układ ekstrapolacji, która na podstawie tego ciągu wartości dyskretnych wypracowuje sygnał sterujący obiektem u(t) określony dla każdej chwili t.

Dyskretyzacja analogowego algorytmu regulacji PID przedstawiono wzorem (47) polega na wprowadzeniu dyskretnych wartości sygnału odchyłki regulatora oraz zastąpieniu całki sumą, a pochodnej różnicą pierwszego rzędu.

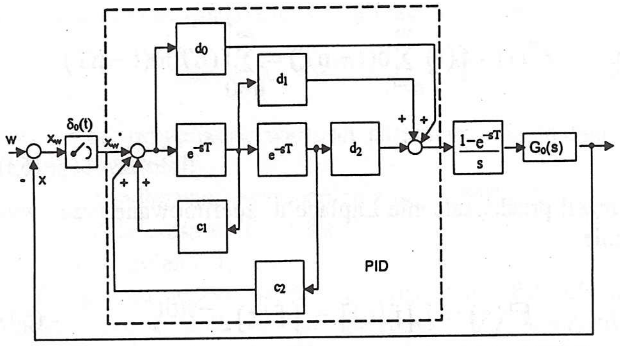
$$\int_0^t e(t)dt = \sum_{i=0}^{k} e(i)T; \qquad \frac{de(t)}{dt} = \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

Oznaczając $\quad s(k-1) = \sum_{i=1}^{k-1} e(i)$

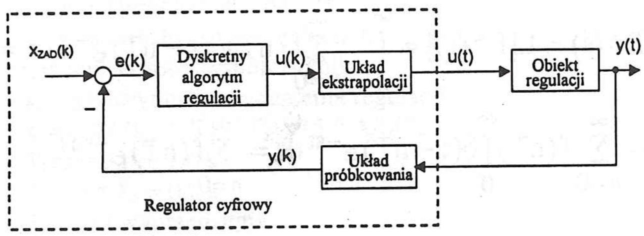
i przyjmując s(k) = s(k-1) + e(k) lub e(k) = s(k) – s(k-1)

- dla struktury równoległej rys.29 po przekształceniach otrzymujemy

$$u(k) = K_p\left(e(k) + \frac{T}{T_I}s(k) + \frac{T_D}{T}(e(k) - e(k-1))\right) \tag{51}$$



Rys.27. Schemat blokowy układu z impulsatorem w torze głównym i regulatorem PID.



Rys.28 Schemat blokowy regulatora cyfrowego [4].

- dla struktury szeregowej rys.30 po przekształceniach otrzymujemy

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) \tag{52}$$

gdzie:

$$q_0 = K_p\left(1+\frac{T}{T_i}+\frac{T_D}{T}\right);\quad q_1 = -K_p\left(1+2\frac{T_D}{T}\right);$$

$$q_2 = K_p\frac{T_D}{T};$$

Struktura równoległa realizuje wyłącznie tzw. postać pozycyjną algorytmu PID przydatną do zastosowania tam, gdzie mechanizm wykonawczy sterowany z regulatora ma charakter wzmacniacza, którego sygnał wyjściowy jest proporcjonalny do sygnału wyjściowego regulatora u(k). Struktura szeregowa może być natomiast stosowana w dwóch postaciach – pozycyjnej i prędkościowej, zależnie od tego czy sygnałem wyjściowym procedury regulacyjnej jest sygnał u(k), czy jedynie przyrost tego sygnału tzn. $\Delta u(k)$. Postać prędkościowa algorytmu PID przydatna jest tam, gdzie mechanizm wykonawczy sterowany z regulatora ma charakter członu całkującego.

Dla procesu próbkowania, gdzie sygnał próbkowany jest idealny (funkcja impulsowa Diraca $\delta(t)$) ciąg impulsów przedstawionych na rys.24 można zapisać jako ciąg przesuniętych funkcji Diraca.

$$f(0T)\delta(t),\qquad f(1T)\delta(t-T),\qquad f(2T)\delta(t-2T),\ldots$$

tzn. $$f^*(t) = f(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT) \tag{53}$$

Jeżeli przekształcenie Laplace'a zdefiniowane przez wyrażenie

$$F'(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{54}$$

zostanie zastosowane do wyrażenia (53), to otrzymamy następujący wynik:

$$F^*(s) = L[f^*(t)] = \int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\int_0^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-snT} \tag{55}$$

Ze względu na to, że przekształcenie Laplace'a jest przekształceniem całkowym, nie można go zastosować bezpośrednio do funkcji dyskretnej f(nT). Należy najpierw dokonać aproksymacji funkcji dyskretnej f(nT) za pomocą funkcji impulsowej f*(t). Ciąg wartości dyskretnych funkcji f(nT) zostaje zastąpiony ciągiem impulsów

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT) \tag{56}$$

Z wyrażenia (55) wynika

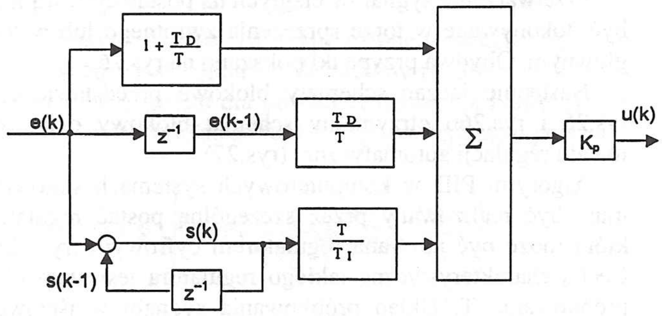
$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nt)e^{-snT} \tag{57}$$

Podstawienie $e^{sT} = z$ umożliwia napisanie

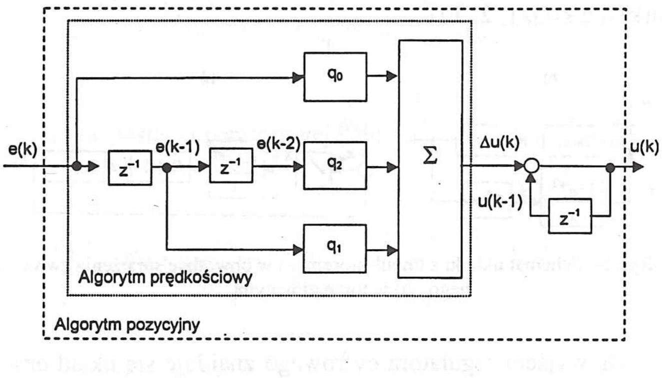
$$F^*(s) = L[f^*(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n} = F(z) \tag{58}$$

Istnieje zatem równoważność transformat z i Laplace'a przy założeniu związku łączącego operator przesunięcia z^{-1} ze zmienną Laplace'a s w postaci $z^{-1} = e^{-sT}$.

Należy zwrócić uwagę, że jeśli dla dyskretnego algorytmu PID sygnał wyjściowy regulatora będzie odtwarzany za pomocą przetwornika cyfrowo-analogowego (co oznacza tzw. ekstrapolację zerowego rzędu), to jego nastawy poza wartościami K_p, T_I, T_D, muszą uwzględniać aktualny okres próbkowania T. Ponieważ w praktyce przy dobieraniu nastaw regulatorów wygodnie jest korzystać z bogatych doświadczeń dotyczących strojenia regulatorów ciągłych, należy koniecznie o tym pamiętać, jeżeli działanie regulatora cyfrowego ma być w pełni równoważne działaniu analogicznego regulatora ciągłego. Nastawy regulatora cyfrowego K_p, T_I, T_D, dobrane jak dla regulatora ciągłego nie spowodują większych błędów, jeśli okres próbkowania będzie co najmniej o rząd mniejszy od najmniejszej stałej czasowej obiektu.



Rys. 29 Schemat blokowy struktury równoległej dyskretnego algorytmu PID [4]



Rys.30 Schemat blokowy struktury szeregowej dyskretnego algorytmu PID [4]

Modyfikacja działania części całkującej regulatora wtedy, gdy sygnał wyjściowy osiąga poziom ograniczenia, formatowanie wartości zadanej, jak również kompensacje zakłóceń oddziaływujących na obiekt przedstawiono w pracy [4].

3.9. Modyfikacja reguł Zieglera-Nicholsa dla regulacji cyfrowej

Takahaski zaproponował bezpośrednie wykorzystanie reguł Zieglera-Nicholsa do doboru parametrów algorytmów regulacji cyfrowej w postaci:

Regulacja P, algorytm pozycyjny

$$U_n = K_p\left(E_{zad} - E_n\right) \tag{59}$$

Regulacja PI, algorytm prędkościowy

$$U_n = K_p\left(-E_n + E_{n-1}\right) + K_I T\left(E_{zad} - E_n\right) \tag{60}$$

Regulacja PID, algorytm prędkościowy

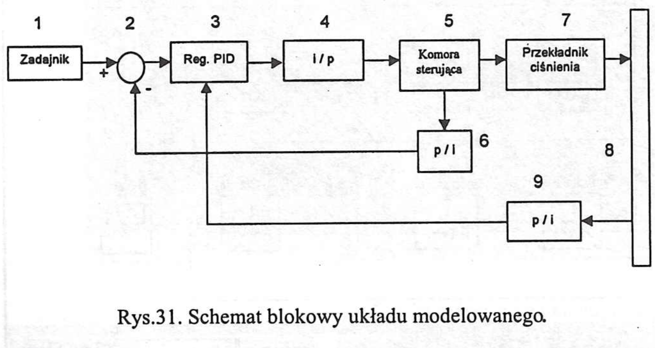
$$U_n = K_p\left(-E_n + E_{n-1}\right) + K_I T\left(E_{zad} - E_n\right) + \frac{K_D}{T}\left(2E_{n-1} - E_{n-1} - E_n\right) \tag{61}$$

Oznaczając, podobnie jak dla układów regulacji analogowej przez T_{osc} i k_{krp} okres drgań układu regulacji proporcjonalnej na granicy stabilności oraz graniczny współczynnik wzmocnienia regulatora proporcjonalnego, można określić parametry algorytmów regulacji w następujący sposób:

Typ regulatora	K_p	K_I	K_0
Regulator P	$0{,}5k_{kr\,p}$	-	-
Regulator PI	$0{,}45k_{kr\,p}$- $0{,}5K_IT$	$0{,}54\dfrac{k_{kr\,p}}{T_{osc}}$	-
Regulator PID	$0{,}6k_{kr\,p}$- $0{,}5K_IT$	$1{,}2\dfrac{k_{kr\,p}}{T_{osc}}$	$\dfrac{3}{40}k_{kr\,p}T_{osc\,p}$

4. Elementy układu modelowanego

4.1. Schemat blokowy układu [2]



Rys.31. Schemat blokowy układu modelowanego.

Układ regulacji przedstawiony na rys. 31 obejmuje:
1. Zadajnik stopnia hamowania
2. Węzeł sumujący
3. Regulator PID
4. Przetwornik prąd – ciśnienie
5. Komora sterująca
6. Przetwornik pomiarowy ciśnienia
7. Przekładnik ciśnienia
8. Przewód główny pociągu
9. Przetwornik pomiarowy ciśnienia

Wstępnie zakłada się, że główna pętla regulacji będzie obejmować elementy 1 ..6.

Sprzężenie zwrotne z przewodem głównym (7, 8, 9) będzie miało charakter uzupełniający. Głównym zadaniem układu jest zatem automatyczna regulacja ciśnienia w zbiorniku 5.

4.2. Obiekt sterowany[2]

Obiektem sterowanym w układzie jest przetwornik prąd – ciśnienie wraz z komorą sterującą. Sygnałem wyjściowym obiektu sterowania jest ciśnienie w komorze sterowania. Przewiduje się, że w badanym zakresie pracy obiekt będzie charakteryzował się dobrą liniowością, a jego dynamikę będzie można zamodelować za pomocą transmitancji w postaci członu inercyjnego pierwszego rzędu z opóźnieniem.

$$G(s) =(k_p * e^{-sT_o}) / (1 + sT) \tag{62}$$

przy czym, przybliżone wartości parametrów posiadają następujące wartości:
- współczynnik wzmocnienia k_p = 1 MPa /A
- stała czasowa T = 1.5 s
- opóźnienie T_o = 0.1 s

Wstępnego doboru parametrów regulatora PID dla tego obiektu można dokonać na podstawie doświadczalnych, przybliżonych zależności. Poniżej dobrano parametry na podstawie
[5].
Dla wskaźników jakości:
- przeregulowanie ok. 20 %
- minimalny czas regulacji tr

otrzymano wartości współczynników:
k_r współczynnik wzmocnienia regulacji
k_r = 1,2 / (k_p. * T_o / T) = 15.9 A/MPa
T_I czas zdwojenia
T_I = 2 * T_o = 0,2 s
T_D czas wyprzedzenia
T_D = 0,4 * T_o = 0,04 s

4.3. Algorytm pracy regulatora

Przy praktycznym wykorzystaniu ogólnej struktury PID należy uwzględnić dodatkowo następujące zagadnienia:

- wpływ okresu próbkowania na nastawy algorytmu PID,

- wybór formy algorytmu (pozycyjny, prędkościowy) w zależności od rodzaju mechanizmu wykonawczego,
- wprowadzenie ograniczenia na sygnał wyjściowy regulatora z jednoczesnym modyfikowaniem działania części całkującej,
- użycie filtru formułującego wartość zadaną bądź modyfikacja struktury regulatora,
- regulacja z kompensacją zakłóceń,
- dobór nastaw parametrów algorytmów regulacji cyfrowej korzystając z modyfikacji reguł Zieglera-Nicholsa do cyfrowej struktury regulatora PID.

Regulator omawianego układu będzie urządzeniem mikroprocesorowym, a przed jego zbudowaniem będzie symulowany jako algorytm PID w komputerze . Będzie zatem realizowana bezpośrednia regulacja cyfrowa z próbkowaniem sygnału sterowanego i aktualizacją sygnału sterującego w dyskretnych chwilach czasu. Stosowane algorytmy regulacji cyfrowej PID są odpowiednikami algorytmu regulacji analogowej PID (wzór 47).

gdzie:
- $e(t) = x_{zad} - y(t)$ uchyb sterowania
- $y(t)$ wielkość sterowana
- x_{zad} wartość zadana sterowania
- $u(t)$ sygnał sterujący
- k_p współczynnik wzmocnienia regulacji
- T_I czas zdwojenia
- T_D czas wyprzedzenia

Algorytm przyrostowy stosuje się gdy obiekt sterowany jest wyposażony w człon wykonawczy o charakterze członu całkującego (sumującego) np. silnik krokowy lub siłownik elektryczny. W omawianym układzie sytuacja taka nie występuje, stąd zastosowany zostanie pozycyjny algorytm regulacji.

Należy dokonać wstępnego, przybliżonego doboru wartości współczynników regulacji k_p, T_I, T_D oraz okresu impulsowania T. Wartości te będą precyzowane w toku badania modelu układu regulacji.

5. Przykłady Modelowania układów regulacji automatycznej

Szerokie zastosowanie przy projektowaniu, modelowaniu i symulacji układów sterowania i automatycznej regulacji znajdują pakiet programowania MATLAB wraz z bibliotekami oraz nakładką SIMULINK.

MATLAB jest interakcyjnym i otwartym środowiskiem obliczeniowym integrującym analizę numeryczną, działanie na macierzach i przetwarzanie sygnałów z grafiką, co bardzo ułatwia jego wykorzystanie.

Współczesna automatyka bardzo szeroko wykorzystuje rachunek macierzowy i to zarówno w układach jedno jak i wielowymiarowe, co wymaga wykonywania wielu różnych działań na macierzach, do przeprowadzenia których MATLAB wydaje się szczególnie predysponowany. Do opisu własności dynamicznych powszechnie stosowany jest opis przestrzeni stanów opisane w rozdziale 2.3. Schemat blokowy układu można wówczas przedstawić tak jak na rys.3.

SIMULINK służy do analizy ciągłych, dyskretnych i dyskretno-ciągłych układów dynamicznych.

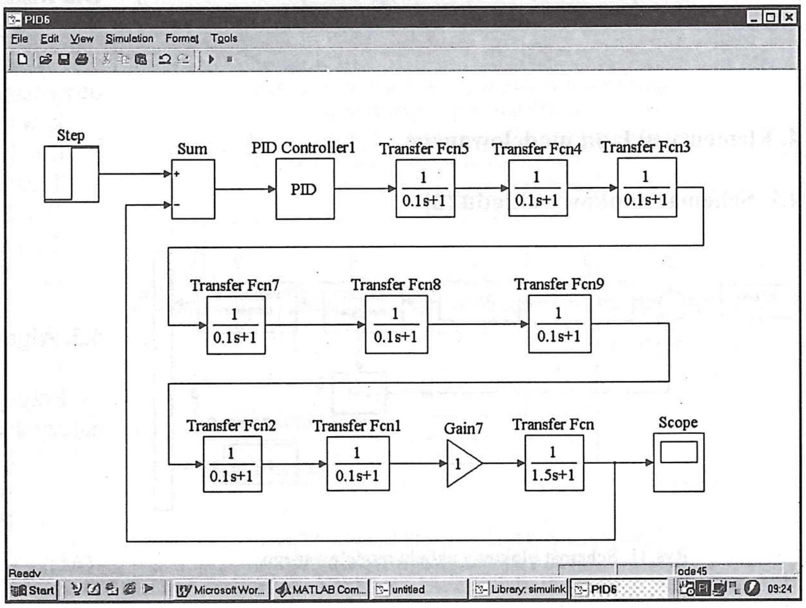
SIMULINK jest środowiskiem graficznym, w którym symulację systemów dynamicznych wykonuje się w oparciu o schemat blokowy z wykorzystaniem predefinowanych bloków bibliotecznych.

5.1. Modelowanie i badanie w programie SIMULINK

Na rys.32 przedstawiono regulator PID połączony z obiektem badanym (przetwornikiem elektropneumatycznym) o transmitancji w postaci członu inercyjnego pierwszego rzędu z opóźnieniem, który został opisany wzorem (62).

Wiadomo[13], że dla n=8 praktycznie można zastępować osiem członów inercyjnych $\frac{1}{1+sT_0}$ jednym członem opóźniającym e^{-sT_0} dlatego wzór (62) można przestawić w postaci

$$G(s)=K_p\left(\frac{1}{(1+sT_0)^8\cdot(1+sT)}\right).$$



Rys.32. Układ regulacji automatycznej z regulatorem PID i obiektem badanym o transmitancji
$$G(s)=K_p\left(\frac{1}{(1+sT_0)^8\cdot(1+sT)}\right)$$

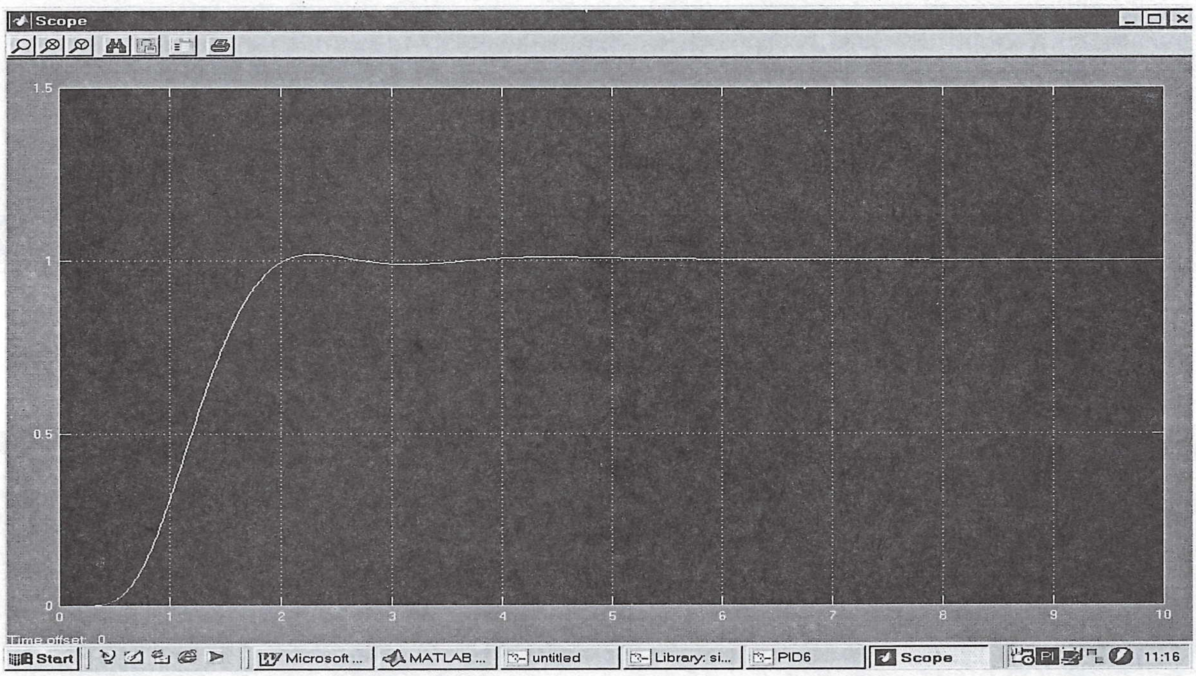
Na rys.32 do regulatora PID i obiektu badanego przyłożono sygnał wejściowy typu skok jednostkowy (Step), a wyjściu obiektu badanego przyłączono oscyloskop (Scope) do obserwacji przebiegu wyjściowego.

Na rys.33÷39 przedstawiono przebiegi na wyjściach układu regulacji automatycznej przedstawione na rys.32 dla różnych nastaw regulatora PID (K_P-współczynnik proporcjonalności, K_I-współczynnik całkowania, K_D-współczynnik różniczkowania) po zadaniu na wejściu skoku jednostkowego. Na rys.33 przedstawiono jeden z optymalnych przebiegów wyjściowych dla przetwornika elektropneumatycznego dla określonych nastaw regulatora PID.

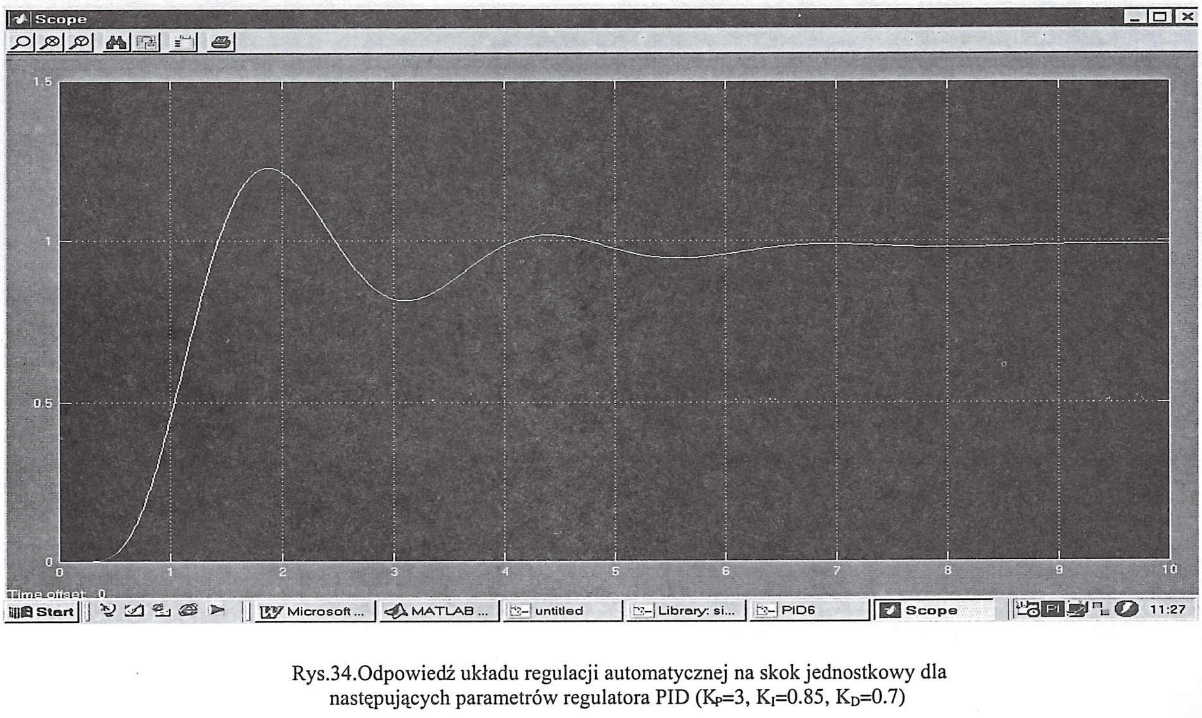
Na rys.34÷35 przedstawiono przebiegi przy zmieniających się tylko parametrach K_P.

Na rys.36÷37 przedstawiono przebiegi przy zmieniających się tylko parametrach K_I.

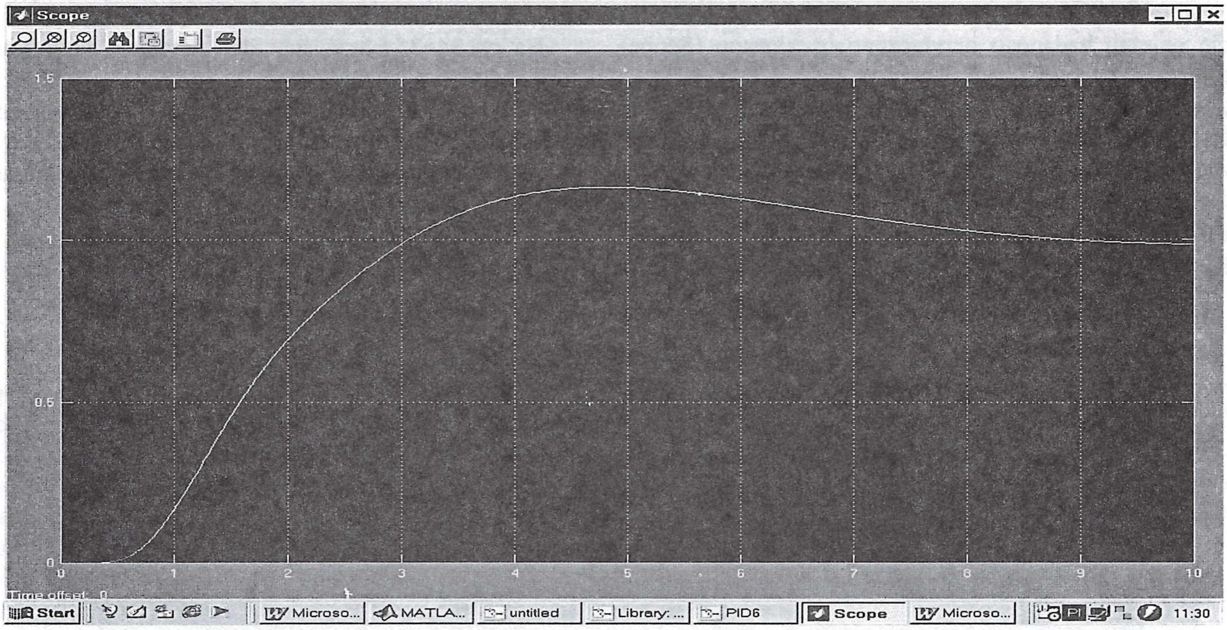
Na rys.38÷39 przedstawiono przebiegi przy zmieniających się tylko parametrach K_D.



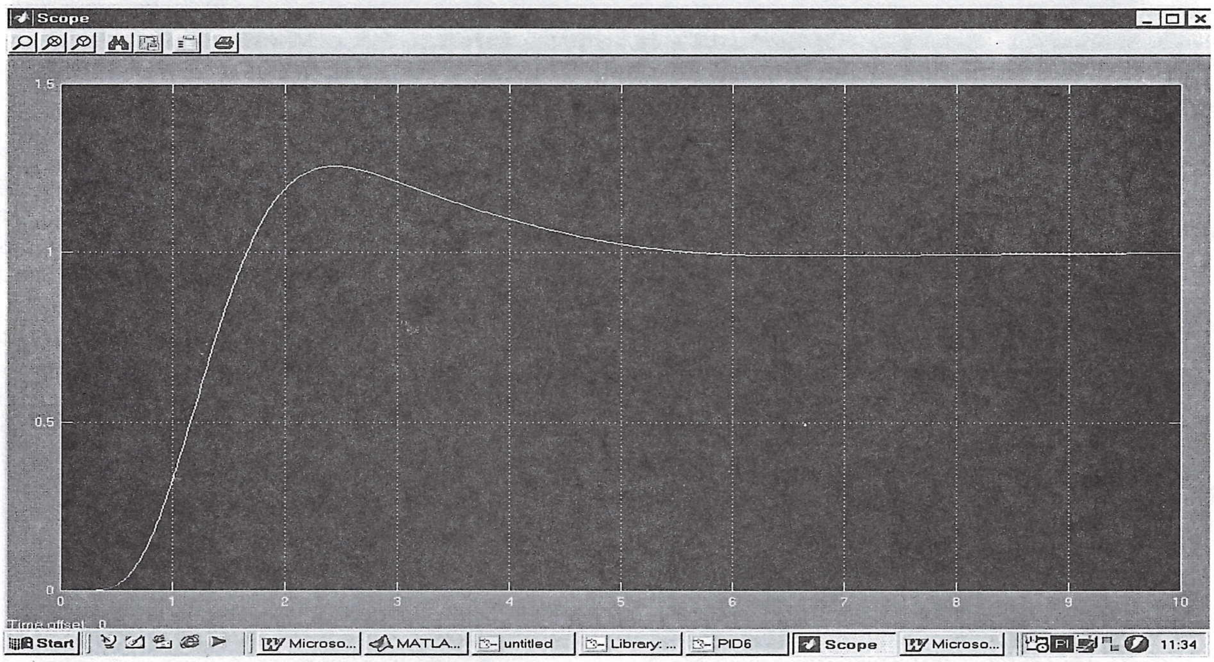
Rys 33. Odpowiedź układu regulacji automatycznej na skok jednostkowy dla następujących parametrów regulatora PID (K_P=2, K_I=0.85, K_D=0.7)



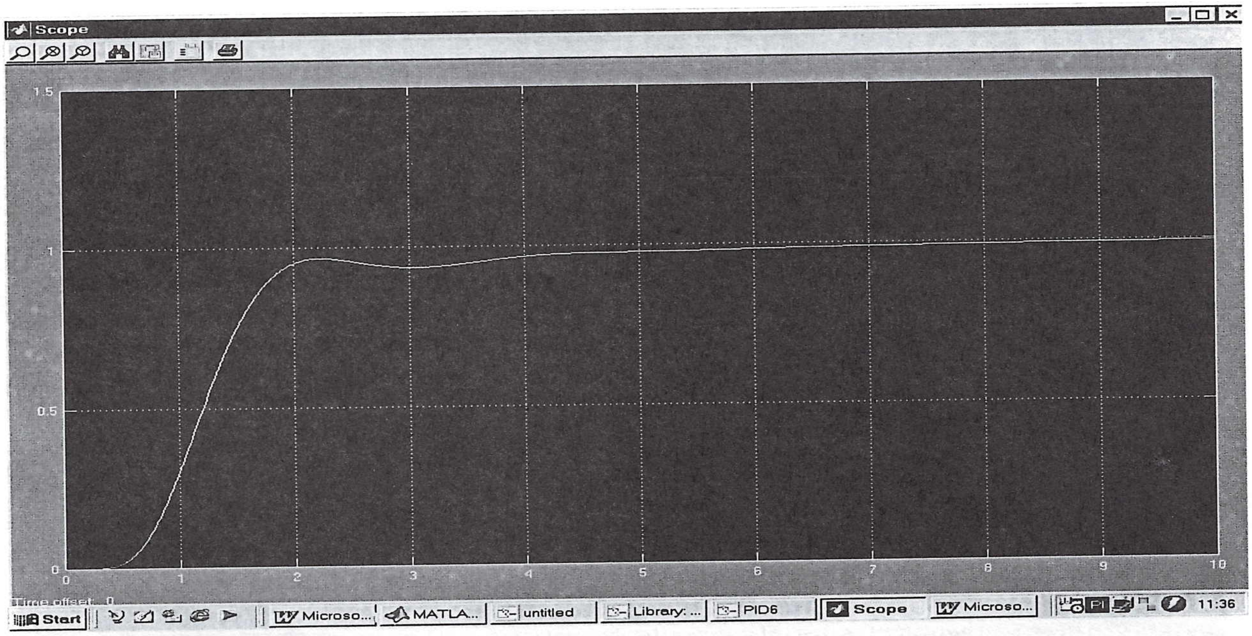
Rys.34.Odpowiedź układu regulacji automatycznej na skok jednostkowy dla następujących parametrów regulatora PID (K_P=3, K_I=0.85, K_D=0.7)



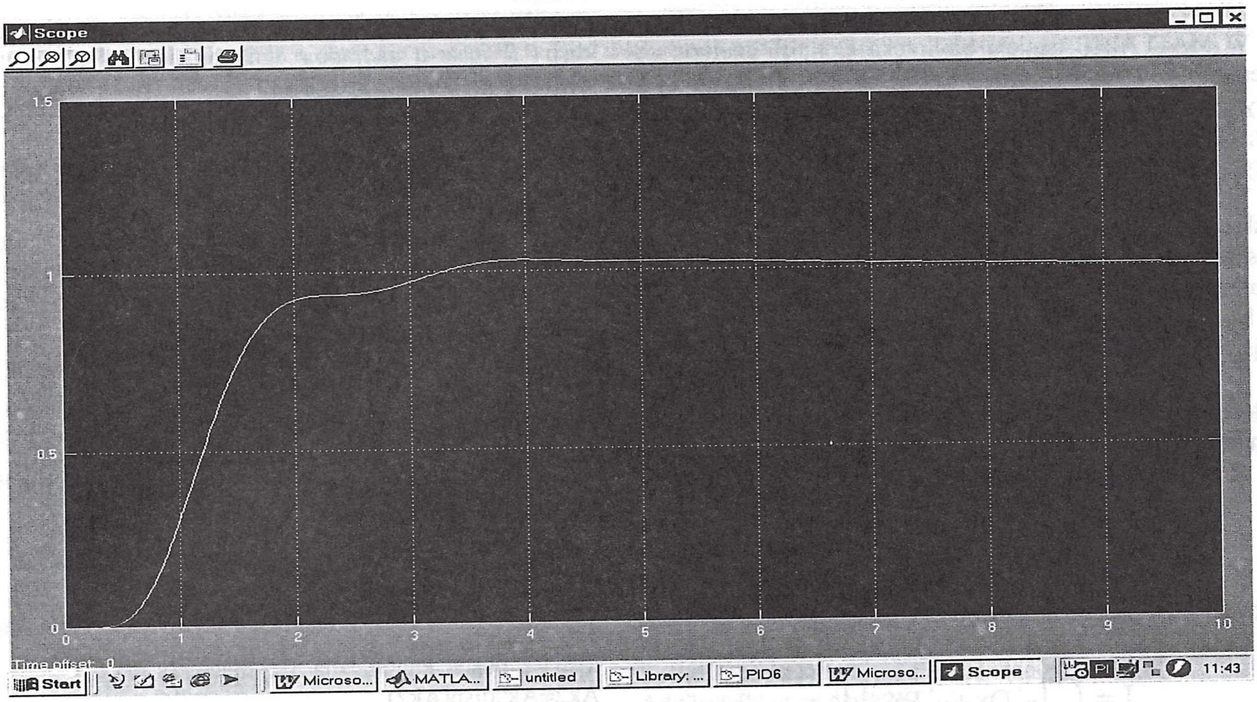
Rys.35.Odpowiedź układu regulacji automatycznej na skok jednostkowy dla następujących parametrów regulatora PID (K_P=1, K_I=0.85, K_D=0.7)



Rys.36.Odpowiedź układu regulacji automatycznej na skok jednostkowy dla następujących parametrów regulatora PID (K_P=2, K_I=1.5, K_D=0.7)

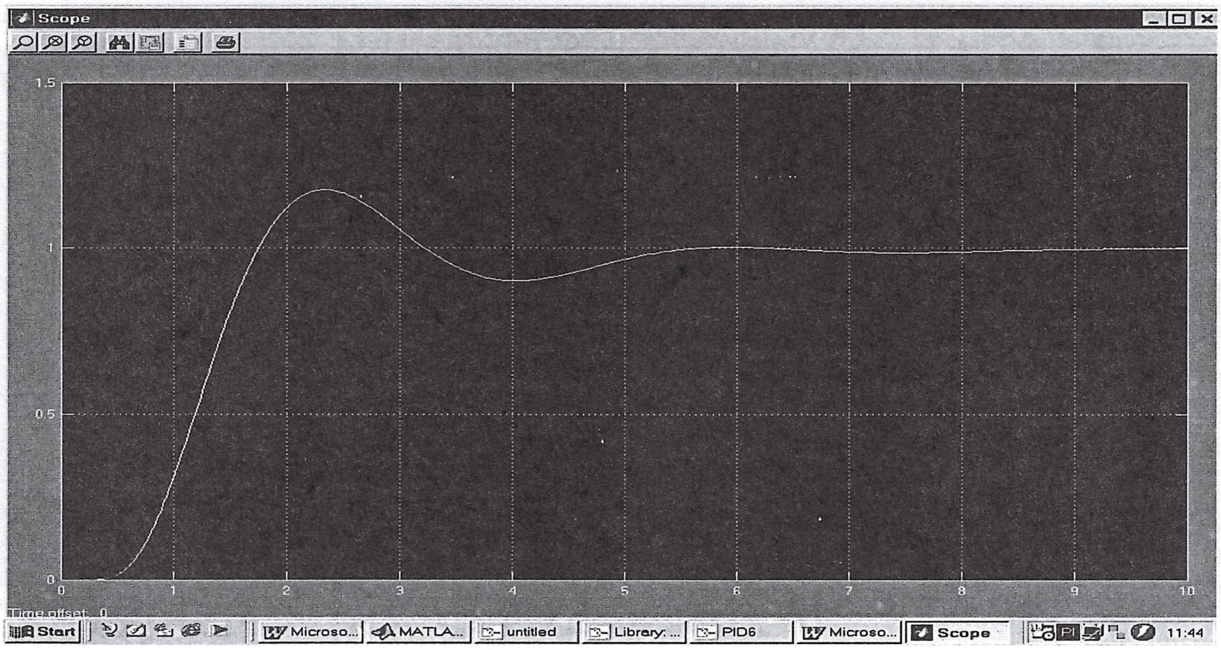


Rys.37.Odpowiedź układu regulacji automatycznej na skok jednostkowy dla następujących parametrów regulatora PID (K_P=2, K_I=0.7, K_D=0.7)



Rys.38. Odpowiedź układu regulacji automatycznej na skok jednostkowy dla następujących parametrów regulatora PID (K_P=2, K_I=0.85, K_D=1)

Z przebiegów przedstawionych na rys. 33÷39 wynika, że w sposób bardzo prosty można symulować pracę obiektu sterowanego regulatorem PID o dowolnie wybranym przebiegu wejściowym.



Rys.39.Odpowiedź układu regulacji automatycznej na skok jednostkowy dla następujących parametrów regulatora PID (K_P=2, K_I=0.85, K_D=0.2)

5.2. Modelowanie i badanie w programie MATLAB

W MATLABIE istnieje biblioteka Control Toolbox zawierająca 130 zestawów m-plików potrzebnych w praktyce inżynierskiej. Są to np.: obliczanie wartości własnych macierzy, działania na macierzach, projektowanie regulatorów optymalnych itd.

W pracy przedstawione zostały programy ciągłego i dyskretnego "liniowo kwadratowego regulatora" dla układu opisanego macierzami A, B, C, D (opis układu dynamicznego w przestrzeni stanów patrz rozdział 2.3.),w którym macierze A, B, C, D są odpowiednio macierzami stanu, sterowania, wyjść i transmisji.

Założenia do programu ciągłego „liniowo kwadratowego regulatora" :

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} \qquad C=[2 \;\; 2 \;\; 2] \qquad D=[1].$$

Regulator powinien minimalizować całkowe kryterium jakości:

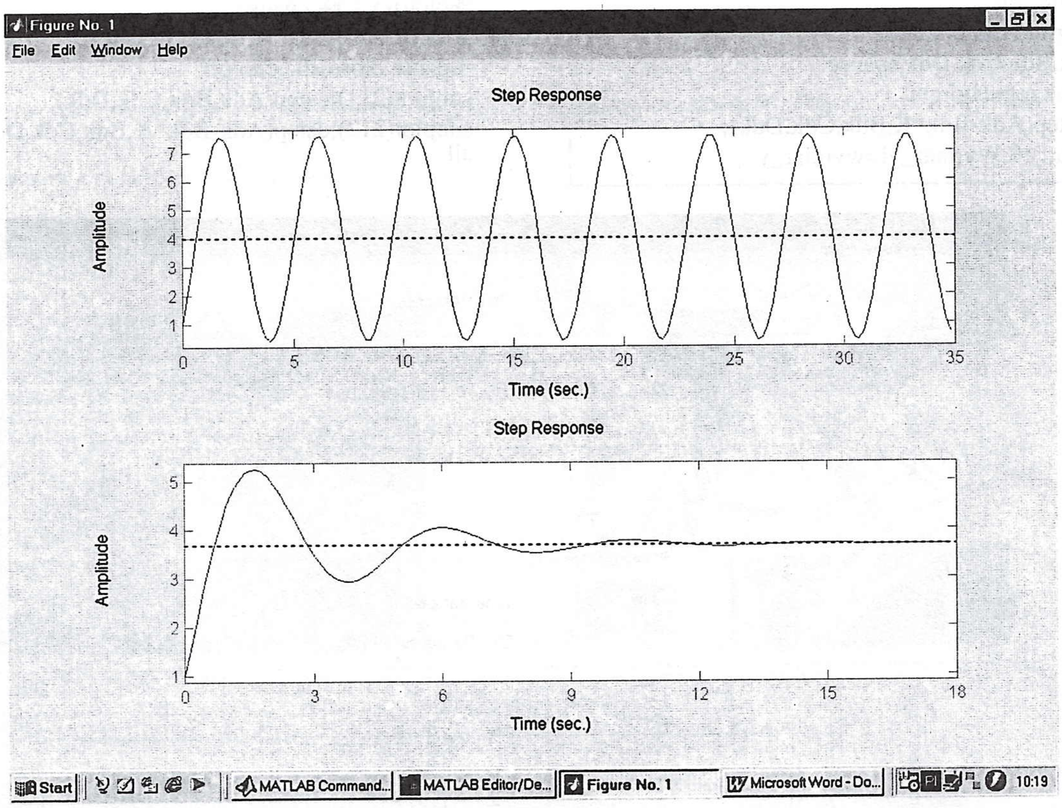
$$J=\int_0^{\infty}\left(x' Qx+u' Ru\right)dt$$

w którym Q i R są macierzami wag w optymalizowanym kryterium jakości jak wyżej

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}, \qquad R=[2]$$

Program analogowego „liniowo-kwadratowego regulatora"

```
% t0504_43 Projektowanie "liniowo-kwadratowego regulatora"
clear,clc
disp ('Projektowanie "liniowo-kwadratowego regulatora" ')
disp (' (l_inear-q_uadratic r_egulator - Iqr)'),disp(' ')
disp ('Macierze ukladu A,B')
A=[-2 1 0;0 0 1;0 -2 0]
B=[0 0 2] '
C=[2 2 2]
D=[1],pause
Disp ('Macierze wag R,Q w calkowym kryterium jakosci')
Q=[1 0 0;0 0 0 ;0 0 4],R=[2],pause
disp ('1. postac kanoniczna (Ak) macierzy A'); % (*)
[Ak,Bk,Ck,Dk]=canon(A,B,C,D, 'companion') ;
disp (Ak)
disp ('Pierwsza postac kanoniczna (Bk) macierzy B')
disp (Bk),pause
disp ('Sprawdzanie sterowalnosci macierzy Ak,Bk')
wym_Ak= size (Ak) ; wym_Ak=wym_Ak (1,1)
ma_ster_kan=ctrb(Ak,Bk)
rzad_ma_ster_kan=rank (ma_ster_kan) ;
if wym_Ak==rzad_ma_ster_kan
disp('Ak,Bk opisuja uklad sterowalny - ok'),disp(' ')
end
disp ('2. postac kanoniczna Ak2 macierzy A')
Ak2=Ak';disp(Ak2)
Disp ('Druga postac kanoniczna Bk2 macierzy B')
Bk2=rot90(Bk,-l)';disp(Bk2),pause
[K,S]=lqr2(Ak,Bk,Q,R) ;
disp ('Macierz sprzezen K - kl,k2,k3'),K
disp ('Macierze Riccatiego _ S'),S
disp ('Wart.wlasne ukl. bez sprzezenia')
eig (Ak)
disp ('Wart.wlasne ukl. ze sprzezen')
eig(Ak-Bk*K)
disp ('Odpowidzi skokowe przed/po wl.regulatora'),pause
subplot(211);step(Ak,Bk,Ck,Dk) ;
subplot(212);step(Ak-Bk*K,Bk,Ck,Dk),pause%,close all
```



Rys.40.Odpowiedź skokowa układu przed i po włączeniu analogoweg „liniowo-kwadratowego regulatora".

Założenia do programu dyskretnego „liniowo kwadratowego regulatora.

Regulator powinien minimalizować kryterium jakości w postaci:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = [2 \;\; 2 \;\; 2] \quad D = [1].$$

w którym : y - sygnał wyjściowy , u - sygnał sterowania , Q = [0.04], R = [0.02].

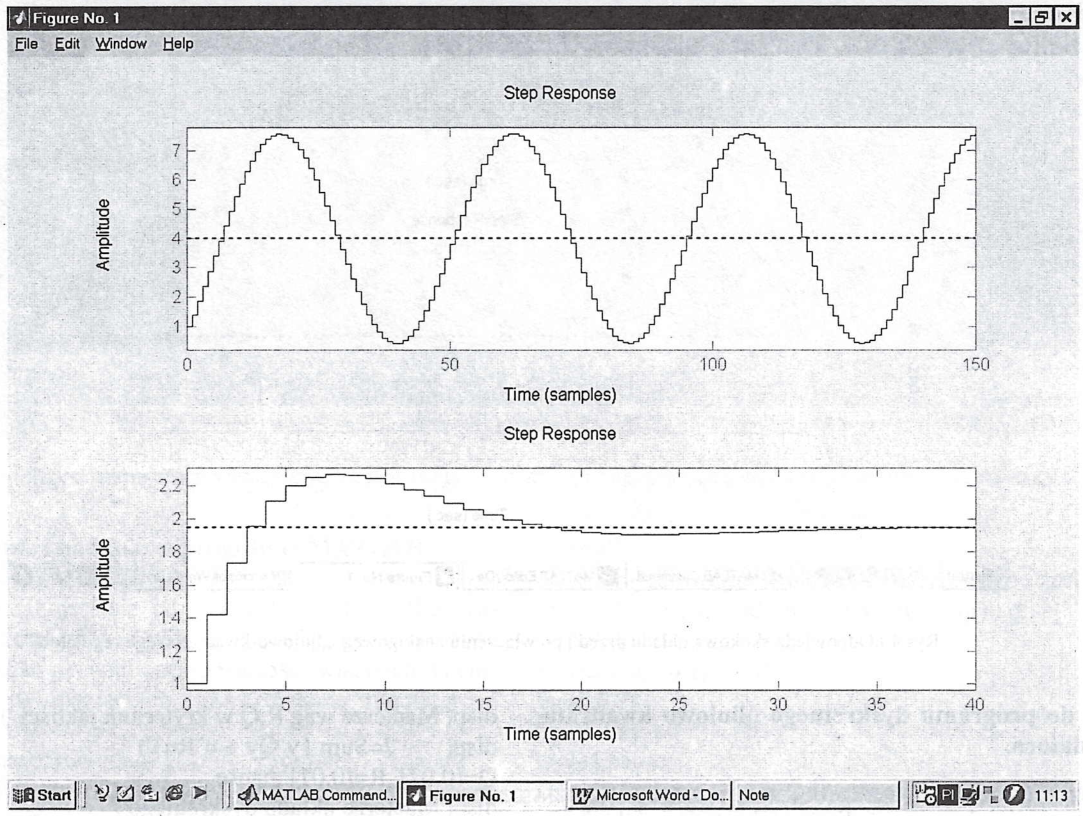
$$J = \sum_{i=1}^{\infty}(y'(i)Qy(i) + u'(i)Ru(i))$$

Należy przyjąć czas próbkowania $T_s = 0.1$s.

Program dyskretnego „liniowo-kwadratowego regulatora"

```
% t0704_58 Projektowanie dyskretnego "liniowo-kwadratowego
%        regulatora" na zgodnosc z kryterium
%        J=Sum{y'Qy +u'Ru}
% clear,clc
%disp('Projekt dyskretnego "liniowo-kwadratowego regulatora" ')
%disp('Macierze układu A, B, C, D układu ciagłego')
A=[-2 1 0;0 0 1;0 -2 0]
B=[0 0 2] '
C=[2 2 2]
D=[1],pause
Ts=0.1; %Czas probkowania
disp('Macierze wag R,Q w kryterium jakości ')
disp('     J=Sum {y`Qy + u`Ru}')
Q=[0.02] ,R=[0.01] ,pause
disp('Macierze układu dyskretnego')
[Ad, Bd, Cd, Dd] =c2dm (A, B, C, D, Ts, ' zoh')
disp('l. postac kanoniczna (Adk) macierzy Ad'); % (*)
[Adk,Bdk,Cdk,Ddk]=canon(Ad,Bd,Cd,Dd,'companion') ;
disp(Adk)
disp('Pierwsza postać kanoniczna (Bdk) macierzy Bd')
disp(Bdk),pause
disp('Sprawdzenie sterowalnosci macierzy Adk,Bdk')
wym_Adk=size (Adk) ;wym_Adk=wym_Adk (l, l)
ma_ster_kan=ctrb(Adk,Bdk)
rząd_ma_ster_kan=rank (ma_ster_kan) ;
if wym_Adk==rzad_ma_ster_kan
disp('Adk,Bdk opisuja układ sterowalny - ok'), disp(' ')
end
disp('2. postac kanoniczna Adk2 macierzy Ad')
Adk2=Adk' ;disp (Adk2)
disp('Druga postac kanoniczna Bdk2 macierzy Bd')
Bdk2=rot90(Bdk,-l)';disp(Bdk2).pause
[K,S,E]=dlqry(Adk,Bdk,Cdk,Ddk,Q,R);
disp('Macierz sprzezen K -kl,k2,k3'),K,pause
    disp('Macierz Riccatiego -S'),S
disp('Wart.wlasne ukl.bez sprzenenia')
eig(Adk)
disp('Wart.wlasne ukl. ze sprzenieniem')
eig(Adk-Bdk*K)
disp('Odpowiedzi skokowe przed/po wl.regulatora').pause
% Wykresy(wraz z ich porownaniem)
%Obiektu
[y,x]=dstep(Adk,Bdk,Cdk,Ddk);
```

```
r=size(y);n=l:l:r;
plot(n,y);grid;hold on,pause
dstep(Adk,Bdk,Cdk,Ddk);pause
%Obiektu z regulatorem
[yl,xl]=dstep(Adk-Bdk*K,Bdk,Cdk,Ddk);
%y2=yl(l:r,:);%Wymiar_yl=wymiar_y
%plot(n,y2,'r+').pause
%dstep(Adk-Bdk*K,Bdk,Cdk,Ddk) ;
%pause,close all,echo off
subplot(211);dstep(Adk,Bdk,Cdk,Ddk);
subplot(212);dstep(Adk-Bdk*K,Bdk,Cdk,Ddk),pause,close
all
```



Rys.41. Odpowiedź skokowa układu przed i po włączeniu dyskretnego „liniowo-kwadratowego regulatora".

Literatura

[1] Ackerman J: Regulacja impulsowa. WNT, Warszawa 1976.

[2] Bocian S.,Frączek J.: Model matematyczny regulatora PID do komputerowego sterowania przetwornikiem elektropneumatycznym sterowanym analogowo. Opracowanie IPS"TABOR" OR-8238 opracowanie niepublikowane w ramach grantu KBN nr 9T12C 01018; Poznań, maj 2000.

[3] Brzózka J.:Ćwiczenia z automatyki w MATLABIE i SIMULINKU. MIKOM, Warszawa 1997.

[4] Dębowski A.: Procedury regulacyjne sterowników programowalnych. Pomiary Automatyka Robotyka, nr1/2001.

[5] FindeisenW.: Technika regulacji automatycznej. PWN, Warszawa 1969.

[6] Findeisen W.: Poradnik inżyniera automatyka. WNT, Warszawa 1975.

[7] Gutenbaum J.: Problemy teorii regulatorów, WNT, Warszawa 1975

[8] Kaczorek T.: Teoria układów regulacji automatycznej. WNT, Warszawa 1997.

[9] Kaczorek T.: Teoria sterowania i systemów. PWN, Warszawa 1993.

[10] Mrozek B., Mrozek Z.: MATLAB 5.x SIMULINK 2.x.PLJ, Warszawa 1998.

[11] Niederliński A.: Systemy cyfrowe automatyki przemysłowej T.2. WNT, Warszawa 1977.

[12] Niederliński A.: Systemy i sterowanie wstęp do automatyki i cybernetyki technicznej. PWN, Warszawa 1983.

[13] Nowacki P., Szklarski L., Górecki H.: Podstawy teorii układów regulacji automatycznej T.2.PWN,1962.

[14] Pułaczewski J.: Podstawy regulacji automatycznej. WS i P, Warszawa, 1985.

[15] Stokłosa J.: Elektryczne regulatory przemysłowe. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1986.

[16] Szklarski L., Kozioł R.:Cyfrowe sterowanie w układach napędu elektrycznego. PWN, Warszawa 1986.

[17] Takahashi Y., Rabins M.J., Auslander D.M.: Sterowanie i systemy dynamiczne. WNT. Warszawa 1976.

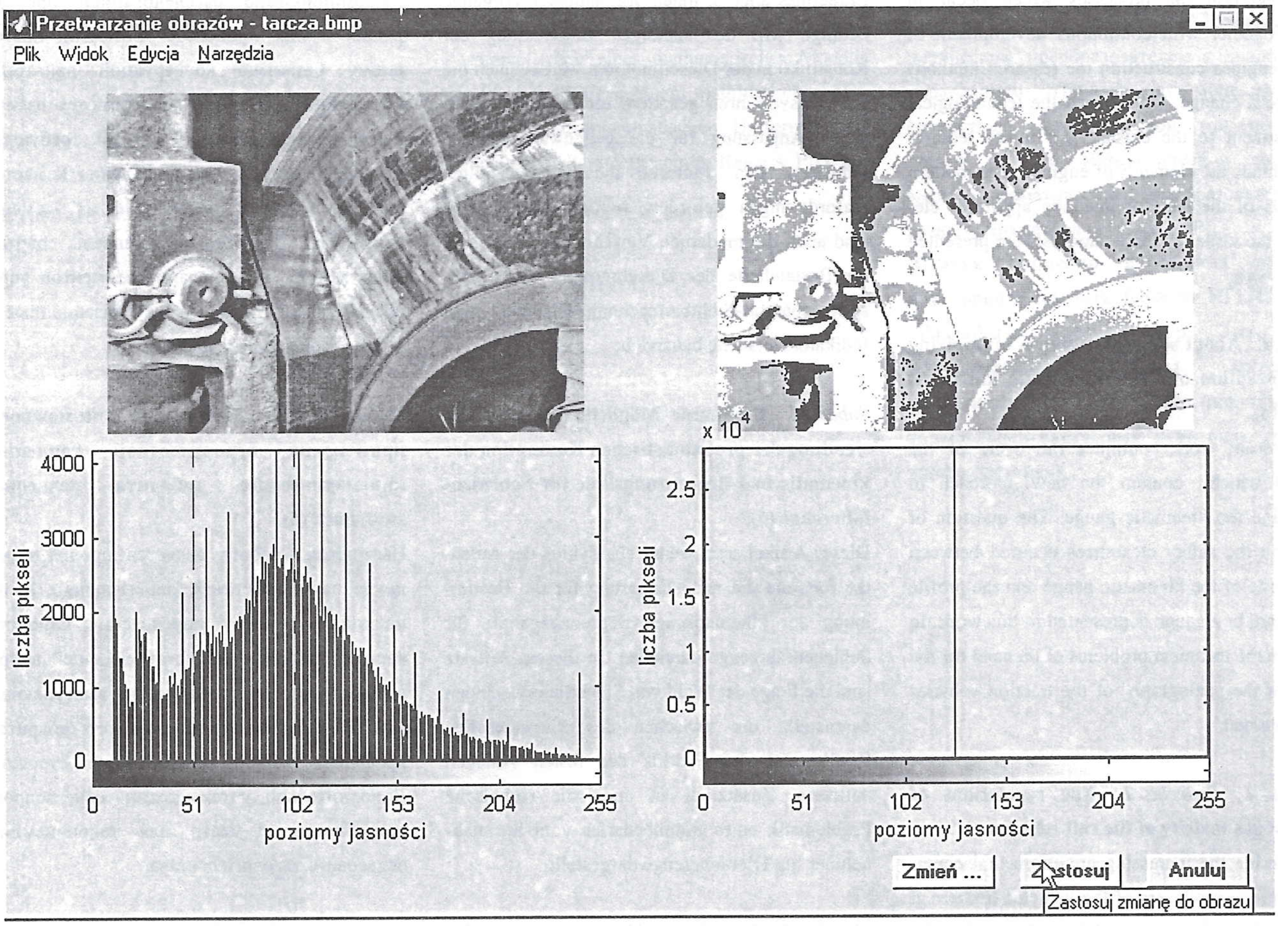
[18] Węgrzyn S.: Podstawy automatyki. PWN, Warszawa 1980.

[19] Zalewski A., Cegieła R.: MATLAB, Nakom, Poznań 1996

Errata

do artykułu „Przetwarzanie obrazu w wizyjnej kontroli i diagnostyce hamulca tarczowego", Pojazdy Szynowe nr 2, 2000, pp.45.

Rys. 36 jest identyczny z rys. 35, a powinien wyglądać następująco:



Rys.36 Obrazy przed segmentacją (a) i po segmentacji binarnej wieloprogowej, progi 51 i 102 na 256 poziomów jasności (b).

Za popełniony błąd przepraszają autorzy artykułu.