dr inż. Adam Kadziński
Politechnika Poznańska
dr Agata Załęska-Fornal
Akademia Marynarki Wojennej w Gdyni

Modele optymalizacyjne liczby lokomotyw w systemie Przeznaczonym do realizacji losowej liczby zadań

W pracy przedstawiono modele optymalizacyjne systemu lokomotyw przeznaczonego do realizacji losowej liczby zadań. Podano optymalizacyjny model matematyczny tego typu systemów. Na podstawie modelu matematycznego zbudowano optymalizacyjne modele symulacyjne. Sformułowano przykładowe problemy optymalizacyjne. Przeprowadzono obliczenia i pokazano ich wybrane wyniki.

1. Wprowadzenie

Rozpatrywany jest problem operatora transportu, który świadczy usługi na rynku usług publicznych. Do realizacji usług operator dysponuje m.in. systemem lokomotyw zorganizowanym w strukturze kolei. Rynek usług transportowych świadczonych przez operatorów transportu kolejowego może być określany za pomocą liczby zadań transportowych. Niech *zadanie transportowe* jest to usługa realizowana przez operatora (system) za pomocą jednej lokomotywy w ciągu pewnego okresu czasu. Przyjmuje się, że zapotrzebowanie na tak określone zadania transportowe jest losowe. W takiej sytuacji, u operatorów transportu kolejowego, zaistnieć może potrzeba optymalizacji liczby własnych lokomotyw gotowych do realizacji zadań transportowych. W procesie optymalizacji liczności parku własnych lokomotyw, można wykorzystać kryterium minimum średnich kosztów funkcjonowania systemu lokomotyw w długim okresie czasu. Jeden ze sposobów rozwiązania tego problemu rozpatrywano już w pracy [2]. Przedstawiono w niej model matematyczny i zbudowany na jego podstawie symulator cyfrowy kosztów funkcjonowania systemu lokomotyw przeznaczonego do realizacji losowej liczby zadań transportowych. Symulator wykorzystano do przeprowadzenia szeregu eksperymentów symulacyjnych podczas których, w poszukiwaniu optymalnej liczby lokomotyw w systemie, przeszukiwano systematycznie obszar rozwiązania dopuszczalnego.
Celem niniejszej pracy jest budowa optymalizacyjnych modeli liczby lokomotyw będących własnością operatora transportu kolejowego podejmującego się realizacji, opisanej wybranymi rozkładami prawdopodobieństwa, losowej liczby zadań transportowych.

2. Optymalizacyjny model matematyczny liczby lokomotyw w systemie przeznaczonym do realizacji losowej liczby zadań

2.1. Założenia i koncepcja modelu

1. System lokomotyw operatora transportu kolejowego pracuje w czasie ciągłym, ale wszystkie możliwe zmiany stanu systemu dokonywane są w określonych chwilach czasu $t_1, t_2, \ldots$. W stałych przedziałach czasu $T_i = \langle t_i, t_{i+1})$ pomiędzy kolejnymi chwilami t_i ($i = 1,2, \ldots$) stan systemu nie zmienia się. Długość wszystkich okresów T_i pracy systemu jest taka sama $\Delta t = t_{i+1} - t_i$. W systemie może znajdować się losowa liczba lokomotyw $L_{lok}(T_i)$ gotowych do realizacji określonych zadań.

Stosowane oznaczenia i koncepcję modelu problemu decyzyjnego realizacji zadań transportowych przez system lokomotyw operatora transportu kolejowego, pokazano na rys. 1.

2. W tym modelu przyjmujemy, że w okresach T_i ($i = 1,2, \ldots$), system dysponuje stałą liczbą L_{lok} własnych lokomotyw gotowych do realizacji zadań transportowych, tzn. że:

$$L_{lok}(T_i) = L_{lok}, \text{ dla } i = 1,2,\ldots$$

3. W chwili t_i określane jest zadanie systemu lokomotyw, wyrażające się liczbą pojazdów $L_{popyt}(T_i)$, które są potrzebne do realizacji tego zadania. Rozkład zmiennej losowej $L_{popyt}(T_i)$ określającej liczbę lokomotyw l potrzebnych do realizacji zadania systemu w okresie T_i, przedstawiają zależności postaci:

$$F_{popyt}(l) = \mathrm{P}\{L_{popyt}(T_i) < l\},$$
$$f_{popyt}(l) = \frac{dF_{popyt}(l)}{dl}, \quad l \in \langle 0, \infty) \tag{2}$$

System lokomotyw realizuje wszystkie zgłoszenia zadań transportowych, nawet wtedy gdy do wykonania ich części istnieje konieczność wynajęcia $L_{wy}(T_i)$ lokomotyw z innego systemu.

4. Koszty działalności systemu lokomotyw wynikają z następujących kosztów jednostkowych (przypadających na ustalony przedział czasu T_i):

i) k_{wl} - jednostkowy średni koszt wykonania zadania transportowego własną lokomotywą;

ii) k_{wy} - jednostkowy średni koszt realizacji zadania transportowego wynajętą lokomotywą;

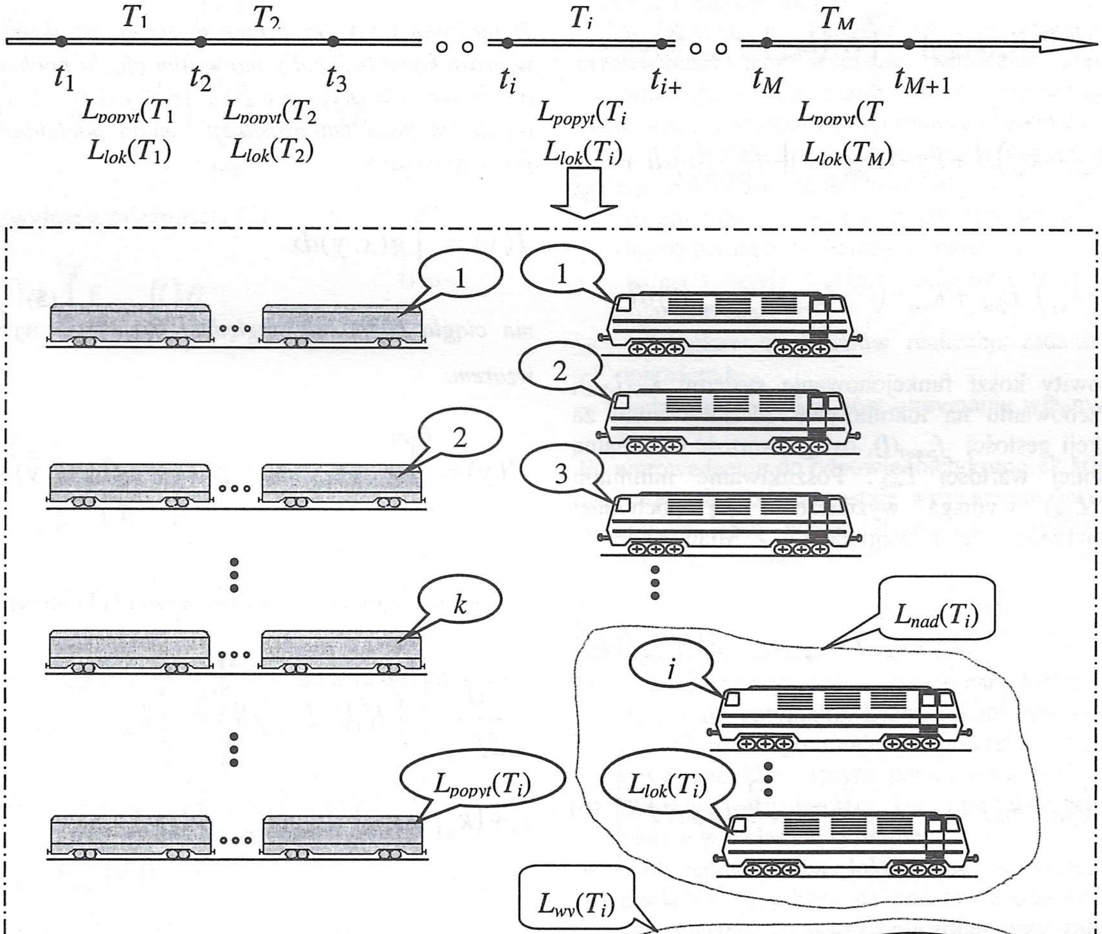
iii) k_{ut} - jednostkowy średni koszt utrzymania własnej lokomotywy bez względu na to czy są dla niej zadania transportowe czy też nie.

2.2. Model matematyczny

W warunkach stałej liczby L_{lok} własnych lokomotyw i losowego zapotrzebowania na nie, w okresie czasu T_i, generowane są określone całkowite koszty $K_i(L_{lok})$ funkcjonowania systemu. Koszty te przedstawiają następujące modele matematyczne:

a) jeżeli $L_{lok} \geq L_{popyt}(T_i)$, tzn. liczba własnych lokomotyw gotowych do realizacji zadań transportowych jest co najmniej równa zapotrzebowaniu na nie, to

$$K_i(L_{lok}) = (k_{wl} + k_{ut}) \cdot L_{popyt}(T_i) + k_{ut} \cdot \cdot (L_{lok} - L_{popyt}(T_i)) \tag{3}$$



Rys. 1. Schemat ideowy modelu problemu decyzyjnego realizacji zadań transportowych przez system lokomotyw operatora transportu kolejowego (wyjaśnienie oznaczeń w tekście).

b) jeżeli $L_{lok} < L_{popyt}(T_i)$, tzn. liczba lokomotyw własnych gotowych do realizacji zadań transportowych jest mniejsza od zapotrzebowania na nie, to

$$K_i(L_{lok}) = (k_{wl} + k_{ut}) \cdot L_{lok} + k_{wy} \cdot (L_{popyt}(T_i) - L_{lok}) \quad (4)$$

Zakładamy, że zapotrzebowanie (popyt) na lokomotywy jest zmienną losową typu ciągłego oraz L_{max} jest maksymalną liczbą lokomotyw, na którą może być popyt. Wtedy średni całkowity koszt $K_{śr}(L_{lok})$ funkcjonowania systemu w okresie czasu Δt (wartość oczekiwana zmiennej losowej oznaczającej całkowity koszt $K_i(L_{lok})$) wyraża się wzorem:

$$K_{śr}(L_{lok}) = \mathrm{E}[K_i(L_{lok})] = \int_0^{L_{max}} K_i(L_{lok}) \cdot f_{popyt}(l)\,dl =$$
$$= \int_0^{L_{lok}} [(k_{wl} + k_{ut}) \cdot l + k_{ut} \cdot (L_{lok} - l)] \cdot f_{popyt}(l)\,dl +$$
$$+ \int_{L_{lok}}^{L_{max}} [(k_{wl} + k_{ut}) \cdot L_{lok} + k_{wy} \cdot (l - L_{lok})] \cdot f_{popyt}(l)\,dl \quad (5)$$

Średni całkowity koszt funkcjonowania systemu $K_{śr}(L_{lok})$, przy zapotrzebowaniu na lokomotywy zdefiniowanym za pomocą funkcji gęstości $f_{popyt}(l)$, osiąga wartość minimalną przy określonej wartości L_{lok}. Poszukiwanie minimum funkcji $K_{śr}(L_{lok})$ wymaga wyznaczenia jej pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu względem L_{lok}. Mianowicie:

$$\frac{dK_{śr}(L_{lok})}{dL_{lok}} = \frac{d}{dL_{lok}} \left\{ \int_0^{L_{lok}} [(k_{wl} + k_{ut}) \cdot l + k_{ut} \cdot (L_{lok} - l)] \cdot f_{popyt}(l)\,dl \right\}$$
$$+ \frac{d}{dL_{lok}} \left\{ \int_{L_{lok}}^{L_{max}} [(k_{wl} + k_{ut}) \cdot L_{lok} + k_{wy} \cdot (l - L_{lok})] \cdot f_{popyt}(l)\,dl \right\} \quad (6)$$

Dla prostoty obliczeń wykonamy następujące podstawienia:

$$K_1(l, L_{lok}) = [(k_{wl} + k_{ut}) \cdot l + k_{ut} \cdot (L_{lok} - l)] \cdot f_{popyt}(l) \quad (7)$$

i

$$K_2(l, L_{lok}) = [(k_{wl} + k_{ut}) \cdot L_{lok} + k_{ut} \cdot (l - L_{lok})] \cdot f_{popyt}(l) \quad (8)$$

Wtedy pochodna (6) przyjmie postać:

$$\frac{dK_{śr}(L_{lok})}{dL_{lok}} = \frac{d}{dL_{lok}} \left\{ \int_0^{L_{lok}} K_1(l, L_{lok})\,dl \right\} +$$
$$+ \frac{d}{dL_{lok}} \left\{ \int_{L_{lok}}^{L_{max}} K_2(l, L_{lok})\,dl \right\} \quad (9)$$

Do wyznaczenia pochodnych we wzorze (9) wykorzystamy regułę Leibniza o różniczkowaniu pod znakiem całki w przypadku, gdy granice całkowania zależą od parametru.

Twierdzenie ([1]). *Jeżeli funkcja $g(x,y)$ jest określona i ciągła w prostokącie $\langle a,b;c,d \rangle$, ma w nim ciągłą pochodną $g'_y(x,y)$, a krzywe $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$ $(c \le y \le d)$ są ciągłe i nie wychodzą poza ten prostokąt i mają pochodne $\alpha'(y)$ oraz $\beta'(y)$, to całka*

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} g(x,y)\,dx \quad (10)$$

ma ciągłą pochodną względem parametru wyrażającą się wzorem:

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} g'_y(x,y)\,dx + \beta'(y) g(\beta(y), y) -$$
$$- \alpha'(y) g(\alpha(y), y). \quad (11)$$

Korzystając z twierdzenia i zależności (11) otrzymujemy:

$$\frac{d}{dL_{lok}} \left\{ \int_0^{L_{lok}} K_1(l, L_{lok})\,dl \right\} = \int_0^{L_{lok}} k_{ut} \cdot f_{popyt}(l)\,dl +$$
$$+ (k_{wl} + k_{ut}) \cdot L_{lok} \cdot f_{popyt}(L_{lok}) \quad (12)$$

$$\frac{d}{dL_{lok}} \left\{ \int_{L_{lok}}^{L_{max}} K_2(l, L_{lok})\,dl \right\} =$$
$$= \int_{L_{lok}}^{L_{max}} (k_{wl} + k_{ut} - k_{wy}) \cdot f_{popyt}(l)\,dl -$$
$$- (k_{wl} + k_{ut}) \cdot L_{lok} \cdot f_{popyt}(L_{lok}) \quad (13)$$

Zatem

$$\frac{dK_{śr}(L_{lok})}{dL_{lok}} = \int_{0}^{L_{lok}} k_{ut} \cdot f_{popyt}(l)dl + \int_{L_{lok}}^{L_{max}} (k_{wl} + k_{ut} - k_{wy}) \cdot f_{popyt}(l)dl \tag{14}$$

$$\frac{dK_{śr}(L_{lok})}{dL_{lok}} = k_{ut} \cdot \int_{0}^{L_{lok}} f_{popyt}(l)dl + (k_{wl} + k_{ut} - k_{wy}) \cdot \int_{L_{lok}}^{L_{max}} f_{popyt}(l)dl \tag{15}$$

Ponieważ, zgodnie z zależnością (2)

$$F_{popyt}(L_{lok}) = \int_{0}^{L_{lok}} f_{popyt}(l)dl$$

stąd

$$\frac{dK_{śr}(L_{lok})}{dL_{lok}} = k_{ut} \cdot F_{popyt}(L_{lok}) + (k_{wl} + k_{ut} - k_{wy}) \cdot [1 - F_{popyt}(L_{lok})] = F_{popyt}(L_{lok}) \cdot (k_{wy} - k_{wl}) + (k_{wl} + k_{ut} - k_{wy}) \tag{16}$$

Przyrównując pochodną $\frac{dK_{śr}(L_{lok})}{dL_{lok}}$ do zera otrzymujemy:

$$\frac{dK_{śr}(L_{lok})}{dL_{lok}} = 0 \Leftrightarrow F_{popyt}(L_{lok}) \cdot (k_{wy} - k_{wl}) + (k_{wl} + k_{ut} - k_{wy}) = 0, \tag{17}$$

a stąd

$$F_{popyt}(L_{lok}) = \frac{k_{wy} - (k_{wl} + k_{ut})}{k_{wy} - k_{wl}} \tag{18}$$

Dla tak wyznaczonej wartości funkcja $K_{śr}(L_{lok})$ osiąga minimum. Wyznaczając L_{lok} ze wzoru (18) możemy zapisać formułę pozwalającą na obliczanie optymalnej liczby lokomotyw w systemie. Mianowicie:

$$L_{lok} = F_{popyt}^{-1}\left(\frac{k_{wy} - (k_{wl} + k_{ut})}{k_{wy} - k_{wl}}\right) \tag{19}$$

3. Optymalizacyjne modele symulacyjne liczby lokomotyw w systemie przeznaczonym do realizacji losowej liczby zadań

Proces wyznaczania liczby lokomotyw (wg formuły 19) jaką winien dysponować, ze względu na koszty funkcjonowania, optymalny system przeznaczony do realizacji losowej liczby zadań, oprogramowano w postaci pakietu arkuszy kalkulacyjnych *MOLL.Xls* (Modele Optymalizacji Liczby Lokomotyw) w formacie programu Microsoft Excel. Kolejne arkusze pakietu są odwzorowaniem algorytmu optymalizacji liczby lokomotyw w systemie gdy zapotrzebowanie na lokomotywy określane jest za pomocą rozkładów: normalnego, wykładniczego przesuniętego, równoprawdopodobnego i empirycznego (rys. 2).

W arkuszach kalkulacyjnych pakietu MOLL.Xls przewidziano trzy wyraźnie widoczne części. Są to: formularz do wprowadzania danych wejściowych modelu, część przedstawiająca wyniki obliczeń i baza danych modelu.

W formularzu do wprowadzania danych wejściowych istnieje możliwość zadeklarowania:

- parametrów rozkładu zapotrzebowania na pojazdy (liczba parametrów zależy od modelu),
- jednostkowych kosztów realizacji zadania własnym pojazdem k_{wl},
- jednostkowych kosztów realizacji zadania wynajętym pojazdem k_{wy},
- jednostkowych kosztów utrzymania własnych pojazdów k_{ut}.

Po wprowadzeniu do odpowiednich komórek arkuszy danych wejściowych modelu, zostaje wyznaczona optymalna liczba lokomotyw jaką winien dysponować system, który ma zrealizować losową liczbę zadań określoną rozkładem prawdopodobieństwa o zadeklarowanych wcześniej parametrach. W części arkusza przedstawiającej wyniki obliczeń podawane są:

- wartość dystrybuanty rozkładu przy założeniu, że system dysponuje optymalną liczbą lokomotyw odpowiadająca: typowi badanego modelu zapotrzebowania na lokomotywy, zadeklarowanym parametrom rozkładu zapotrzebowania, jednostkowym kosztom funkcjo-nowania lokomotyw w badanym systemie,
- optymalna liczba lokomotyw w systemie (wartość dokładna uzyskana na podstawie odwrócenia wartości dystrybuanty rozkładu obliczonej przy założeniu, że w systemie będzie optymalna liczba lokomotyw, wartość zaokrąglona obliczona na podstawie zaokrąglenia do wartości całkowitej wyznaczonej wcześniej wartości dokładnej).

Wyniki przeprowadzonej symulacji mogą być zapamiętane w postaci rekordu w bazie danych modelu. W tym celu przygotowana jest odpowiednia procedura, która uruchamiana jest za pomocą przycisku »Zapis do bazy«. Dodatkowo, w bazie danych modelu, mogą być wykonywane następujące operacje (rys. 2):

- sortowanie bazy danych w każdym z pól rekordu (przyciski »*Sortuj malejąco*« i »*Sortuj rosnąco*«),
- usuwanie wybranych rekordów (przycisk »*Usuń wiersz z bazy*«),

- całkowite czyszczenie bazy modelu (przycisk »*Wyczyść bazę*«),
- przepisanie danych z wybranego rekordu bazy danych do formularza danych wejściowych modelu (przycisk »*Przepisz dane*«, ta opcja nie obowiązuje w MODELU EMPIRYCZNYM),
- drukowanie wszystkich rekordów bazy danych i bieżących wartości z komórek formularza danych wejściowych (przycisk »*Drukuj wyniki*«).

Użytkownik pakietu ma do także dyspozycji, na ekranie monitora, przyciski pozwalające w łatwy sposób przemieszczać się do arkuszy obsługujących inne modele. Przykładowo, z arkusza obsługującego MODEL EMPIRYCZNY istnieje możliwość przejścia do (rys. 2): MODELU NORMALNEGO (przycisk »*Do modelu normalnego*«), MODELU WYKŁADNICZEGO (przycisk »*Do modelu wykładniczego*«), MODELU RÓWNOPRAWDOPODOBNEGO (przycisk »*Do modelu równoprawdop.*«).

4. Przykładowy problem optymalizacyjny

4.1. Sformułowanie problemu optymalizacyjnego

Określone jest zadanie systemu lokomotyw, na które składają się zadania transportowe rozumiane jak w punkcie 2.1 System wykonuje zadanie za pomocą własnych lokomotyw i lokomotyw wynajętych. Jego realizacja wiąże się z określonymi kosztami. Niech średnie koszty funkcjonowania systemu lokomotyw w okresie T_i, wyznacza zależność (5). Wynika z niej, że koszty te zależą od:

- liczby lokomotyw własnych gotowych do realizacji zadań transportowych - L_{lok},
- rozkładu zapotrzebowania na lokomotywy w okresie -T_i,
- jednostkowych średnich kosztów wykonywania zadania transportowego własną lokomotywą - k_{wl},
- jednostkowych średnich kosztów wykonywania zadania transportowego wynajętą lokomotywą - k_{wy},
- jednostkowych średnich kosztów utrzymywania w okresie T_i własnej lokomotywy - k_{ut}.

Niech rozkład zapotrzebowania na lokomotywy, rozumiany jako rozkład zmiennej losowej $L_{popyt}(T_i)$ określającej liczbę lokomotyw potrzebnych do realizacji zadania systemu w okresie T_i, przedstawia zależność:

$$F_{popyt}(l)=P\{L_{popyt}(T_i)<l\}=\begin{cases}0.25 & \text{dla } 20\le l\le 22\\ 0.50 & \text{dla } 22<l\le 24\\ 0.75 & \text{dla } 24<l\le 26\\ 1.00 & \text{dla } 26<l\le 28\end{cases} \quad (20)$$

Dodatkowo niech jednostkowy średni koszt wykonania zadania transportowego własną lokomotywą wynosi k_{wl} = 800 zł, zaś jednostkowy średni koszt wykonania zadania wynajętą lokomotywą wynosi 2000 zł.

Należy wyznaczyć liczby lokomotyw własnych jakimi winien dysponować system o opisanych wcześniej parametrach aby średnie koszty jego funkcjonowania były jak najmniejsze. W procesie optymalizacji należy uwzględnić różne jednostkowe średnie koszty utrzymywania własnych lokomotyw - k_{ut}.

4.2. Wyniki eksperymentu optymalizacyjnego

Do rozwiązania postawionego problemu optymalizacyjnego zaplanowano eksperyment optymalizacyjny. Wykorzystano do tego celu MODEL EMPIRYCZNY pakietu MOLL.Xls. Eksperyment optymalizacyjny przeprowadzono w kilkudziesięciu doświadczeniach. Wyniki niektórych doświadczeń eksperymentu optymalizacyjnego zapamiętano w bazie danych modelu i pokazano na rys. 2. Pełny zestaw wyników eksperymentu optymalizacyjnego zebrano w tabeli 1.

Zestawienie wyników eksperymentu optymalizacyjnego

Tabela 1

Lp.	Średnie jednostkowe koszty utrzymania własnych lokomotyw k_{ut} w [zł]				Liczba lokomotyw L_{lok}
1	od	0	do	75	28
2	od	76	do	225	27
3	od	226	do	375	26
4	od	376	do	525	25
5	od	526	do	675	24
6	od	676	do	825	23
7	od	826	do	975	22
8	od	976	do	1125	21
9	od	1126	do	1200	20

LP.	L_{lok}	$F_{popyt}(L_{lok})$	k_{wl} [zł]	k_{wy} [zł]	k_{ut} [zł]
1	28	0,9375	800,00	2 000,00	75,00
2	27	0,8125	800,00	2 000,00	225,00
3	26	0,6875	800,00	2 000,00	375,00
4	25	0,5625	800,00	2 000,00	525,00
5	24	0,4375	800,00	2 000,00	675,00
6	23	0,3125	800,00	2 000,00	825,00
7	22	0,2292	800,00	2 000,00	975,00
8	21	0,1458	800,00	2 000,00	1 125,00
9	20	0,0000	800,00	2 000,00	1 200,00
10	26	0,7000	800,00	2 000,00	360,00

od		do	Prawdopod.
20	-	22	0,250
22	-	24	0,250
24	-	26	0,250
26	-	28	0,250

Rys.2. Optymalizacyjny model symulacyjny liczby lokomotyw w systemie przeznaczonym do realizacji losowej liczby zadań generowanej na podstawie emprycznego rozkładu prawdopodobieństwa (wyjaśnienie oznaczeń w tekście).

5. Podsumowanie

W artykule pokazano jak prowadzić proces optymalizacji liczności parku własnych lokomotyw pewnego operatora transportu kolejowego, przy zastosowaniu kryterium minimum średnich kosztów funkcjonowania systemu lokomotyw. W tym celu sformułowano postać ogólną problemu decyzyjnego realizacji zadań transportowych przez system lokomotyw operatora transportu kolejowego. Sformułowany problem opisano za pomocą modelu matematycznego (5). Na podstawie tego modelu uzyskano formułę (19) pozwalającą na obliczanie optymalnej liczby lokomotyw w systemie operatora transportu kolejowego. Proces wyznaczania optymalnej liczby lokomotyw oprogramowano w formacie programu Microsoft Excel i zebrano w pakiet arkuszy kalkulacyjnych *MOLL.Xls*.

Aby wyznaczyć wartości średnich kosztów funkcjonowania systemu lokomotyw operatora transportu, dysponującego optymalną lub różną od optymalnej liczbą lokomotyw, można skorzystać z symulatora *Sym_Sys_Lok_1.Xls*. Model matematyczny średnich kosztów funkcjonowania systemu lokomotyw i opis symulatora *Sym_Sys_Lok_1.Xls* zawiera praca [2].

W systemach lokomotyw przeznaczonych do wykonywania losowej liczby zadań transportowych istnieje zawsze konflikt między ich niezawodnością (wyrażaną np. charakterystykami gotowości systemów) i kosztami funkcjonowania. Sposób uwzględnienia tego konfliktu w procesach racjonalizacji systemów pojazdów (na przykładzie pewnego operatora transportu) pokazano w pracy [3]. Do prowadzenia badań opisanych w pracy [3], wykorzystać można symulator cyfrowy Sym_Sys_Lok_2.Xls zbudowany na bazie komputerowego arkusza kalkulacyjnego.

Zaprezentowany w artykule przykład obliczeniowy należy traktować jako pokazanie potencjalnych możliwości opracowanych modeli. Badania symulacyjne, których założenia i wyniki przedstawiono w niniejszym artykule i w pracach [2,3], potwierdziły przydatność stworzonych modeli matematycznych i symulatorów cyfrowych operatorów transportu kolejowego.

Wszyscy, którzy wyrażą zainteresowanie symulatorami MOLL.Xls, Sym_Sys_Lok_1.Xls, Sym_Sys_Lok_2.Xls - pisząc o tym na adres poczty elektronicznej adam.kadzinski@put.poznan.pl - otrzymają je niezwłocznie.

Literatura

[1] Fichtenholz G. M., Rachunek różniczkowy i całkowy, tom 2, PWN, Warszawa 1965.

[2] Kadziński A., Kwaśnikowski J., Modele i badania symulacyjne kosztów funkcjonowania systemu lokomotyw przeznaczonego do realizacji losowej liczby zadań, Pojazdy Szynowe, 2001, nr 2, s. 47÷51.

[3] Kadziński A., Tomaszewski F., Niezawodnościowy i kosztowy model funkcjonowania systemu pojazdów, w: Materiały Międzynarodowej Konferencji Bezpieczeństwa i Niezawodności KONBiN 2001, Szczyrk, 2001, t.2, s. 201÷209.