prof.dr hab.inż. Włodzimierz Gąsowski
Politechnika Poznańska
Ośrodek Badawczo-Rozwojowy
Pojazdów Szynowych Poznań
doc.dr inż. Ryszard Lang
Ośrodek Badawczo-Rozwojowy
Pojazdów Szynowych Poznań

Kołysanie poprzeczne zestawu kołowego podczas wężykowania w torze (4)

W pracy opisano wzajemne relacje usytuowania zestawu kołowego z wklęsłymi bieżniami kół z torem o wypukłych główkach szyn. Stwierdzono podskakiwanie środka ciężkości zestawu towarzyszące jego wężykowaniu. Wyznaczono częstotliwość tego podskakiwania. Ujawniono, że ta częstotliwość może być źródłem impulsów wywołujących drgania pudła lub wózka pojazdu.

Część IV

OBLICZENIA KINEMATYCZNE ZESTAWU KOŁOWEGO PRZESUNIĘTEGO PROSTOPADLE DO OSI PODŁUŻNEJ TORU ZESTAW KOŁOWY O WKLĘSŁYCH BIEŻNIACH KÓŁ PORUSZAJĄCY SIĘ PO TORZE O WYPUKŁYCH GŁÓWKACH SZYN

1. Wstęp

Celem niniejszej pracy jest analiza poprzecznego kołysania kolejowego zestawu kołowego w torze podczas wężykowania. Autorzy opracowania nie natknęli się w światowej literaturze technicznej na żaden opis tego zjawiska. Jest ono świadomie lub nieświadomie pomijane przez badaczy zagadnienia współpracy kół zestawów kołowych z szynami toru. Dotychczas zjawisko wężykowania utrzymywane jest w konwencji ruchu płaskiego w płaszczyźnie główek szyn. Jednak kołysanie zestawu kołowego jest nierozerwalnie związane z wężykowaniem. Wężykowanie nie może odbywać się bez kołysania zestawu kołowego i na odwrót.

Autorzy sądzili, iż zjawisko kołysania może wywoływać szkodliwe drgania podwozi i nadwozi pojazdów szynowych. Szczegółowa analiza zależnosci geometrycznych zachodzących pomiędzy zestawem kołowym i szynami zawarta w pracy potwierdziła te przypuszczenia.

Obliczenia kinematyki zestawu kołowego przesuniętego prostopadle do osi podłużnej toru podzielono na dwie części. W części III rozpatrzono zestaw kołowy ze stożkowymi bieżniami kół poruszający się po torze krawędziowym [4]. W części IV przedstawiono zestaw z wklęsłymi bieżniami kół toczący się po torze z wypukłymi główkami szyn.

Artykuł jest kontynuacją prac przedstawionych w [2, 3, 4], wykonywanych w ramach projektu badawczego KBN nr 9T 12C 02116 pt.: „Nowa koncepcja skrajni kinematycznej pojazdów szynowych".

2. Zestawienie krzywych konturu główki szyny i konturu bieżni koła stykających się z sobą, gdy zestaw kołowy zajmuje środkowe położenie w torze

Krzywizna wklęsłości konturu bieżni prawego koła jest to łuk okręgu o równaniu podanym w [3], wzór (5):

$$(y-11{,}25)^2+(z-329{,}808)^2=330^2$$

Dla powyższego wzoru początek układu współrzędnych znajduje się w punkcie położonym na konturze bieżni prawego koła i oddalonym o 750 mm od płaszczyzny geometrycznego środka zestawu kołowego.
Zatem promień krzywizny wynosi

$$R_k=330mm,$$

a odcięta środka krzywizny wynosi

$$E_k=11{,}25mm$$

Krzywizna wypukłości konturu główki prawej szyny jest to łuk okręgu o równaniu podanym w [3], wzór (61):

$$(y-10{,}5)^2+(z-299{,}91)^2=300^2$$

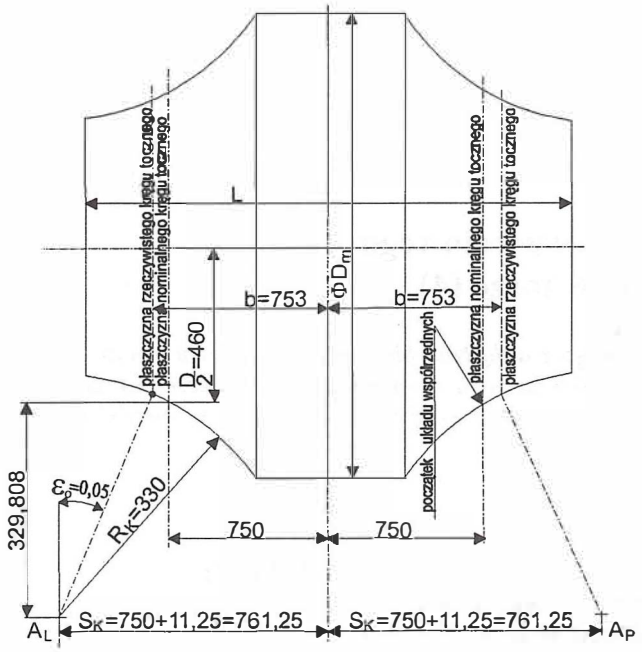
Dla powyższego wzoru początek układu współrzędnych znajduje się w punkcie położonym na konturze główki prawej szyny i oddalonym o 750 mm od podłużnej płaszczyzny symetrii toru.

3. Środkowe położenie zestawu kołowego na torze prostym

Zastąpmy zestaw kołowy bryłą obrotową przedstawioną na rys. 1. Według [3] rozstaw środków krzywizn wklęsłości bieżni kół wynosi:

$$2s_k=2\cdot(750+11{,}25)=1522{,}5mm$$

$$s_k=761{,}25mm$$



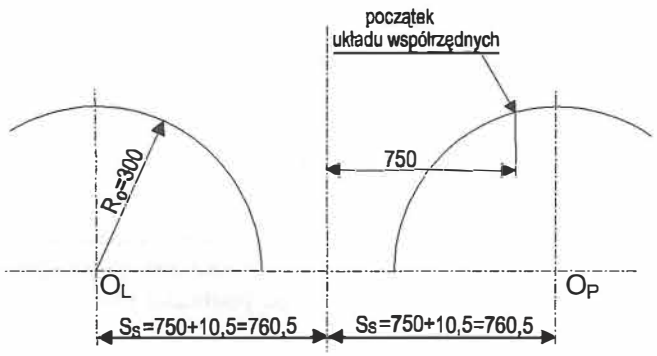
Rys.1. Bryła obrotowa zastępująca zestaw kołowy

Bryła ta stoi na szynach, które zastąpimy dwoma wałkami przedstawionymi na rys.2. Według [3] rozstaw środków krzywizn wypukłości główek szyn wynosi:

$$2s_s = 2\cdot(750+10{,}5) = 2\cdot 760{,}5 = 1521mm$$

$$s_s = 760{,}5mm$$

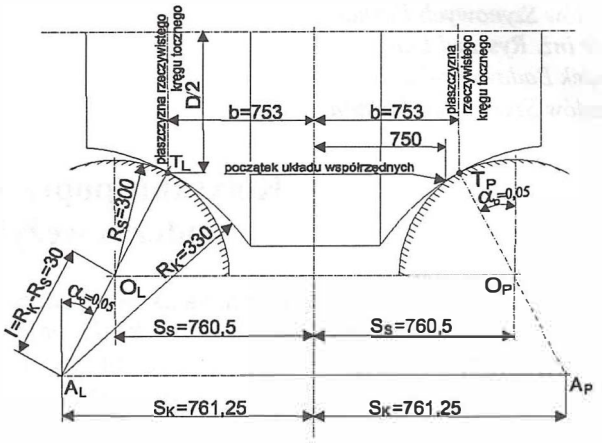
Ustawienie tej bryły obrotowej na w/w wałkach przedstawiono na rys.3.



Rys. 2. Wałki zastępujące szyny

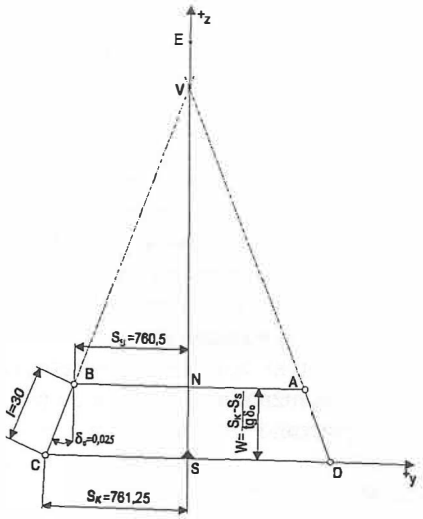
3.1. Mechanizm czteroprzegubowy

Według [1] układ zestawu kołowego z kołami o wklęsłych bieżniach krzywoliniowych, stojącego na wypukłych krzywoprofilowych główkach szyn (rys.3) jest identyczny z czteroprzegubowym mechanizmem złożonym z czterech prętów, w którym górnym nieruchomym prętem poziomym jest stała odległość pomiędzy środkami krzywizn wypukłych na profilach główek szyn, dolnym ruchomym prętem, który



Rys. 3. Ustawienie bryły na wałkach

w swym położeniu środkowym jest poziomy, jest niezmienna odległość pomiędzy środkami krzywizn wklęsłych na profilach bieżni kół, a dwa pozostałe pręty są wieszakami skośnymi, po jednym na każdym końcu obu prętów poziomych. Długością każdego z tych wieszaków jest różnica pomiędzy promieniem krzywizny wklęsłości profilu bieżni koła a promieniem krzywizny wypukłości profilu główki szyny. Do poziomego ruchomego pręta, w środku jego długości, jest przyspawany prostopadły pręt pionowy tworzący z nim jedną integralną sztywną całość i poruszający się wraz z nim (rys.4).



Rys.4. Schemat kinematyczny mechanizmu czteroprzegubowego

Długość wieszaka wynosi

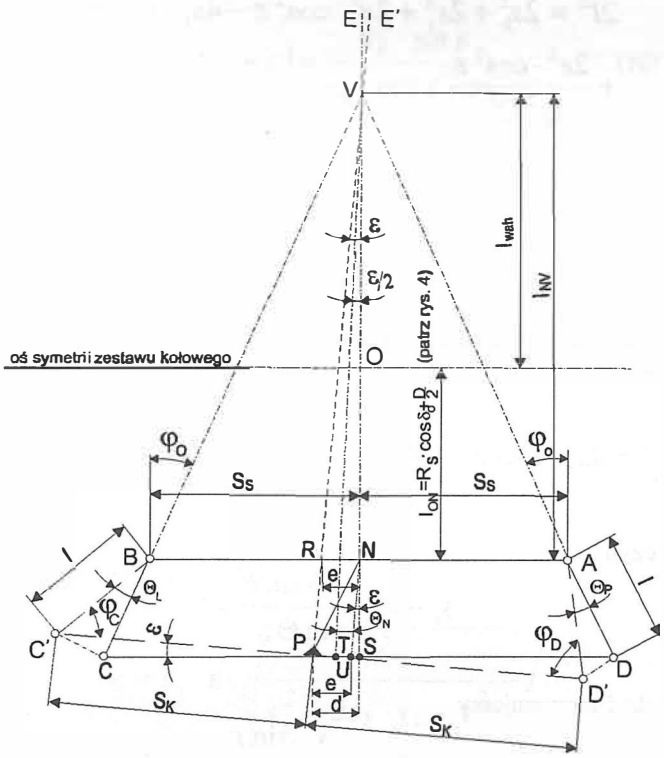
$$l = R_k - R_s = 330 - 300 = 30mm$$

Przyjmijmy początek układu współrzędnych w środku S dolnego ruchomego pręta, oś y będzie się pokrywała z dolnym ruchomym prętem, a jej dodatni kierunek będzie w prawo, natomiast oś z będzie się pokrywała z pionowym prostopadłym prętem, a jej dodatni kierunek będzie w górę.

3.1.1. Kinematyka mechanizmu

Wychylmy mechanizm czteroprzegubowy z położenia środkowego.

Środkowy punkt dolnego ruchomego pręta oddali się o odległość poziomą "d" od osi "z" i zajmie położenie P. Ruchomy pręt CD odchyli się od poziomu o kąt "ε" i zajmie położenie $C'D'$. Prostopadły pręt SE odchyli się od pionu o kąt "ε" i zajmie położenie PE'. Przetnie on linię prostą AB w punkcie R odległym o "e" od osi "z".Lewy wieszak BC odchyli się o kąt Θ_L od swego położenia równowagi i zajmie położenie BC'. Prawy wieszak AD odchyli się od swego położenia równowagi o kąt Θ_P i zajmie położenie AD'. Pomiędzy lewym wieszakiem BC' a dolnym ruchomym prętem $C'D'$ wytworzy się kąt φ_c, który w położeniu równowagi wynosił $90^o - \delta_0$. Pomiędzy prawym wieszakiem a dolnym ruchomym prętem wytworzy się kąt φ_D, który w położeniu równowagi wynosił też $90^o - \delta_0$.



Rys.5. Ruch mechanizmu czteroprzegubowego

Połączmy punkt P z punktem N linią prostą, oraz przeprowadźmy przez punkt N prostą równoległą do wychylonego pręta PE'. Prosta ta przetnie pręt $C'D'$ w punkcie U. Między tą prostą a prostą NP powstanie kąt Θ_N. Z wierzchołka V poprowadźmy dwusieczną kąta ε. Przetnie ona pręt CD w punkcie T. Mamy następujące zależności geometryczne :

– W czworokącie $RBC'P$ z sumy rzutów odcinków na bok $C'P$ otrzymujemy:

$$\left(\overline{BC'}\right)\cdot\cos\varphi_c+\left(\overline{BR}\right)\cdot\cos\varepsilon=\overline{C'P}$$

czyli

$$\left(\overline{BC'}\right)\cdot\cos\varphi_c+\left[\left(\overline{BN}\right)-\left(\overline{RN}\right)\right]\cdot\cos\varepsilon=C'P$$

Ale

$$\overline{BC'}=l,\overline{BN}=s_s,\overline{RN}=e,\ \text{a}\ C'P=s_k$$

Zatem

$$l\cdot\cos\varphi_c+\left(s_s-e\right)\cdot\cos\varepsilon=s_k$$

czyli

$$l\cdot\cos\varphi_c=s_k+e\cdot\cos\varepsilon-s_s\cdot\cos\varepsilon \qquad (1)$$

– W czworokącie *RAD'P* z sumy rzutów odcinków na bok *PD'* otrzymujemy:

$$\left(\overline{RA}\right)\cdot\cos\varepsilon+\left(\overline{AD'}\right)\cdot\cos\varphi_D=\overline{PD'}$$

czyli

$$\left[\left(\overline{NA}\right)+\left(\overline{RN}\right)\right]\cdot\cos\varepsilon+\left(\overline{AD'}\right)\cdot\cos\varphi_D=\left(\overline{PD'}\right)$$

Ale

$$\overline{NA}=s_s,\ \overline{RN}=e,\ \overline{AD'}=l,\ PD'=s_k$$

Zatem

$$\left(s_s+e\right)\cdot\cos\varepsilon+l\cdot\cos\varphi_D=s_k$$

czyli

$$l\cdot\cos\varphi_D=s_k-e\cdot\cos\varepsilon-s_s\cdot\cos\varepsilon \qquad (2)$$

– W czworokącie *NBC'U* z sumy rzutów odcinków na bok *NU* otrzymujemy:

$$\left(\overline{BC'}\right)\cdot\sin\varphi_c+\left(\overline{BN}\right)\cdot\sin\varepsilon=\overline{NU}$$

Ale

$$\overline{BC'}=l,\ \overline{BN}=s_s,\ \overline{NU}=\left(\overline{PU}\right)\cdot\operatorname{ctg}\Theta_N,$$
$$\overline{PU}=e\cdot\cos\varepsilon$$

Zatem

$$\overline{NU}=e\cdot\cos\varepsilon\cdot\operatorname{ctg}\Theta_N=\frac{e\cdot\cos\varepsilon}{\operatorname{tg}\Theta_N}$$

wobec czego

$$l \cdot \sin \varphi_c + s_s \cdot \sin \varepsilon = \frac{e \cdot \cos \varepsilon}{\operatorname{tg} \Theta_N}$$

czyli

$$l \cdot \sin \varphi_c = \frac{e \cdot \cos \varepsilon}{\operatorname{tg} \Theta_N} - s_s \cdot \sin \varepsilon \qquad (3)$$

– W czworokącie *NAD'U* z sumy rzutów odcinków na bok NU otrzymujemy:

$$(AD') \cdot \sin \varphi_D - (\overline{AN}) \cdot \sin \varepsilon = \overline{NU}$$

Ale

$$AD' = l, \ \overline{AN} = s_s, \ \overline{NU} = \frac{e \cdot \cos \varepsilon}{\operatorname{tg} \Theta_N}$$

wobec czego

$$l \cdot \sin \varphi_D - s_s \cdot \sin \varepsilon = \frac{e \cdot \cos \varepsilon}{\operatorname{tg} \Theta_N}$$

czyli

$$l \cdot \sin \varphi_D = \frac{e \cdot \cos \varepsilon}{\operatorname{tg} \Theta_N} + s_s \cdot \sin \varepsilon \qquad (4)$$

Podnosząc do kwadratu równania (1) i (3), otrzymujemy

$$l^2 \cdot \cos^2 \varphi_c = s_k^2 + e^2 \cdot \cos^2 \varepsilon + s_s^2 \cdot \cos^2 \varepsilon + \\ + 2 s_k \cdot e \cdot \cos \varepsilon - 2 s_k \cdot s_s \cdot \cos \varepsilon - 2 s_s \cdot e \cdot \cos^2 \varepsilon \qquad (1A)$$

$$l^2 \cdot \sin^2 \varphi_c = \frac{e^2 \cdot \cos^2 \varepsilon}{\operatorname{tg}^2 \Theta_N} - 2 \cdot \frac{s_s \cdot e \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon}{\operatorname{tg} \Theta_N} + s_s^2 \cdot \sin^2 \varepsilon \qquad (3A)$$

Dodając równania (1A) i (3A) do siebie, otrzymujemy

$$l^2 = s_k^2 + e^2 \cdot \cos^2 \varepsilon + s_s^2 \cdot \cos^2 \varepsilon + 2 s_k \cdot e \cdot \cos \varepsilon + \\ - 2 s_k \cdot s_s \cdot \cos \varepsilon - 2 s_s \cdot e \cdot \cos^2 \varepsilon + \frac{e^2 \cdot \cos^2 \varepsilon}{\operatorname{tg}^2 \Theta_N} + \\ - \frac{2 s_s \cdot e \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon}{\operatorname{tg} \Theta_N} + s_s^2 \cdot \sin^2 \varepsilon$$

czyli

$$l^2 = s_k^2 + s_s^2 + e^2 \cdot \cos^2 \varepsilon + 2 s_k \cdot e \cdot \cos \varepsilon + \\ - 2 s_k \cdot s_s \cdot \cos \varepsilon - 2 s_s \cdot e \cdot \cos^2 \varepsilon + \\ + \frac{e^2 \cdot \cos^2 \varepsilon}{\operatorname{tg}^2 \Theta_N} - \frac{2 s_s \cdot e \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon}{\operatorname{tg} \Theta_N} \qquad (5)$$

Podnosząc do kwadratu równania (2) i (4), otrzymamy

$$l^2 \cdot \cos^2 \varphi_D = s_k^2 + e^2 \cdot \cos^2 \varepsilon + s_s^2 \cdot \cos^2 \varepsilon + \\ - 2 s_k \cdot e \cdot \cos \varepsilon - 2 s_k \cdot s_s \cdot \cos \varepsilon + 2 s_s \cdot e \cdot \cos^2 \varepsilon \qquad (2A)$$

$$l^2 \cdot \sin^2 \varphi_D = \frac{e^2 \cdot \cos^2 \varepsilon}{\operatorname{tg}^2 \Theta_N} + \frac{2 s_s \cdot e \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon}{\operatorname{tg} \Theta_N} + s_s^2 \cdot \sin^2 \varepsilon \qquad (4A)$$

Dodając stronami równania (2A) i (4A) do siebie, otrzymamy

$$l^2 = s_k^2 + s_s^2 + e^2 \cdot \cos^2 \varepsilon - 2 s_k \cdot e \cdot \cos \varepsilon + \\ - 2 s_k \cdot s_s \cdot \cos \varepsilon + 2 s_s \cdot e \cdot \cos^2 \varepsilon + \frac{e^2 \cdot \cos^2 \varepsilon}{\operatorname{tg}^2 \Theta_N} + \\ + \frac{2 s_s \cdot e \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon}{\operatorname{tg} \Theta_N} \qquad (6)$$

Dodając stronami równania (5) i (6), otrzymamy

$$2l^2 = 2 s_k^2 + 2 s_s^2 + 2 e^2 \cdot \cos^2 \varepsilon - 4 s_k \cdot s_s \cdot \cos \varepsilon + \\ + \frac{2 e^2 \cdot \cos^2 \varepsilon}{\operatorname{tg}^2 \Theta_N}$$

czyli

$$l^2 = s_k^2 + s_s^2 + e^2 \cdot \cos^2 \varepsilon - 2 s_k \cdot s_s \cdot \cos \varepsilon + \frac{e^2 \cdot \cos^2 \varepsilon}{\operatorname{tg}^2 \Theta_N} \qquad (7)$$

Odejmując stronami równanie (6) od równania (5), otrzymujemy

$$0 = 4 s_k \cdot e \cdot \cos \varepsilon - 4 s_s \cdot e \cdot \cos^2 \varepsilon - \frac{4 s_s \cdot e \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon}{\operatorname{tg} \Theta_N}$$

czyli

$$s_k - s_s - \frac{s_s \cdot \sin \varepsilon}{\operatorname{tg} \Theta_N} = 0$$

skąd otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \Theta_N = \frac{s_s \cdot \sin \varepsilon}{s_k - s_s} \qquad (8)$$

Podstawiając to do (7), otrzymujemy następującą zależność:

$$l^2 = s_k^2 + s_s^2 + e^2 \cdot \cos^2 \varepsilon - 2 s_k \cdot s_s \cdot \cos \varepsilon + \\ + \frac{e^2 \cdot (s_k - s_s \cdot \cos \varepsilon)^2 \cdot \cos^2 \varepsilon}{s_s^2 \cdot \sin^2 \varepsilon}$$

Po przekształceniu jej względem e będzie:

$$e = s_s \cdot tg\,\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{l^2}{s_k^2 - 2s_k \cdot s_s \cdot \cos\varepsilon + s_s^2 \cdot (1 + \sin^2\varepsilon)} - 1} \tag{9}$$

Będzie nam jeszcze potrzebna znajomość kąta $(\Theta_N + \varepsilon)$. Wyznaczmy ten kąt ze znanej zależności trygonometrycznej

$$\operatorname{tg}(\Theta_N + \varepsilon) = \frac{\operatorname{tg}\Theta_N + \operatorname{tg}\varepsilon}{1 - \operatorname{tg}\Theta_N \cdot \operatorname{tg}\varepsilon}$$

Podstawiając tu (8) otrzymamy

$$tg(\Theta_N + \varepsilon) = \frac{\dfrac{s_s \cdot \sin\varepsilon}{s_k - s_s \cdot \cos\varepsilon} + \dfrac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}}{1 - \dfrac{s_s \cdot \sin\varepsilon}{s_k - s_s \cdot \cos\varepsilon} \cdot \dfrac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}}$$

Po odpowiednich przekształceniach zależność tę można zapisać w następujacej postaci:

$$tg(\Theta_N + \varepsilon) = \frac{s_k \cdot \sin\varepsilon}{s_k \cdot \cos\varepsilon - s_s} \tag{10}$$

Kąt ε będzie mały. Zatem można przyjąć

$$\sin\varepsilon \approx \operatorname{tg}\varepsilon \approx \varepsilon$$

$$\cos\varepsilon \approx 1$$

Wobec tego wzór (8) przyjmie postać

$$\operatorname{tg}\Theta_N \approx \frac{s_s}{s_k - s_s} \cdot \varepsilon \tag{11}$$

Wzór (9) przyjmie postać

$$e = s_s \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{l^2}{s_k^2 - 2s_k \cdot s_s + s_s^2} - 1}$$

czyli

$$e = s_s \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\left(\frac{l}{s_k - s_s}\right)^2 - 1}$$

Ale

$$\frac{s_k - s_s}{l} = \sin\delta_o$$

Zatem

$$e = s_s \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta_o} - 1}$$

i w końcu

$$e = \frac{s_s}{\operatorname{tg}\delta_o} \cdot \varepsilon \tag{12}$$

Wzór (10) przyjmie postać

$$\operatorname{tg}(\Theta_N + \varepsilon) = \frac{s_k}{s_k - s_s} \cdot \varepsilon \tag{13}$$

3.1.2. Biegun kołysania mechanizmu

Długość odcinka NV z rysunku 5

$$l_{NV} = \frac{e}{\sin\varepsilon} \tag{14}$$

Dla małych kątów ε mamy $\sin\varepsilon \approx \varepsilon$. Zatem

$$l_{NV} = \frac{e}{\varepsilon}$$

Podstawiając tu (12), otrzymamy

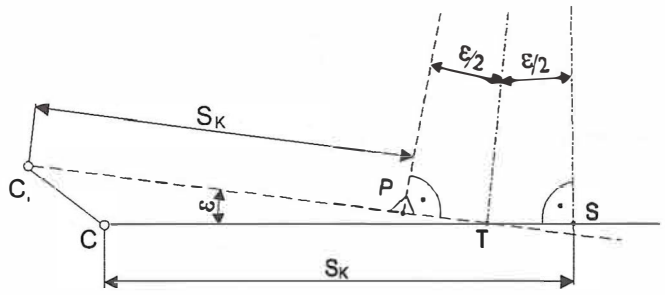
$$l_{NV} = \frac{\dfrac{s_s}{\operatorname{tg}\delta_o} \cdot \varepsilon}{\varepsilon}$$

czyli

$$l_{NV} = \frac{s_s}{\operatorname{tg}\delta_o} \tag{15}$$

Zatem dla małych kątów ε długość odcinka NV jest wielkością stałą, niezależną od kąta ε. Wobec tego punkt V jest biegunem kołysania mechanizmu czteroprzegubowego.

3.1.3. Kąt obrotu lewego wieszaka



Rys.6. Kąt obrotu lewego wieszaka

Długość odcinka PT wynosi

$$\overline{PT} = \overline{(VP)} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} \approx \overline{(VP)} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

Długość odcinka $C'T$ wynosi

$$\overline{C'T} = s_k + \overline{PT} = s_k + \overline{(VP)} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

Długość odcinka TS wynosi

$$\overline{TS} = \overline{PT} = \overline{(VP)} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} \approx \overline{(VP)} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

Długość odcinka CT wynosi

$$\overline{CT} = s_k - \overline{TS} = s_k - \overline{(VP)} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

W trójkącie $C'TC$ mamy zależność

$$\overline{C'C} = \sqrt{\left(\overline{CT}\right)^2 + (C'T)^2 - 2 \cdot \left(\overline{CT}\right) \cdot \varepsilon\left(\overline{C'T}\right) \cdot \cos\varepsilon}$$

Ale kąt ε jest mały, a więc można przyjąć

$$\cos\varepsilon \approx 1$$

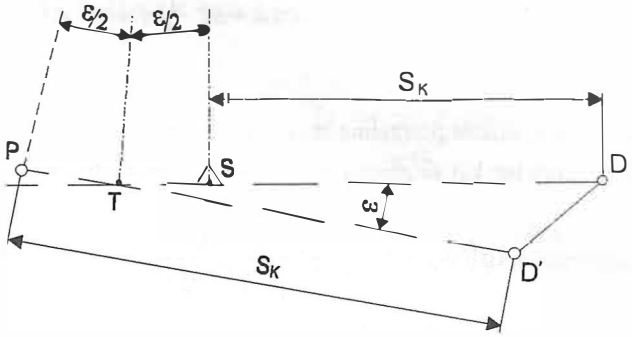
a wtedy

$$\overline{C'C} = \overline{C'T} - \overline{CT} = s_k + \overline{(VP)} \cdot \frac{\varepsilon}{2} - s_k + \overline{(VP)} \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \overline{(VP)} \cdot \varepsilon \approx d$$

Zatem kąt Θ_L wyniesie

$$\sin\frac{\Theta_L}{2} \approx \frac{d}{2l} \qquad (16)$$

3.1.4. Kąt obrotu prawego wieszaka



Rys. 7. Kąt obrotu prawego wieszaka

Długość odcinka DT wynosi

$$\overline{DT} = s_k + \overline{TS} = s_k + \overline{(VP)} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

Długość odcinka TD' wynosi

$$\overline{TD'} = s_k - \overline{PT} = s_k - \overline{(VP)} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

W trójkącie DTD' mamy zależność

$$\overline{DD'} = \sqrt{\left(\overline{TD}\right)^2 + \left(\overline{TD'}\right)^2 - 2 \cdot (TD) \cdot (TD') \cdot \cos\varepsilon}$$

Ale kąt ε jest mały, a zatem $\cos\varepsilon \approx 1$, a wobec tego

$$\overline{DD'} = \overline{TD} - \overline{TD'} = s_k + \overline{(VP)} \cdot \frac{\varepsilon}{2} - s_k + \overline{(VP)} \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \overline{(VP)} \cdot \varepsilon \approx d$$

Zatem kąt Θ_P wynosi

$$\sin\frac{\Theta_P}{2} \approx \frac{d}{2l} \qquad (17)$$

Porównując wzory (16) i (17) widzimy, że

$$\Theta_L \approx \Theta_P \qquad (18)$$

4. Zestaw kołowy przesunięty w poprzek toru

Biegunem kołysania zestawu kołowego jest ten sam punkt V, co biegun kołysania mechanizmu czteroprzegubowego rozpatrywanego w poprzednim rozdziale.

Wyznaczmy długość zastępczego wahadła matematycznego.

Z rysunku 5 wynika, że odległość bieguna kołysania zestawu kołowego od jego osi symetrii wynosi:

$$l_{OV} = l_{NV} - l_{ON}$$

Podstawiając tu (15) i przyjmując z rys.5

$$l_{ON} = R_s \cdot \cos\delta_o + \frac{D}{2}$$

otrzymamy

$$l_{OV} = \frac{s_s}{\operatorname{tg}\delta_o} - R_s \cdot \cos\delta_o - \frac{D}{2}$$

czyli

$$l_{OV} = \frac{s_s - R_s \cdot \sin\delta_o}{\operatorname{tg}\delta_o} - R$$

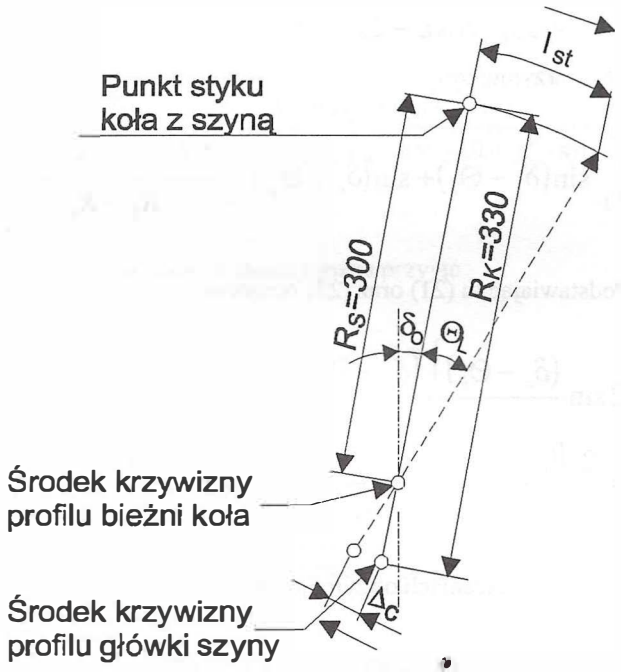
Jest to odległość środka ciężkości zestawu kołowego od jego bieguna kołysania. Dla małych kątów ε odległość ta jest niezależna od kąta ε, czyli jest wielkością stałą. Jest ona wielokrotnie większa niż każdy wymiar zestawu kołowego, a zatem można uznać, że zestaw kołowy jest wahadłem matematycznym, które jednak porusza się w ośrodku materialnym wywierającym silne tarcie na wahający się punkt materialny.

Długość tego zastępczego wahadła matematycznego określa zależność:

$$l_{wah} = (s_s - R_s \cdot \sin\delta_o) \cdot \operatorname{ctg}\delta_o - R \qquad (19)$$

4.1. Przemieszczenie punktu styku koła z szyną w poprzek toru

Rozpatrzmy lewy wieszak mechanizmu czteroprzegubowego



Rys. 8. Lewy wieszak i jego przemieszczenie

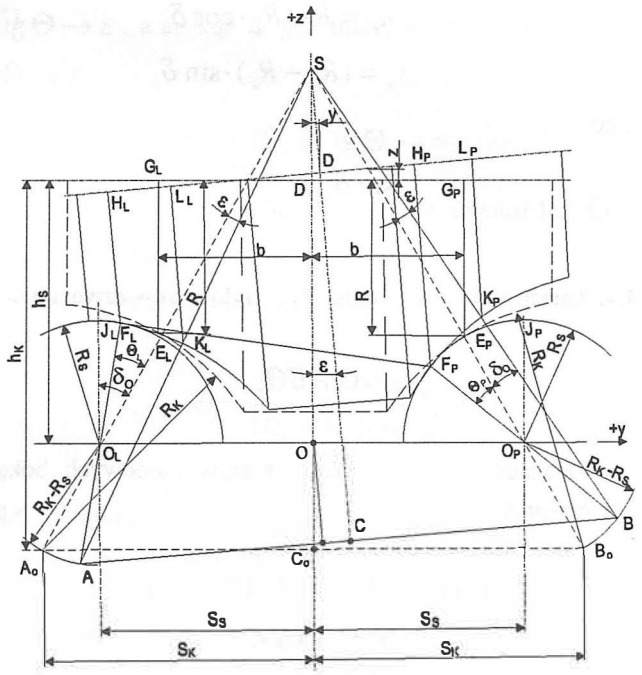
Droga liniowa środka krzywizny profilu główki szyny, mierzona po łuku okręgu o promieniu $(R_k - R_s) = 330 - 300 = 30mm$ wynosi Δc.

Droga liniowa punktu styku koła z szyną, mierzona po łuku okręgu o promieniu $R_s = 300mm$ wynosi

$$l_{st} = \frac{R_s}{R_k - R_s} \cdot \Delta c = \frac{300}{330 - 300} \cdot \Delta c = 10 \cdot \Delta c \qquad (20)$$

Zatem mechanizm czteroprzegubowy działa jak przekładnia drogi o przełożeniu $i = 10:1$, tzn. przesunięcie punktu styku koła z szyną w poprzek toru jest dziesięciokrotnie większe od przemieszczenia geometrycznego środka odległości pomiędzy środkami krzywizny wklęsłości bieżni obu kół, przy czym przemieszczenie punktów styku obu kół z szynami odbywa się w kierunku przeciwnym niż kierunek przemieszczania zestawu kołowego.

4.2. Konsekwencje przesunięcia zestawu kołowego w torze



Rys. 9. Zestaw kołowy przesunięty w poprzek toru

W dowolnym położeniu zestawu kołowego w torze w punkcie styku F_L kierunek promienia krzywizny główki szyny O_1F_1 wyrażającego się długością R_s musi pokrywać się z kierunkiem promienia krzywizny bieżni zestawu kołowego AF_1 wyrażającego się długością R_k. Zatem odcinek O_1A ma długość $R_k - R_s$. W położeniu środkowym ze-

stawu kołowego w torze punktem styku był punkt E_l i wtedy w tym punkcie kierunek promienia R_s musiał pokrywać się z kierunkiem promienia R_k. Wtedy odcinek O_lA_o miał długość $R_k - R_s$. Zatem punkt A przewędrował z położenia A_o po łuku A_oA zakreślonym z punktu O_l promieniem równym $(R_k - R_s)$.

Podobnie po prawej stronie rys.9 punkt B przewędrował z położenia B_o po łuku B_oB zakreślonym z punktu O_p promieniem o długości $R_k - R_s$.

4.3. Zależności w położeniu środkowym zestawu kołowego w torze

$$s_s = b + R_s \cdot \sin\delta_o \tag{21}$$

$$h_s = R + R_s \cdot \cos\delta_o \tag{22}$$

$$s_k = b + R_k \cdot \sin\delta_o \tag{23}$$

$$h_k = R + R_k \cdot \cos\delta_o \tag{24}$$

$$s_k - s_s = (R_k - R_s)\cdot \sin\delta_o$$

Stąd

$$\sin\delta_o = \frac{s_k - s_s}{R_k - R_s} \tag{25}$$

4.4. Zależności w położeniu przechylonym w czworoboku

$$O_lABO_p$$

- Zależność pierwsza (suma rzutów pionowych boków czworokąta):

$$0, A\cdot\cos < J_l 0_l F_l + AB\cdot\sin <$$
$$< CSC_o + BO_p \cdot\cos < J_p O_p F_p = 0$$

Ponieważ $O, A = BO_p = R_k - R_s$,

oraz $AB = A_oB_o = 2s_k$, to otrzymamy

$$-(R_k - R_s)\cdot\left[\cos(\delta_o - \Theta_l) - \cos(\delta_o + \Theta_p)\right] + 2s_k \cdot \sin\varepsilon = 0$$

Podstawiając tu (23), otrzymamy

$$-(R_k - R_s)\cdot\left[-2\sin\frac{(\delta_o - \Theta_l)+(\delta_o + \Theta_p)}{2}\cdot\sin\frac{(\delta_o - \Theta_l)-(\delta_o + \Theta_p)}{2}\right] +$$
$$+ 2\cdot(b + R_k\cdot\sin\delta_o)\cdot\sin\varepsilon = 0$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$-2(R_k - R_s)\cdot\sin\left(\delta_o + \frac{\Theta_p - \Theta_l}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Theta_p + \Theta_l}{2} +$$
$$+ 2(b + R_k\cdot\sin\delta_o)\cdot\sin\varepsilon = 0$$

Stąd mamy

$$\sin\left(\delta_o + \frac{\Theta_p - \Theta_l}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Theta_p + \Theta_l}{2} = \frac{(b + R_k\cdot\sin\delta_o)\cdot\sin\varepsilon}{R_k - R_s} \tag{26}$$

- Zależność druga (suma rzutów poziomych boków czworokąta):

$$-O_lO_p - O_l\cdot A\cdot\sin < J_tO_lF_t + AB\cdot\cos <$$
$$< CSC_o - O_pB\cdot\sin < J_pO_pF_p = 0$$

Ponieważ $O_lO_p = 2s_s$, a $AB = A_oB_o = 2s_k$,

oraz $O_lA = R_k - R_s$, to mamy

$$-(R_k - R_s)\cdot\left[\sin(\delta_o - \Theta_l) + \sin(\delta_o + \Theta_p)\right] +$$
$$+ 2s_k\cdot\cos\varepsilon - 2s_s = 0$$

Stąd otrzymujemy

$$\sin(\delta_o - \Theta_l) + \sin(\delta_o + \Theta_p) = \frac{2\cdot(s_k\cdot\cos\varepsilon - s_s)}{R_k - R_s}$$

Podstawiając tu (21) oraz (23) otrzymamy

$$2\sin\frac{(\delta_o - \Theta_l)+(\delta_o + \Theta_p)}{2}\cdot\cos\frac{(\delta_o - \Theta_l)-(\delta_0 + \Theta_p)}{2} =$$
$$= \frac{2\cdot[(b + R_k\cdot\sin\delta_o)\cdot\cos\varepsilon - (b + R_s\cdot\sin\delta_o)]}{R_k - R_s}$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$\sin\left(\delta_o + \frac{\Theta_p - \Theta_l}{2}\right)\cdot\cos\frac{\Theta_p + \Theta_l}{2} = \frac{(b + R_k\cdot\sin\delta_o)\cdot\cos\varepsilon - (b + R_s\cdot\sin\delta_o)}{R_k - R_s} \tag{27}$$

4.5. Kąty obrotu bieżni kół wokół główek szyn

W równaniach (26) i (27) niewiadomymi są kąty obrotu bieżni kół wokół główek szyn wyrażone symbolami Θ_l i Θ_p.

Z równania (27) mamy

$$\sin\left(\delta_o + \frac{\Theta_p - \Theta_l}{2}\right) = \frac{(b + R_k \cdot \sin\delta_o)\cdot\cos\varepsilon - (b + R_s \cdot \sin\delta_o)}{(R_k - R_s)\cdot\cos\frac{\Theta_p + \Theta_l}{2}}$$

Podstawiając to do (26), otrzymamy

$$\frac{(b + R_k \cdot \sin\delta_o)\cdot\cos\varepsilon - (b + R_s \cdot \sin\delta_o)}{(R_k - R_s)\cdot\cos\frac{\Theta_p + \Theta_l}{2}} \cdot \sin\frac{\Theta_p + \Theta_l}{2} =$$

$$= \frac{(b + R_k \cdot \sin\delta_o)\cdot\sin\varepsilon}{R_k - R_s}$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$\left[(b + R_k \cdot \sin\delta_o)\cdot\cos\varepsilon - (b + R_s \cdot \sin\delta_o)\right]\cdot \operatorname{tg}\frac{\Theta_p + \Theta_l}{2} =$$

$$= (b + R_k \cdot \sin\delta_o)\cdot\sin\varepsilon$$

Stąd mamy

$$\operatorname{tg}\frac{\Theta_p + \Theta_l}{2} = \frac{(b + R_k \cdot \sin\delta_o)\cdot\sin\varepsilon}{(b + R_k \cdot \sin\delta_o)\cdot\cos\varepsilon - (b + R_s \cdot \sin\delta_o)} \tag{28}$$

Ale kąt ε jest mały, a zatem można przyjąć

$$\sin\varepsilon \approx \varepsilon, \text{ a } \cos\varepsilon \approx 1.$$

Wobec tego wzór (28) przyjmie postać

$$\operatorname{tg}\frac{\Theta_p + \Theta_l}{2} = \frac{b + R_k \cdot \sin\delta_o}{b + R_k \cdot \sin\delta_o - b - R_s \cdot \sin\delta_o}\cdot\varepsilon$$

czyli

$$\operatorname{tg}\frac{\Theta_p + \Theta_l}{2} = \frac{b + R_k \cdot \sin\delta_o}{(R_k - R_s)\cdot\sin\delta_o}\cdot\varepsilon \tag{29}$$

Podstawiając tu (18), otrzymamy

$$\operatorname{tg}\Theta_L = \operatorname{tg}\Theta_P = \frac{b + R_k \cdot \sin\delta_o}{(R_k - R_s)\cdot\sin\delta_o}\cdot\varepsilon$$

Oznaczając ogólnie $\Theta_L = \Theta_P = \Theta$, otrzymamy

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{b + R_k \cdot \sin\delta_o}{(R_k - R_s)\cdot\sin\delta_o}\cdot\varepsilon \tag{30}$$

Równanie (30) można przekształcić jak niżej

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\frac{b}{R_k} + \sin\delta_o}{\left(1 - \frac{R_s}{R_k}\right)\cdot\sin\delta_o}\cdot\varepsilon \tag{31}$$

Zbadajmy zależność Θ od promienia R_k.

Gdy $R_k \to \infty$ (bieżnia koła jest stożkowa), to $\operatorname{tg}\Theta \to \varepsilon$, a że kąt ε jest mały, to $\operatorname{tg}\Theta \to \operatorname{tg}\varepsilon$, czyli $\Theta \to \varepsilon$.

Z kolei gdy $R_k \to R_s$, to $\operatorname{tg}\Theta \to \infty$, czyli $\Theta \to \frac{\Pi}{2}$.

W praktyce kąt ε jest tak mały, że również kąt Θ będzie mały, czyli $\operatorname{tg}\Theta \approx \Theta$.

Wtedy wzór (30) przyjmie postać

$$\Theta = \frac{b + R_k \cdot \sin\delta_o}{(R_k - R_s)\cdot\sin\delta_o}\cdot\varepsilon \tag{32}$$

4.6. Współrzędne środka odległości pomiędzy środkami krzywizn obu stron zestawu kołowego w położeniu przechylonym

Przyjmijmy początek układu współrzędnych w punkcie O (rys.9).

Współrzędne punktu O_l

$$y_{ol} = -(b + R_s \cdot \sin\delta_o) \tag{33}$$

$$z_{ol} = 0 \tag{34}$$

Współrzędne punktu O_p

$$y_{op} = b + R_s \cdot \sin\delta_o \tag{35}$$

$$z_{op} = 0 \tag{36}$$

Współrzędne punktu A_o

$$y_{Ao} = -(b + R_k \cdot \sin\delta_o) \tag{37}$$

$$z_{Ao} = -(R_k - R_s)\cdot\cos\delta_o \tag{38}$$

Współrzędne punktu A

$$y_A = y_{ol} - (R_k - R_s)\cdot\sin(\delta_o - \Theta)$$

Podstawiając tu (33) otrzymamy

$$y_A = -(b + R_s \cdot \sin\delta_o) - (R_k - R_s)\cdot\sin(\delta_o - \Theta) \tag{39}$$

$$z_A = -(R_k - R_s)\cdot\cos(\delta_o - \Theta) \tag{40}$$

Współrzędne punktu B_o

$$y_{Bo} = b + R_k \cdot \sin\delta_o \tag{41}$$

$$z_{Bo} = -(R_k - R_s)\cdot\cos\delta_o \tag{42}$$

Współrzędne punktu B

$$y_B = y_{op} + (R_k - R_s)\cdot\sin(\delta_o + \Theta)$$

Podstawiając tu (35), otrzymujemy

$$y_B = (b + R_s \cdot \sin\delta_o) + (R_k - R_s)\cdot\sin(\delta_o + \Theta) \tag{43}$$

$$z_B = -(R_k - R_s)\cdot\cos(\delta_o + \Theta) \tag{44}$$

Współrzędne punktu C_o

$$y_{Co} = 0 \tag{45}$$

$$z_{Co} = (R_k - R_s)\cdot\cos\delta_o \tag{46}$$

Współrzędne punktu C

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Podstawiając tu (39) i (43), otrzymamy

$$y_c = 0.5\ \{-(b + R_s \cdot \sin\delta_o) - (R_k - R_s)\cdot\sin(\delta_o - \Theta) + \\ + (b + R_s \cdot \sin\delta_o) + (R_k - R_s)\cdot\sin(\delta_o + \Theta)\ \}$$

czyli

$$y_C = (R_k - R_s)\cdot\sin\Theta\cdot\cos\delta_o \tag{47}$$

Ale kąt Θ jest mały, a zatem $\sin\Theta \approx \Theta$
Podstawiając (32) do (47) otrzymamy

$$y_C = (R_k - R_s)\cdot\frac{b + R_k \cdot \sin\delta_o}{(R_k - R_s)\cdot\sin\delta_o}\cdot\varepsilon\cdot\cos\delta_o$$

co po przekształceniach daje

$$y_C = (b + R_k \cdot \sin\delta_o)\cdot\varepsilon\cdot\operatorname{ctg}\delta_o \tag{48}$$

Z kolei

$$z_C = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Podstawiając tu (40) oraz (44), otrzymamy

$$z_C = \frac{-(R_k - R_s)\cdot\cos(\delta_o - \Theta) - (R_k - R_s)\cdot\cos(\delta_o + \Theta)}{2}$$

czyli

$$z_C = -(R_k - R_s)\cdot\cos\delta_o\cdot\cos\Theta \tag{49}$$

Z wzoru (32) wynika, że dla małych kątów ε również kąt Θ jest mały, a zatem $\cos\Theta \approx 1$.
Wobec tego można przyjąć, że wzór (49) przyjmie postać

$$z_C = -(R_k - R_s)\cdot\cos\delta_o \tag{50}$$

4.7. Równanie symetralnej do osi zestawu kołowego w chwili gdy jest on nachylony do poziomu pod pewnym kątem ε

Jest to prosta przechodząca przez punkt C o współrzędnych określonych równaniami (48) i (50). Równanie tej prostej będzie miało postać:

$$z = m \cdot y + n$$

gdzie $m = \operatorname{tg}(90^o + \varepsilon) = -\operatorname{ctg}\varepsilon$.

Zatem

$$z = (-\operatorname{ctg}\varepsilon) \cdot y + n \tag{51}$$

Punkt C leży na tej prostej, a więc jego współrzędne muszą spełniać jej równanie

$$z_c = (-\operatorname{ctg}\varepsilon) \cdot y_c + n$$

Stąd

$$n = y_c \cdot \operatorname{ctg}\varepsilon e + z_c$$

Podstawiając tu (48) i (50), otrzymamy

$$n = (b + R_k \cdot \sin\delta_o) \cdot \varepsilon \cdot \operatorname{ctg}\delta_o \cdot \operatorname{ctg}\varepsilon - (R_k - R_s) \cdot \cos\delta_o$$

co po przekształceniach daje

$$n = (b + R_k \cdot \sin\delta_o) \cdot \varepsilon \cdot \frac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon} \cdot \operatorname{ctg}\delta_o - (R_k - R_s) \cdot \cos\delta_o$$

Ponieważ kąt ε jest mały, to $\sin\varepsilon \approx \varepsilon$, a $\cos\varepsilon \approx 1$. Wobec tego mamy

$$n = (b + R_k \cdot \sin\delta_o) \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \operatorname{ctg}\delta_o - (R_k - R_s) \cdot \cos\delta_o$$

Po odpowiednich przekształceniach otrzymamy:

$$n = (b + R_s \cdot \sin\delta_o) \cdot \operatorname{ctg}\delta_o$$

Zatem równanie (51) przyjmie postać

$$z = -(\operatorname{ctg}\varepsilon) \cdot y + (b + R_s \cdot \sin\delta_o) \cdot \operatorname{ctg}\delta_o \tag{52}$$

4.8. Współrzędne punktu przecięcia symetralnej przechylonego zestawu kołowego z osią pionową układu współrzędnych

$$y_s = 0 \tag{53}$$

$$z_s = (b + R_s \cdot \sin\delta_o) \cdot \operatorname{ctg}\delta_o \tag{54}$$

Dla szyn nożowych $(R_s = 0)$ wzór (53) staje się wzorem

$$z_s = b \cdot \operatorname{ctg}\delta_o \tag{55}$$

Z wzoru (54) wynika, że dla małych kątów ε wartość z_s nie zależy od kąta ε, a zatem punkt S jest biegunem kołysania zestawu kołowego. Z równania (54) również wynika, że biegun kołysania S jest zarazem punktem przecięcia prostej $A_o E_l$ z pionową osią symetrii układu przedstawionego na rys.9.

4.9. Wysokość bieguna kołysania nad osią nieprzechylonego zestawu kołowego

Współrzędne punktu D_o

$$y_{D_o} = 0 \tag{56}$$

$$z_{D_o} = h_o$$

$$z_{D_o} = R + R_s \cdot \cos\delta_o \tag{57}$$

Szukana wysokość bieguna kołysania

$$h_o = z_s - z_{D_o}$$

Podstawiając tu (54) oraz (57), otrzymamy

$$h_o = (b + R_s \cdot \sin\delta_o) \cdot \operatorname{ctg}\delta_o - (R + R_s \cdot \cos\delta_o)$$

czyli

$$h_o = b \cdot \operatorname{ctg}\delta_o - R$$

co można przedstawić w postaci

$$h_o = \frac{b}{\operatorname{tg}\delta_o} - R$$

i wreszcie

$$h_o = b \cdot \operatorname{ctg}\delta_o - R \qquad (58)$$

Jest to wzór równoważny wzorowi (19) wyznaczonemu już uprzednio, gdyż z wzoru (21) wynika, że $b = s_s - R_s \cdot \sin\delta_o$.

Postać (58) jest jednak bardziej uniwersalna niż postać (19), gdyż z wzoru (58) wynika, że wysokość położenia bieguna kołysania zestawu kołowego nie zależy wcale od krzywizny profilu bieżni kół i krzywizny profilu główki szyn, a zależy tylko od kąta nachylenia wspólnej stycznej do profilu bieżni kół i profilu główki szyny oraz od odległości punktu styku koła z szyną od płaszczyzny symetrii toru.

4.10. Współrzędne środka ciężkości przechylonego zestawu kołowego

Współrzędne środka ciężkości przechylonego zestawu kołowego (rys.9):

$$y_D = y_c - \overline{CD} \cdot \sin\varepsilon = y_c - \overline{C_oD_o} \cdot \sin\varepsilon = y_c - h_k \cdot \sin\varepsilon$$

Podstawiając tu (48) oraz (24), otrzymamy

$$y_D = (b + R_k \cdot \sin\delta_o) \cdot \varepsilon \cdot \operatorname{ctg}\delta_o - (R + R_k \cdot \cos\delta_o) \cdot \sin\varepsilon$$

Ale kąt ε jest mały, a zatem $\sin\varepsilon \approx \varepsilon$
Wobec tego

$$y_D = (b + R_k \cdot \sin\delta_o) \cdot \varepsilon \cdot \operatorname{ctg}\delta_o - (R + R_k \cdot \cos\delta_o) \cdot \varepsilon$$

co po przekształceniach daje

$$y_D = (b \cdot \operatorname{ctg}\delta_o + R_k \cdot \cos\delta_o - R - R_k \cdot \cos\delta_o) \cdot \varepsilon$$

czyli

$$y_D = (b \cdot \operatorname{ctg}\delta_o - R) \cdot \varepsilon$$

i w końcu

$$y_D = \frac{b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o}{\operatorname{tg}\delta_o} \cdot \varepsilon \qquad (59)$$

$$z_D = z_c + \overline{CD} \cdot \cos\varepsilon = z_c + \overline{C_oD_o} \cdot \cos\varepsilon = z_c + h_k \cdot \cos\varepsilon$$

Ale kąt ε jest mały, a zatem $\cos\varepsilon \approx 1$. Wobec tego

$$z_D = z_c + h_k$$

Podstawiając tu (50) i (24), otrzymamy

$$z_D = -(R_k - R_s) \cdot \cos\delta_o + (R + R_k \cdot \cos\delta_o)$$

czyli

$$z_D = R + R_s \cdot \cos\delta_o \qquad (60)$$

4.11. Długość wahadła matematycznego zastępującego zestaw kołowy

$$l_{wah} = \sqrt{(y_s - y_D)^2 + (z_s - z_D)^2}$$

Podstawiając tu (53), (59), (54) i (60) otrzymamy

$$l_{wah} = \sqrt{\left(0 - \frac{b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o}{\operatorname{tg}\delta_o} \cdot \varepsilon\right)^2 + \left[(b + R_s \cdot \sin\delta_o) \cdot \operatorname{ctg}\delta_o - R + R_s \cdot \cos\delta_o\right]^2}$$

Po przekształceniach otrzymamy

$$l_{wah} = \frac{b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o}{\operatorname{tg}\delta_o} \cdot \sqrt{1 + \varepsilon^2}$$

Ale kąt ε jest mały, a zatem ε^2 jest małą wyższego rzędu i w zestawieniu z 1 można ją pominąć. Zatem można przyjąć

$$l_{wah} = \frac{b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o}{\operatorname{tg}\delta_o} \qquad (61)$$

czyli

$$l_{wah} = b \cdot \operatorname{ctg}\delta_o - R \qquad (62)$$

Jest to wzór równoważny z wzorem (19). A więc długość wahadła, jakim jest kołyszący się zestaw kołowy, w ogóle nie zależy od promieni zaokrąglenia bieżni koła i główki szyny. Zatem $l_{wah} = h_o$ (patrz wzór (58)).

Wobec tego wysokość bieguna kołysania zestawu kołowego nad osią tego zestawu w stanie nieprzechylonym jest długością wahadła zastępującego ten zestaw kołowy.

Współrzędne środka ciężkości nieprzechylonego zestawu kołowego przedstawionego na rys.9, wynoszą:

$$y_{D_o} = 0 \tag{63}$$

$$z_{D_o} = R_s \cdot \cos\delta_o + R \tag{64}$$

4.12. Przemieszczenia środka ciężkości zestawu kołowego od jego położenia środkowego podczas kołysania

Przemieszczenie w poprzek toru

$$\Delta y_D = l_{wah} \cdot \sin\varepsilon \tag{65}$$

Podstawiając do (65) wartość L_{wah} z (62) oraz przyjmując, że dla małych kątów ε mamy $\varepsilon \approx \sin\varepsilon$, otrzymamy

$$\Delta y_D = \left(b \cdot \operatorname{ctg}\delta_o - R\right) \cdot \varepsilon \tag{66}$$

Przemieszczenie w górę wyniesie:

$$\Delta z_D = l_{wah} \cdot \left(1 - \cos\varepsilon\right) \tag{67}$$

W tym przypadku nie możemy przyjmować uproszczenia $\cos\varepsilon \approx 1$, gdyż uzyskalibyśmy $\Delta z_D = 0$. Wiadomo, że Δz_D będzie liczbą bardzo małą, ale zawsze będzie większe od 0 dla kątów $\varepsilon \neq 0$.

Przekształćmy wzór (67)

$$\Delta z_D = 2l_{wah} \cdot \sin^2\frac{\varepsilon}{2}$$

a że ε jest kątem małym, to $\sin\frac{\varepsilon}{2} \approx \frac{\varepsilon}{2}$. Zatem

$$\Delta z_D = 2l_{wah} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$$

czyli

$$\Delta z_D = \frac{b \cdot \operatorname{ctg}\delta_o - R}{2} \cdot \varepsilon^2 \tag{68}$$

Przemieszczenia te można ująć we współrzędnych uogólnionych „y" oraz „z".

Wzór (66) wyrażony we współrzędnych uogólnionych przyjmie postać

$$y = \left(b \cdot \operatorname{ctg}\delta_o - R\right) \cdot \varepsilon = \frac{b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o}{\operatorname{tg}\delta_o} \cdot \varepsilon \tag{69}$$

Wzór (68) wyrażony we współrzędnych uogólnionych przyjmie postać

$$z = \frac{b \cdot \operatorname{ctg}\delta_o - R}{2} \cdot \varepsilon^2 = \frac{b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o}{2\operatorname{tg}\delta_o} \cdot \varepsilon^2 \tag{70}$$

Kąt „ε" przechylenia zestawu kołowego wyrażony w funkcji przemieszczenia poprzecznego „y", będzie funkcją odwrotną do funkcji (69)

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}\delta_o}{b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o} \cdot y \tag{71}$$

Jest to wzór identyczny z wzorem otrzymanym w przypadku współpracy stożkowych kół tramwajowych z szynami krawędziowymi.

Jest to zarazem wzór identyczny z wzorem opublikowanym przez F.B.Bladera [1].

Przemieszczenie „z" środka ciężkości zestawu kołowego w górę, można wyrazić w funkcji przemieszczenia poprzecznego „y"

Podstawiając (71) do (70), otrzymujemy

$$z = \frac{b \cdot \operatorname{ctg}\delta_o - R}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2\delta_o}{\left(b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o\right)^2} \cdot y^2$$

czyli

$$z = \frac{\operatorname{tg}\delta_o}{2 \cdot \left(b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o\right)} \cdot y^2 \tag{73}$$

Jest to wzór identyczny z wzorem otrzymanym dla współpracy koła o bieżniach stożkowych z szynami krawędziowymi. Zatem uniesienie zestawu kołowego w górę nie zależy w ogóle od krzywizny główki szyny ani bieżni koła.

4.13. Odległość punktu F_L od symetralnej SC

Równanie symetralnej SC. (52) można przedstawić następująco:

$$-\left(\operatorname{ctg}\varepsilon\right) \cdot y - z + \left(b + R_s \cdot \sin\delta_o\right) \cdot \operatorname{ctg}\delta_o \tag{74}$$

czyli w postaci typu

$$A \cdot y + B \cdot z + C = 0$$

gdzie

$$A = -\operatorname{ctg} \varepsilon \tag{75}$$

$$B = -1 \tag{76}$$

$$C = (b + R_s \cdot \sin \delta_o) \cdot \operatorname{ctg} \delta_o \tag{77}$$

współrzędne punktu E_l

$$y_{El} = -b \qquad z_{El} = R_s \cdot \cos \delta_o$$

Współrzędne punktu E_p

$$y_{Ep} = b \qquad z_{Ep} = R_s \cdot \cos \delta_o$$

Współrzędne punktu F_l

$$y_{Fl} = -b - R_s \cdot \sin \delta_o + R_s \cdot \sin(\delta_o - \Theta)$$

co można przekształcić do postaci

$$y_{Fl} = -b - R_s \cdot [\sin \delta_o - \sin(\delta_o - \Theta)] \tag{78}$$

$$z_{Fl} = R_s \cdot \cos(\delta_o - \Theta) \tag{79}$$

Współrzędne punktu F_p

$$y_{Fp} = b + R_s \cdot \sin \delta_o - R_s \cdot \sin(\delta_o + \Theta)$$

co można przekształcić do postaci

$$y_{Fp} = b - R_s \cdot [\sin(\delta_o + \Theta) - \sin \delta_o] \tag{80}$$

$$z_{Fp} = R_s \cdot \cos(\delta_o + \Theta) \tag{81}$$

Szukana odległość wyniesie

$$d_L = \frac{|A \cdot y_{Fl} + B \cdot z_{Fl} + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Podstawiając tu (75), (76) i (77), otrzymamy

$$d_L = \frac{|-(\operatorname{ctg} \varepsilon) \cdot y_{Fl} - 1 \cdot z_{Fl} + (b + R_s \cdot \sin \delta_o) \cdot \operatorname{ctg} \delta_o|}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \varepsilon + 1}}$$

czyli

$$d_L = |-y_{Fl} \cdot \cos \varepsilon - z_{Fl} \cdot \sin \varepsilon + (b + R_s \cdot \sin \delta_o) \cdot \operatorname{ctg} \delta_o \cdot \sin \varepsilon|$$

Podstawiając tu (78) i (79), otrzymamy

$$d_L = |\{b + R_s \cdot [\sin \delta_o - \sin(\delta_o - \Theta)]\} \cdot \cos \varepsilon - R_s \cdot \cos(\delta_o - \Theta) \cdot \sin \varepsilon + (b + R_s \cdot \sin \delta_o) \cdot \operatorname{ctg} \delta_o \cdot \sin \varepsilon|$$

Po odpowiednich przekształceniach

$$d_L = b \cdot \cos \varepsilon + R_s \cdot [\sin \delta_o - \sin(\delta_o - \Theta)] \cdot \cos \varepsilon - R_s \cdot \cos(\delta_o - \Theta) \cdot \sin \varepsilon + (b + R_s \cdot \sin \delta_o) \cdot \operatorname{ctg} \delta_o \cdot \sin \varepsilon \tag{82}$$

4.14. Odległość punktu F_p od symetralnej SC

$$d_p = \frac{|A \cdot y_{Fp} + B \cdot z_{Fp} + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Podstawiając tu (75), (76) i (77), otrzymamy

$$d_p = \frac{|-(\operatorname{ctg} \varepsilon) \cdot y_{Fp} - z_{Fp} + (b + R_s \cdot \sin \delta_o) \cdot \operatorname{ctg} \delta_o|}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \delta_o + 1}}$$

Po przekształceniu będzie:

$$d_p = |-y_{Fp} \cdot \cos \varepsilon - z_{Fp} \cdot \sin \varepsilon + (b + R_s \cdot \sin \delta_o) \cdot \operatorname{ctg} \delta_o \cdot \sin \varepsilon|$$

Podstawiając tu (80) i (81), otrzymamy

$$d_p = |\{-b + R_s \cdot [\sin(\delta_o + \Theta) - \sin \delta_o]\} \cdot \cos \varepsilon - R_s \cdot \cos(\delta_o + \Theta) \cdot \sin \varepsilon + (b + R_s \cdot \sin \delta_o) \cdot \operatorname{ctg} \delta_o \cdot \sin \varepsilon|$$

czyli

$$d_p = b \cdot \cos \varepsilon - R_s \cdot [\sin(\delta_o + \Theta) - \sin \delta_o] \cdot \cos \varepsilon + R_s \cdot \cos(\delta_o + \Theta) \cdot \sin \varepsilon - (b + R_s \cdot \sin \delta_o) \cdot \operatorname{ctg} \delta_o \cdot \sin \varepsilon \tag{83}$$

4.15. Odległość pomiędzy płaszczyznami kręgów toczenia się przechylonego zestawu kołowego

$$d = d_L + d_P$$

Podstawiając tu (82) i (83), otrzymamy

$$\begin{aligned} d &= b\cdot\cos\varepsilon + R_s\cdot[\sin\delta_o - \sin(\delta_o - \Theta)]\cdot\cos\varepsilon + \\ &- R_s\cdot\cos(\delta_o - \Theta)\cdot\sin\varepsilon + \\ &+ (b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\sin\varepsilon + \\ &+ b\cdot\cos\varepsilon - R_s\cdot[\sin(\delta_o + \Theta) - \sin\delta_o]\cdot\cos\varepsilon + \\ &+ R_s\cdot\cos(\delta_o + \Theta)\cdot\sin\varepsilon - \\ &- (b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\sin\varepsilon \end{aligned}$$

co można przekształcić jak niżej:

$$\begin{aligned} d &= 2b\cdot\cos\varepsilon + \\ &- R_s\cdot\cos\varepsilon\cdot[\sin(\delta_o + \Theta) - \sin\delta_o - \sin\delta_o + \sin(\delta - \Theta)] - \\ &- R_s\cdot\sin\varepsilon\cdot[\cos(\delta_o - \Theta) - \cos(\delta_o + \Theta)] \end{aligned}$$

i dalej

$$\begin{aligned} d &= 2b\cdot\cos\varepsilon - 2R_s\cdot\cos\varepsilon\cdot[\sin\delta_o\cdot\cos\Theta - \sin\delta\ ] + \\ &+ 2R_s\cdot\sin\varepsilon\cdot\sin\delta_o\cdot\sin\Theta \end{aligned} \tag{84}$$

Z równania (27), po podstawieniu do niego równości $\Theta_L = \Theta_P = \Theta$, otrzymujemy

$$\sin\delta_o\cdot\cos\Theta = \frac{(b + R_k\cdot\sin\delta_o)\cdot\cos\varepsilon - (b + R_s\cdot\sin\delta_o)}{R_k - R_s} \tag{85}$$

Z równania (32) wobec faktu, że $\sin\Theta \approx \Theta \approx \operatorname{tg}\Theta$ oraz $\varepsilon \approx \sin\varepsilon$, wynika

$$\sin\Theta \approx \Theta = \frac{b + R_k\cdot\sin\delta_o}{(R_k - R_s)\cdot\sin\delta_o}\cdot\sin\varepsilon \tag{86}$$

Podstawiając (85) i (86) do (84), otrzymamy

$$\begin{aligned} d &= 2b\cdot\cos\varepsilon + \\ &- 2R\cdot\cos\varepsilon\cdot\left[\frac{(b + R_k\cdot\sin\delta_o)\cdot\cos\varepsilon - (b + R_s\cdot\sin\delta_o)}{R_k - R_s} - \sin\delta_o\right] + \\ &+ 2R_s\cdot\sin\varepsilon\cdot\sin\delta_o\cdot\frac{b + R_k\cdot\sin\delta_o}{(R_k - R_s)\cdot\sin\delta_o}\cdot\sin\varepsilon \end{aligned}$$

Po odpowiednich przekształceniach zależność ta przyjmie następującą postać:

$$d = 2b\cdot\cos\varepsilon + \frac{2R_s\cdot(b + R_k\cdot\sin\delta_o)}{R_k - R_s}\cdot(\cos\varepsilon - 1)$$

$$d_L + d_P = d = 2b\cdot\cos\varepsilon - \frac{2R_s\cdot(b + R_k\cdot\sin\delta_o)}{R_k - R_s}\cdot(1 - \cos\varepsilon) \tag{87}$$

4.16. Różnica pomiędzy odległościami d_L i d_P

Różnicę pomiędzy d_L *i* d_P ujmuje zależność:

$$\begin{aligned} d_L - d_P &= b\cdot\cos\varepsilon + R_s\cdot[\sin\delta_o - \sin(\delta_o - \Theta)]\cdot\cos\varepsilon - \\ &- R_s\cdot\cos(\delta_o - \Theta)\cdot\sin\varepsilon + (b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\sin\varepsilon - \\ &- b\cdot\cos\varepsilon + R_s\cdot[\sin(\delta_o + \Theta) - \sin\delta_o]\cdot\cos\varepsilon + \\ &- R_s\cdot\cos(\delta_o + \Theta)\cdot\sin\varepsilon + \\ &+ (b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\sin\varepsilon \end{aligned}$$

Po jej przekształceniu będzie:

$$\begin{aligned} d_L - d_P &= 2R_s\cdot\cos\delta_o\cdot(\sin\Theta\cdot\cos\varepsilon - \cos\Theta\cdot\sin\varepsilon) + \\ &+ 2\cdot(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\sin\varepsilon \end{aligned} \tag{88}$$

Podstawiając (86) i (85) do drugiego nawiasu otrzymamy

$$\begin{aligned} \sin\Theta\cdot\cos\varepsilon - \cos\Theta\cdot\sin\varepsilon &= \frac{b + R_k\cdot\sin\delta_o}{(R_k - R_s)\cdot\sin\delta_o}\cdot\sin\varepsilon\cdot\cos\varepsilon - \\ &- \frac{(b + R_k\cdot\sin\delta_o)\cdot\cos\varepsilon - (b + R_s\cdot\sin\delta_o)}{(R_k - R_s)\cdot\sin\delta_o}\cdot\sin\varepsilon = \\ &= \frac{(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\sin\varepsilon}{(R_k - R_s)\cdot\sin\delta_o} \end{aligned}$$

Podstawiając to do (88), otrzymamy

$$\begin{aligned} d_L - d_P &= 2R_s\cdot\cos\delta_o\cdot\frac{(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\sin\varepsilon}{(R_k - R_s)\cdot\sin\delta_o} + \\ &+ 2\cdot(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\sin\varepsilon \end{aligned}$$

i w końcu

$$d_L - d_P = 2\cdot\frac{R_k}{R_k - R_s}\cdot(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\sin\varepsilon \tag{89}$$

4.17. Wartości d_L i d_P

Dodając stronami (87) i (89) i dzieląc wynik przez 2, otrzymamy

$$d_L = b\cdot\cos\varepsilon - \frac{R_s}{R_k - R_s}\cdot(b + R_k\cdot\sin\delta)\cdot(1-\cos\varepsilon) + \\ + \frac{R_k}{R_k - R_s}\cdot(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\sin\varepsilon \tag{90}$$

Z kolei odejmując (89) od (87) i dzieląc wynik przez 2 otrzymamy

$$d_P = b\cdot\cos\varepsilon - \frac{R_s}{R_k - R_s}\cdot(b + R_k\cdot\sin\delta_o)\cdot(1-\cos\varepsilon) - \\ - \frac{R_k}{R_k - R_s}\cdot(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\sin\varepsilon \tag{91}$$

Można wzory (90) i (91) przekształcić dalej

$$d_L = b\cdot\cos\varepsilon + \frac{R_k}{R_k - R_s}\cdot(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\sin\varepsilon - \\ - \frac{2R_s - R_k}{R_k - R_s}\cdot\left(\frac{b}{R_k} + \sin\delta_o\right)\cdot\sin^2\frac{\varepsilon}{2} \tag{92}$$

$$d_P = b\cdot\cos\varepsilon - \frac{R_k}{R_k - R_s}\cdot(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\sin\varepsilon - \\ - \frac{2R_s\cdot R_k}{R_k - R_s}\cdot\left(\frac{b}{R_k} + \sin\delta_o\right)\cdot\sin^2\frac{\varepsilon}{2} \tag{93}$$

Odległość wzajemna płaszczyzn kręgów tocznych

$$2d = d_L + d_P = 2b\cdot\cos\varepsilon - \frac{4R_s\cdot R_k}{R_k - R_s}\cdot\left(\frac{b}{R_k} + \sin\delta_o\right)\cdot\sin^2\frac{\varepsilon}{2} \tag{94}$$

Ubytek wzajemnej odległości kręgów tocznych

$$\Delta d = 2b - 2d = 2b - 2b\cdot\cos\varepsilon + \\ + \frac{4R_s\cdot R_k}{R_k\cdot R_s}\cdot\left(\frac{b}{R_k} + \sin\delta_o\right)\cdot\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$$

czyli

$$\Delta d = 4b\cdot\left[1 + \frac{R_s\cdot R_k}{b\cdot(R_k - R_s)}\cdot\left(\frac{b}{R_k} + \sin\delta_o\right)\right]\cdot\sin^2\frac{\varepsilon}{2} \tag{95}$$

Dla kół o bieżni stożkowej $(R_k = \infty)$ mamy z wzoru (92)

$$d_L = b\cdot\cos\varepsilon + (b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\sin\varepsilon + \\ - 2R_s\cdot\sin\delta_o\cdot\sin^2{}_o\frac{\varepsilon}{2} \tag{92A}$$

Z wzoru (93) mamy

$$d_P = b\cdot\cos\varepsilon - (b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\sin\varepsilon + \\ - 2R_s\cdot\sin\delta_o\cdot\sin^2\frac{\varepsilon}{2} \tag{93A}$$

Z wzoru (94) mamy

$$2d = 2b\cdot\cos\varepsilon - 4R_s\cdot\sin\delta_o\cdot\sin^2\frac{\varepsilon}{2} \tag{94A}$$

Z wzoru (95) mamy

$$\Delta d = 4b\cdot\left(1 + \frac{R_s}{b}\cdot\sin\delta_o\right)\cdot\sin^2\frac{\varepsilon}{2} \tag{95A}$$

Dla szyn nożowych $(R_s = 0)$ mamy

$$d_L = b\cdot\cos\varepsilon + b\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\sin\varepsilon \tag{90B}$$

$$d_P = b\cdot\cos\varepsilon - b\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\sin\varepsilon \tag{93B}$$

$$2d = 2b\cdot\cos\varepsilon \tag{94B}$$

$$\Delta d = 4b\cdot\sin^2\frac{\varepsilon}{2} \tag{95B}$$

Δd może wystąpić tylko w wyniku poślizgów poosiowych jednego lub obu kół zestawu kołowego na torze.

4.18. Równanie osi przechylonego zestawu kołowego

Jest to prosta przechodząca przez punkt D i posiadająca współczynnik kierunkowy równy $\mathrm{tg}\,\varepsilon$.

Współrzędne punktu D wynoszą (patrz punkt 3.15)

$$y_D = \Delta y_D = (b \cdot \mathrm{ctg}\,\delta_o - R)\cdot\varepsilon \qquad \text{(patrz wzór 66)}$$

$$z_D = z_{Do} + \Delta z = R_s \cdot \cos\delta_o + R + \frac{b \cdot \mathrm{ctg}\,\delta_o - R}{2}\cdot\varepsilon^2$$

(wzory 64 i 68)

Równanie przechylonej osi zestawu kołowego będzie typu:

$$z - z_D = \mathrm{tg}\,\varepsilon \cdot (y - y_D)$$

czyli

$$(\mathrm{tg}\,\varepsilon)\cdot y - z + (z_D - y_D \cdot \mathrm{tg}\,\varepsilon) = 0$$

Podstawiając tu wyrażenia na y_D i z_D, otrzymamy

$$(\mathrm{tg}\,\varepsilon)\cdot y - z + R_s \cdot \cos\delta_o + R + \\ + \frac{b \cdot \mathrm{ctg}\,\delta_o - R}{2}\cdot\varepsilon^2 - (b \cdot \mathrm{ctg}\,\delta_o - R)\cdot\varepsilon\cdot\mathrm{tg} = 0 \qquad (96)$$

Dwa ostatnie wyrażenia będą pomijalnie małe w zestawieniu z R, a zatem równanie (96) ulegnie uproszczeniu

$$(\mathrm{tg}\,\varepsilon)\cdot y - z + R_s \cdot \cos\delta_o + R = 0 \qquad (97)$$

Zatem

$$A = \mathrm{tg}\,\varepsilon \qquad (98)$$

$$B = -1 \qquad (99)$$

$$C = R + R_s \cdot \cos\delta_o \qquad (100)$$

4.19. Odległość punktu L od osi przechylonego zestawu kołowego

$$R_l = \frac{|A \cdot y_{Fl} + B \cdot z_{Fl} + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Podstawiając tu (98), (99) i (100), otrzymamy

$$R_l = \frac{|(\mathrm{tg}\,\varepsilon)\cdot y_{Fl} - 1\cdot z_{Fl} + R + R_s \cdot \cos\delta_o|}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\varepsilon + 1}}$$

czyli

$$R_l = |(\mathrm{tg}\,\varepsilon)\cdot y_{Fl} - z_{Fl} + R + R_s \cdot \cos\delta\,|\cdot\cos\varepsilon$$

Podstawiając tu (78) i (79), otrzymamy

$$R_l = |(\mathrm{tg}\,\varepsilon)\cdot\{-b - R_s\cdot[\sin\delta_o - \sin(\delta_o - \Theta)]\} + \\ - R_s \cdot \cos(\delta_o - \Theta) + R + R_s \cdot \cos\delta_o\,|\cdot\cos\varepsilon$$

czyli

$$R_l = (R + R_s \cdot \cos\delta_o)\cdot\cos\varepsilon - b\cdot\sin\varepsilon + \\ - R_s \cdot [\sin\delta_o - \sin(\delta_o - \Theta)]\cdot\sin\varepsilon - \\ - R_s \cdot \cos(\delta_o - \Theta)\cdot\cos\varepsilon \qquad (101)$$

4.20. Odległość punktu F_p od osi przechylonego zestawu kołowego

$$R_p = \frac{|A \cdot y_{Fp} + B \cdot z_{Fp} + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Podstawiając tu (98), (99) i (100), otrzymamy

$$R_p = \frac{|(\mathrm{tg}\,\varepsilon)\cdot y_{Fp} - 1\cdot z_{Fp} + R + R_s \cdot \cos\delta_o|}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\varepsilon + 1}}$$

czyli

$$R_p = |(\mathrm{tg}\,\varepsilon)\cdot y_{Fp} - z_{Fp} + R + R_s \cdot \cos\delta_o|\cdot\cos\varepsilon$$

Podstawiając tu (80) i (81), otrzymamy

$$R_p = |(\mathrm{tg}\,\varepsilon)\cdot\{b - R_s\cdot[\sin(\delta_o + \Theta) - \sin\delta_o]\} + \\ - R_s \cdot \cos(\delta_o + \Theta) + R + R_s \cdot \cos\delta_o\,|\cdot\cos\varepsilon$$

czyli

$$R_p = (R + R_s \cdot \cos\delta_o)\cdot\cos\varepsilon + b\cdot\sin\varepsilon + \\ - R_s \cdot [\sin(\delta_o + \Theta) - \sin\delta_o]\cdot\sin\varepsilon - \\ - R_s \cdot \cos(\delta_o + \Theta)\cdot\cos\varepsilon \qquad (102)$$

4.21. Różnica promieni toczenia obu kół zestawu kołowego

Różnicę tę można zapisać:

$$\Delta R = R_p - R_l$$

Podstawiając tu (102) i (101), otrzymamy

$$\Delta R = 2b \cdot \sin\varepsilon - R_s \cdot [\sin(\delta_o + \Theta) - \sin\delta_o] \cdot \sin\varepsilon + \\ + R_s \cdot [\sin\delta_o - \sin(\delta_o - \Theta)] \cdot \sin\varepsilon - R_s \cdot \cos(\delta_o + \Theta) \cdot \cos\varepsilon + \\ + R_s \cdot \cos(\delta_o - \Theta) \cdot \cos\varepsilon$$

Po przekształceniach otrzymamy

$$\Delta R = 2b \cdot \sin\varepsilon - 2R_s \cdot \sin\varepsilon \cdot (\sin\delta_o \cdot \cos\Theta - \sin\delta_o) + \\ + 2R_s \cdot \cos\varepsilon \cdot \sin\delta_o \cdot \sin\Theta \qquad (103)$$

Podstawiając tu (85) i (32), otrzymamy

$$\sin\delta_o \cdot \cos\Theta = \frac{(b + R_k \cdot \sin\delta_o) \cdot \cos\varepsilon - (b + R_s \cdot \sin\delta_o)}{R_k - R_s}$$

Z równania (32) wynika, że

$$\sin\Theta \approx \Theta = \frac{b + R_k \cdot \sin\delta_o}{(R_k - R_s) \cdot \sin\delta_o} \cdot \sin\varepsilon$$

Podstawiając (92) i (93) do (91), otrzymamy

$$\Delta R = 2b \cdot \sin\varepsilon + \\ - 2R_s \cdot \sin\varepsilon \cdot \left[\frac{(b + R_k \cdot \sin\delta_o) \cdot \cos\varepsilon - (b + R_s \cdot \sin\delta_o)}{R_k - R_s} - \sin\delta_o \right] + \\ + 2R_s \cdot \cos\varepsilon \cdot \sin\delta_o \cdot \frac{b + R_k \cdot \sin\delta_o}{(R_k - R_s) \cdot \sin\delta_o} \cdot \sin\varepsilon$$

Po przekształceniach zależność tę można sprowadzić do postaci:

$$\Delta R = 2 \cdot \frac{R_k}{R_k - R_s} \cdot (b + R_s \cdot \sin\delta_o) \cdot \sin\varepsilon \qquad (104)$$

Podstawiając tu (71), otrzymamy

$$\Delta R = 2 \cdot \frac{R_k}{R_k - R_s} \cdot (b + R_s \cdot \sin\delta_o) \cdot \frac{\operatorname{tg}\delta_o}{b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o} \cdot y$$

czyli

$$R_P - R_L = \Delta R = 2 \cdot \frac{R_k}{R_k - R_s} \cdot \frac{(b + R_s \cdot \sin\delta_o) \cdot \operatorname{tg}\delta_o}{b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o} \cdot y \qquad (105)$$

Dla kół o bieżni stożkowej będzie $R_k = \infty$, a wtedy

$$\Delta R = 2 \cdot \frac{(b + R_s \cdot \sin\delta_o) \cdot \operatorname{tg}\delta_o}{b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o} \cdot y \qquad (106)$$

4.21. Suma promieni toczenia obu kół przechylonego zestawu kołowego

Otrzymamy ją dodając do siebie stronami (101) i (102)

$$R_L + R_P = 2 \cdot (R + R_s \cdot \cos\delta_o) \cdot \cos\varepsilon - \\ - R_s \cdot [\sin\delta_o - \sin(\delta_o - \Theta) + \sin(\delta_o + \Theta) - \sin\delta_o] \cdot \sin\varepsilon - \\ - R_s \cdot [\cos(\delta_o - \Theta) + \cos(\delta_o + \Theta)] \cdot \cos\varepsilon$$

Po odpowiednich przekształceniach otrzymamy:

$$R_L + R_P = 2 \cdot (R + R_s \cdot \cos\delta_o) \cdot \cos\varepsilon + \\ - 2R_s \cdot \cos\delta_o \cdot \cos(\Theta - \varepsilon) \qquad (107)$$

Kąty ε i Θ są małe, a zatem można przyjąć

$$\cos\varepsilon \approx 1 \text{ oraz } \cos(\Theta - \varepsilon) \approx 1.$$

Zatem wzór (1-7) przyjmie postać

$$R_L + R_P = 2(R + R_s \cdot \cos\delta_o) - 2R_s \cdot \cos\delta_o$$

czyli

$$R_L + R_P = 2R \qquad (108)$$

4.22. Promienie toczenia

Dodając stronami (105) i (108) i dzieląc wynik przez 2, otrzymamy

$$R_P = R + \frac{R_k}{R_k - R_s} \cdot \frac{(b + R_s \cdot \sin\delta_o) \cdot \operatorname{tg}\delta_o}{b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o} \cdot y \qquad (109)$$

Odejmując (108) od (105) i dzieląc wynik przez 2, otrzymamy

$$R_L = R - \frac{R_k}{R_k - R_s} \cdot \frac{(b + R_s \cdot \sin\delta_o) \cdot \operatorname{tg}\delta_o}{b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o} \cdot y \qquad (110)$$

4.23. Współczynnik kierunkowy prostej łączącej punkty styku przechylonego zestawu kołowego z szynami

$$m_F = \frac{z_{Fp} - z_{Fl}}{y_{Fp} - y_{Fl}}$$

Podstawiając tu (81), (79), (80) i (78), otrzymamy

$$m_F = \frac{R_s \cdot \cos(\delta_o + \Theta) - R_s \cdot \cos(\delta_o - \Theta)}{b - R_s \cdot [\sin(\delta_o + \Theta) - \sin\delta_o] + b + R_s \cdot [\sin\delta_o - \sin(\delta_o - \Theta)]}$$

$$m_F = \frac{-2R_s \cdot \sin\delta_o \cdot \sin\Theta}{2b - 2R_s \cdot (\sin\delta_o \cdot \cos\Theta - \sin\delta_o)}$$

Podstawiając tu (32) i (27) dla $\Theta_L = \Theta_P = \Theta$, otrzymamy

$$m_F = \frac{-2R_s \cdot \sin\delta_o \cdot \dfrac{(b + R_k \cdot \sin\delta_o) \cdot \sin\varepsilon}{(R_k - R_s) \cdot \sin\delta_o}}{2b - 2R_s \cdot \left[\dfrac{(b + R_k \cdot \sin\delta_o) \cdot \cos\varepsilon - (b + R_s \cdot \sin\delta_o)}{R_k - R_s} - \sin\delta_o\right]}$$

Po odpowiednich przekształceniach będzie:

$$m_F = \frac{R_s \cdot (b + R_k \cdot \sin\delta_o) \cdot \sin\varepsilon}{R_k \cdot (b + R_s \cdot \sin\delta_o) - R_s \cdot (b + R_k \cdot \sin\delta_o) \cdot \cos\varepsilon} \qquad (111)$$

Dla małych kątów ε zależność (111) przyjmie postać:

$$m_F = -\frac{R_s \cdot (b + R_k \cdot \sin\delta_o)}{(R_k - R_s) \cdot b} \cdot \varepsilon \qquad (112)$$

4.24. Odległość wzajemna punktów styku przechylonego zestawu kołowego z szynami

$$l_F = F_l F_p = \sqrt{(y_{Fp} - y_{Fl})^2 + (z_{Fp} - z_{Fl})^2}$$

Podstawiając tu (80), (78), (81) i (79), otrzymamy:

$$y_{Fp} - y_{Fl} = b - R_s \cdot [\sin(\delta_o + \Theta) - \sin\delta_o] +$$
$$+ b + R_s \cdot [\sin\delta_o - \sin(\delta_o - \Theta)] =$$
$$= 2b - 4R_s \cdot \sin\delta_o \cdot \sin^2\frac{\Theta}{2} =$$
$$= 2b \cdot \left(1 - \frac{2R_s}{b} \cdot \sin\delta_o \cdot \sin^2\frac{\Theta}{2}\right)$$

Drugi wyraz w nawiasie jest pomijalnie mały w zestawieniu z 1. Zatem

$$y_{Fp} - y_{Fl} = 2b$$

Z kolei

$$z_{Fp} - z_{Fl} = R_s \cdot \cos(\delta_o + \Theta) - R_s \cdot \cos(\delta_o - \Theta) =$$
$$= R_s \cdot [\cos(\delta_o + \Theta) - \cos(\delta_o - \Theta)] =$$
$$= R_s \cdot (-2 \cdot \sin\delta_o \cdot \sin\Theta) =$$
$$= -2R_s \cdot \sin\delta_o \cdot \sin\Theta \approx -2R_s \cdot \sin\delta_o \cdot \Theta$$

Podstawiając tu (32), otrzymamy

$$z_{Fp} - z_{Fl} = -2R_s \cdot \frac{(b + R_k \cdot \sin\delta_o) \cdot \sin\varepsilon}{R_k - R_s}$$

I wreszcie

$$l_F = \sqrt{(y_{Fp} - y_{F_l})^2 + (z_{Fp} - z_{Fl})^2} =$$
$$= \sqrt{4b^2 + 4R_s^2 \cdot \frac{(b + R_k \cdot \sin\delta_o)^2 \cdot \sin^2\varepsilon}{(R_k - R_s)^2}} =$$
$$= 2b \cdot \sqrt{1 + \frac{R_s^2}{b^2} \cdot \frac{(b + R_k \cdot \sin\delta_o)^2 \cdot \sin^2\varepsilon}{(R_k - R_s)^2}}$$

Pod pierwiastkiem drugi wyraz jest pomijalnie mały w zestawieniu z 1. Zatem

$$l_F \approx 2b \qquad (113)$$

4.25. Współrzędne punktów K_l i K_p

Po przechyleniu zestawu kołowego o kąt ε punkt E_L zajmie położenie K_l. Współrzędne tego punktu wyniosą

$$y_{Kl} = y_A + R_k \cdot \sin(\delta_o - \varepsilon)$$

$$z_{Kl} = z_A + R_k \cdot \cos(\delta_o - \varepsilon)$$

Podstawiając tu (39) oraz (40), otrzymamy

$$y_{Kl} = -(b + R_s \cdot \sin\delta_o) + \\ -(R_k - R_s)\cdot\sin(\delta_o - \Theta) + R_k \cdot \sin(\delta_o - \varepsilon) \quad (114)$$

$$z_{Kl} = -(R_k - R_s)\cdot(\delta_o - \Theta) + R_k \cdot \cos(\delta_o - \varepsilon) \quad (115)$$

Z kolei punkt E_p po przechyleniu zajmie położenie K_p. Współrzędne tego punktu wyniosą

$$y_{Kp} = y_B - R_k \cdot \sin(\delta_o + \varepsilon)$$

$$z_{Kp} = z_B + R_k \cdot \cos(\delta_o + \varepsilon)$$

Podstawiając tu (43) i (44), otrzymamy

$$y_{Kp} = (b + R_s \cdot \sin\delta_o) + \\ +(R_k - R_s)\cdot\sin(\delta_o + \Theta_p) - R_k \cdot \cos(\delta_o + \varepsilon) \quad (116)$$

$$z_{Kp} = -(R_k - R_s)\cdot\cos(\delta_o + \Theta_p) + R_k \cdot \cos(\delta_o + \varepsilon) \quad (117)$$

4.26. Odległości punktów K_l i K_p od symetralnej SC

Równanie symetralnej S.C. (wzór 52)

$$A \cdot y + B \cdot z + C = 0$$

gdzie:

$$A = -\operatorname{ctg}\varepsilon \quad \text{(wzór 75)}$$

$$B = -1 \quad \text{(wzór 76)}$$

$$C = R + R_s \cdot \operatorname{ctg}\delta_o \quad \text{(wzór 77)}$$

Szukana odległość punktu K_l od tej symetralnej wyniesie

$$e_L = \frac{|A \cdot y_{Kl} + B \cdot z_{Kl} + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$e_L = \frac{|(-\operatorname{ctg}\varepsilon)\cdot[-(b + R_s \cdot \sin\delta_o) - (R_k - R_s)\cdot\sin(\delta_o - \Theta) + R_k \cdot \sin(\delta_o - \varepsilon)] + \ldots}{\ldots + (-1)\cdot[-(R_k - R_s)\cdot\cos(\delta_o - \Theta) + R_k \cdot \cos(\delta_o - \varepsilon)] + C|}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\varepsilon + 1}}$$

Po dalszych przekształceniach będzie:

$$e_L = b \cdot \cos\varepsilon + R_s \cdot \sin\delta_o \cdot \cos\varepsilon + \\ +(R_k - R_s)\cdot\sin(\delta_o + \varepsilon - \Theta) - R_k \cdot \sin\delta_o + C \cdot \sin\varepsilon \quad (118)$$

Odległość punktu K_p od symetralnej *S.C.* wynosi

$$e_p = \frac{|A \cdot y_{Kp} + B \cdot z_{Kp} + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$e_p = \frac{|(-\operatorname{ctg}\varepsilon)\cdot[(b + R_s \cdot \sin\delta_o) + (R_k - R_s)\cdot\sin(\delta_o + \Theta) - \ldots}{\ldots - R_k \cdot \sin(\delta_o + \varepsilon)\,] + (-1)[-(R_k - R_s)\cdot\cos(\delta_o + \Theta) + R_k \cdot \cos(\delta_o + \varepsilon)] + C|}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\varepsilon + 1}}$$

Powyższą zależność można przekształcić do postaci:

$$e_p = b \cdot \cos\varepsilon + R_s \cdot \sin\delta_o \cdot \cos\varepsilon + \\ +(R_k - R_s)\cdot\sin(\delta_o - \varepsilon + \Theta) - \\ -R_k \cdot \sin\delta_o - C \cdot \sin\varepsilon \quad (119)$$

4.27. Odległość pomiędzy płaszczyznami prostopadłymi do przechylonej osi zestawu kołowego i przechodzącymi przez punkty K_L i K_P

Odległość tę zapisujemy w postaci zależności:

$$e = e_l + e_p$$

$$e = b \cdot \cos\varepsilon + R_s \cdot \sin\delta_o \cdot \cos\varepsilon + \\ +(R_k - R_s)\cdot\sin(\delta_o + \varepsilon - \Theta) - R_k \cdot \sin\delta_o + C \cdot \sin\varepsilon + \\ +b \cdot \cos\varepsilon + R_s \cdot \sin\delta_o \cdot \cos\varepsilon + \\ +(R_k - R_s)\cdot\sin(\delta_o - \varepsilon + \Theta) - R_k \cdot \sin\delta_o - C \cdot \sin\varepsilon$$

Po przekształceniach będzie:

$$e = 2b \cdot \cos\varepsilon + 2R_s \cdot \sin\delta_o \cdot \cos\varepsilon + \\ -2R_k \cdot \sin\delta_o + 2\cdot(R_k - R_s)\cdot\sin\delta_o \cdot \cos(\Theta - \varepsilon)$$

Dla małych kątów ε i Θ można przyjąć $\cos(\Theta - \varepsilon) \approx 1$ oraz $\cos\varepsilon \approx 1$

$$e = 2b + 2R_s \cdot \sin\delta_o - 2R_k \cdot \sin\delta_o + 2\cdot(R_k - R_s)\cdot\sin\delta_o$$

$$e_l + e_p = e = 2b \quad (120)$$

4.28. Różnica pomiędzy wymiarami e_L i e_P

$$\Delta e = e_l - e_p$$

Podstawiając tu (118) i (119), otrzymamy

$$\begin{aligned}\Delta e = {} & b \cdot \cos\varepsilon + R_s \cdot \sin\delta_o \cdot \cos\varepsilon + \\ & + (R_k - R_s) \cdot \sin(\delta_o + \varepsilon - \Theta) + \\ & - R_k \cdot \sin\delta_o + C \cdot \sin\varepsilon + \\ & - b \cdot \cos\varepsilon - R_s \cdot \sin\delta_o \cdot \cos\varepsilon + \\ & - (R_k - R_s) \cdot \sin(\delta_o - \varepsilon + \Theta) + \\ & + R_k \cdot \sin\delta_o + C \cdot \sin\varepsilon\end{aligned}$$

czyli

$$\Delta e = (R_k - R_s) \cdot [\sin(\delta_o + \varepsilon - \Theta) - \sin(\delta_o - \varepsilon + \Theta)] + 2C \cdot \sin\varepsilon$$

i po dalszych przekształceniach:

$$\Delta e = 2C \cdot \sin\varepsilon - 2 \cdot (R_k - R_s) \cdot \cos\delta_o \cdot (\sin\Theta \cdot \cos\varepsilon - \cos\Theta \cdot \sin\varepsilon)$$

Biorąc pod uwagę, że kąty ε i Θ są małe, a zatem $\cos\varepsilon \approx 1$, oraz $\cos\Theta \approx 1, \sin\Theta \approx \Theta$, a $\sin\varepsilon \approx \varepsilon$. A więc $\Delta e = 2C \cdot \sin\varepsilon - 2 \cdot (R_k - R_s) \cdot \cos\delta_o \cdot (\Theta - \varepsilon)$.

Podstawiając tu (32), otrzymamy

$$\Delta e = 2C \cdot \sin\varepsilon - 2 \cdot (R_k - R_s) \cdot \cos\delta_o \cdot \left(\frac{b + R_k \cdot \sin\delta_o}{(R_k - R_s) \cdot \sin\delta_o} \cdot \varepsilon - \varepsilon \right)$$

Po przekształceniu będzie:

$$\Delta e = 2 \cdot [C - \operatorname{ctg}\delta_o \cdot (b + R_s \cdot \sin\delta_o)] \cdot \varepsilon$$

Podstawiając tu (77), otrzymamy

$$\Delta e = 2 \cdot (C - C) \cdot \varepsilon$$

czyli

$$\Delta e = 0 \qquad (121)$$

Rozwiązując układ równań (120) i (121), otrzymamy

$$e_l = e_p \qquad (122)$$

4.29. Kąt pomiędzy osią przechylonego zestawu kołowego a linią łączącą punkty styku kół z szynami (chwilową osią obrotu zestawu kołowego)

Kąt ten można zapisać w postaci:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m_F + \operatorname{tg}\varepsilon}{1 - m_F \cdot \operatorname{tg}\varepsilon}$$

Podstawiając tu (111) i odpowiednio przekształcając, otrzymamy:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{R_s \cdot (b + R_k \cdot \sin\delta_o) \cdot \sin\varepsilon}{R_k \cdot (b + R_s \cdot \sin\delta_o) - R_s \cdot (b + R_k \cdot \sin\delta_o) \cdot \cos\varepsilon} + \dfrac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}}{1 - \dfrac{R_s \cdot (b + R_k \cdot \sin\delta_o) \cdot \sin\varepsilon}{R_k \cdot (b + R_s \cdot \sin\delta) - R_s \cdot (b + R_k \cdot \sin\delta_o) \cdot \cos\varepsilon} \cdot \dfrac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}}$$

czyli

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R_k \cdot (b + R_s \cdot \sin\delta_o) \cdot \sin\varepsilon}{R_k \cdot (b + R_s \cdot \sin\delta_o) \cdot \cos\varepsilon - R \cdot (b + R_k \cdot \sin\delta_o)} \qquad (123)$$

Dla małych kątów ε będzie to

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R_k \cdot (b + R_s \cdot \sin\delta_o)}{R_k \cdot (b + R_s \cdot \sin\delta_o) - R_s \cdot (b + R_k \cdot \sin\delta_o)} \cdot \varepsilon$$

czyli

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R_k}{R_k - R_s} \cdot \frac{b + R_s \cdot \sin\delta_o}{b} \cdot \varepsilon \qquad (124)$$

Podstawiając tu (71), otrzymamy

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R_k}{R_k - R_s} \cdot \frac{b + R_s \cdot \sin\delta_o}{b} \cdot \frac{\operatorname{tg}\delta_o}{b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o} \cdot y$$

czyli

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R_k}{R_k - R_s} \cdot \frac{b + R_s \cdot \sin\delta_o}{b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o} \cdot \frac{\operatorname{tg}\delta_o}{b} \cdot y \qquad (125)$$

Gdyby zestaw kołowy miał bieżnie stożkowe $(R_k = \infty)$, to byłoby

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b + R_s \cdot \sin\delta_o}{b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o} \cdot \frac{\operatorname{tg}\delta_o}{b} \qquad (126)$$

Gdyby zestaw kołowy miał bieżnie stożkowe $(R_k = \infty)$, a szyny miały ostry kształt noża $(R_s = 0)$, to byłoby

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\delta_o}{b - R\cdot\operatorname{tg}\delta_o}\cdot y \qquad (127)$$

Z wzoru (125) wynika, że ekwiwalentna stożkowatość wynosi

$$\operatorname{tg}\delta_{ekw} = \frac{R_k}{R_k - R_s}\cdot\frac{b + R_s\cdot\sin\delta_o}{b - R\cdot\operatorname{tg}\delta_o}\cdot\operatorname{tg}\delta_o \qquad (128)$$

Jest to wzór identyczny z wzorem wyprowadzonym przez F.B. Bladera [1].

4.30. Promień krzywizny drogi środka ciężkości zestawu kołowego w płaszczyźnie poziomej x, y

Z rysunku 9 wynika, że:

$$R_\rho = \frac{R_L}{\operatorname{tg}\varphi} + d_L$$

Podstawiając tu (110), (125) oraz (94), otrzymujemy

$$R\rho = \frac{R - \dfrac{R_k}{R_k - R_s}\cdot\dfrac{(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{tg}\delta_o}{b - R\cdot\operatorname{tg}\delta_o}\cdot y}{\dfrac{R_k}{R_k - R_s}\cdot\dfrac{b + R_s\cdot\sin\delta_o}{b - R\cdot\operatorname{tg}\delta_o}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\delta_o}{b}\cdot y} +$$

$$+ b\cdot\cos\varepsilon - \frac{R_s}{R_k - R_s}\cdot(b + R_k\cdot\sin\delta_o)\cdot(1 - \cos\varepsilon) +$$

$$+ \frac{R_k}{R_k - R_s}\cdot(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\sin\varepsilon$$

Podstawiając tu (69), otrzymamy

$$R\rho = \frac{R - \dfrac{R_k}{R_k - R_s}\cdot\dfrac{(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{tg}\delta_o}{b - R\cdot\operatorname{tg}\delta_o}\cdot(b\cdot\operatorname{ctg}\delta_o - R)\cdot\varepsilon}{\dfrac{R_k}{R_k - R_s}\cdot\dfrac{b + R_s\cdot\sin\delta_o}{b - R\cdot\operatorname{tg}\delta_o}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\delta_o}{b}\cdot(b\cdot\operatorname{ctg}\delta_o - R)\cdot\varepsilon} +$$

$$+ b\cdot\cos\varepsilon - \frac{R_s}{R_k - R_s}\cdot(b + R_k\cdot\sin\delta_o)\cdot 2\sin^2\frac{\varepsilon}{2} +$$

$$+ \frac{R_k}{R_k - R_s}\cdot(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\sin\varepsilon \qquad (129)$$

Ale dla małych kątów ε mamy $\cos\varepsilon \approx 1$, a przedostatni wyraz wzoru (129) jest pomijalny w zestawieniu z $b\cdot\cos\varepsilon$. Wzór (129) przyjmie więc postać

$$R\rho = \frac{R - \dfrac{R_k}{R_k - R_s}\cdot\dfrac{(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{tg}\delta_o}{b - R\cdot\operatorname{tg}\delta_o}\cdot(b\cdot\operatorname{ctg}\delta_o - R)\cdot\varepsilon}{\dfrac{R_k}{R_k - R_s}\cdot\dfrac{b + R_s\cdot\sin\delta_o}{b - R\cdot\operatorname{tg}\delta_o}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\delta_o}{b}\cdot(b\cdot\operatorname{ctg}\delta_o - R)\cdot\varepsilon} +$$

$$+ b + \frac{R_k}{R_k - R_s}\cdot(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\varepsilon \qquad (130)$$

Po jego przekształceniu będzie:

$$R\rho = o\frac{R\cdot(R_k - R_s)^2\cdot b + R_k^{\,2}\cdot(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\operatorname{ctg}\delta_o\cdot\varepsilon^2}{R_k\cdot(R_k - R_s)\cdot(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\varepsilon} \qquad (130)$$

Ale przy małych kątach ε, w liczniku drugi składnik jest pomijalny w zestawieniu z pierwszym składnikiem. Zatem wzór (130) przyjmie postać

$$R\rho = \frac{R\cdot(R_k - R_s)^2\cdot b}{R_k\cdot(R_k - R_s)\cdot(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\varepsilon}$$

czyli

$$R\rho = \frac{R_k - R_s}{R_k}\cdot\frac{b\cdot R}{(b + R_s\cdot\sin\delta_o)\cdot\varepsilon} \qquad (131)$$

4.31. Krzywizna drogi środka ciężkości zestawu kołowego w płaszczyźnie poziomej x, y

Krzywiznę tę można zapisać w postaci zależności:

$$\rho = \frac{1}{R\rho}$$

Podstawiając tu (131), otrzymujemy

$$\rho = \frac{R_k}{R_k - R_s}\cdot\frac{b + R_s\cdot\sin\delta_o}{b\cdot R}\cdot\varepsilon$$

Podstawiając tu (71), otrzymamy

$$\rho = \frac{R_k}{R_k - R_s}\cdot\frac{b + R_s\cdot\sin\delta_o}{b\cdot R}\cdot\frac{\operatorname{tg}\delta_o}{b - R\cdot\operatorname{tg}\delta_o}\cdot y$$

czyli

$$\rho = \frac{R_k}{R_k - R_s} \cdot \frac{b + R_s \cdot \sin\delta_o}{b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o} \cdot \frac{\operatorname{tg}\delta_o}{b \cdot R} \cdot y \qquad (132)$$

Dla kół o bieżniach stożkowych $(R_k = \infty)$, będzie to

$$\rho = \frac{b + R_s \cdot \sin\delta_o}{b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o} \cdot \frac{\operatorname{tg}\delta_o}{b \cdot R} \cdot y \qquad (133)$$

Dla kół o krawędziach nożowych $(R_s = 0)$, będzie to

$$\rho = \frac{b}{b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o} \cdot \frac{\operatorname{tg}\delta_o}{b \cdot R} \cdot y \qquad (134)$$

Dla ogólnego przypadku wklęsłej bieżni kół poruszających się po wypukłych główkach szyn wzór (132), po podstawieniu do niego (128), przyjmie następującą postać:

$$\rho = \frac{\operatorname{tg}\delta_{ekw}}{b \cdot R} \cdot y \qquad (135)$$

4.32. Równanie różniczkowe drogi środka ciężkości zestawu kołowego w płaszczyźnie poziomej x, y

Ponieważ $\rho = -d^2y / dx^2$, to

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\operatorname{tg}\delta_{ekw}}{b \cdot R} \cdot y$$

czyli

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\operatorname{tg}\delta_{ekw}}{b \cdot R} \cdot y = 0 \qquad (136)$$

Rozwiązaniem szczególnym tego równania jest funkcja

$$y = y_a \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\delta_{ekw}}{R \cdot b}} \cdot x\right) \qquad (137)$$

Podstawiając (61) do (128), otrzymujemy

$$\operatorname{tg}\delta_{ekw} = \frac{R_k}{R_k - R_s} \cdot \frac{b + R_s \cdot \sin\delta_o}{l_{wah}} \qquad (138)$$

Podstawiając (138) do (137), otrzymamy

$$y = y_a \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{R_k}{R_k - R_s} \cdot \frac{b + R_s \cdot \sin\delta_o}{R \cdot b \cdot l_{wah}}} \cdot x\right)$$

czyli

$$y = y_a \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{R_k - R_s}{R_k} \cdot \frac{b}{b + R_s \cdot \sin\delta_o} \cdot R \cdot l_{wah}}} \cdot x\right) \qquad (139)$$

Oznaczając

$$\frac{R_k - R_s}{R_k} \cdot \frac{b}{b + R_s \cdot \sin\delta_o} \cdot l_{wah} = l_{wah_{ekw}} \qquad (140)$$

i podstawiając to do (139), otrzymamy

$$y = y_a \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah_{ekw}}}} \cdot x\right) \qquad (141)$$

4.33. Ekwiwalentna długość wahadła zastępczego

Jest to wielkość $l_{wah_{ekw}}$ wyrażona wzorem (140). Po podstawieniu do niego (61) otrzymamy:

$$l_{wah_{ekw}} = \frac{R_k - R_s}{R_k} \cdot \frac{b - R \cdot \sin\delta_o}{b + R_s \cdot \sin\delta_o} \cdot \frac{b}{\operatorname{tg}\delta_o} \qquad (142)$$

Dla kół o bieżniach wklęsłych, według [3], poruszających się po szynach wypukłych, według [2], wyniesie to:

$$l_{wah_{ekw}} = \frac{330 - 300}{330} \cdot \frac{753 - 460 \cdot 0{,}025}{753 + 300 \cdot 0{,}025} \cdot \frac{753}{0{,}025} \approx 2670mm$$

Ekwiwalentna stożkowatość w środkowym położeniu zestawu kołowego w torze wynosi wtedy (z wzoru 128)

$$tg\,\delta_{ekw} = \frac{330}{330 - 300} \cdot \frac{753 + 300 \cdot 0{,}025}{753 - 300 \cdot 0{,}025} \cdot 0{,}025 \approx 0{,}2805$$

Długość rzeczywista wahadła zastępującego zestaw kołowy wynosi (z wzoru 61)

$$l_{wah} = \frac{753 - 460 \cdot 0{,}025}{0{,}025} = 29660mm$$

- Gdy koła mają bieżnie stożkowe $(R_k = \infty)$, to ekwiwalentna długość wahadła zastępczego wynosi (patrz wzór 140)

$$l_{wah_{ekw}} = \frac{b - R_s \cdot \sin\delta_o}{b + R_s \cdot \sin\delta_o} \cdot \frac{b}{\operatorname{tg}\delta_o} =$$
$$= \frac{753 - 460 \cdot 0{,}025}{753 + 300 \cdot 0{,}025} \cdot \frac{753}{0{,}025} \approx 29370mm$$

Wtedy ekwiwalentna stożkowatość wynosi (patrz wzór 128)

$$\operatorname{tg}\delta_{ekw} = \frac{b + R_s \cdot \sin\delta_o}{b - R_s \cdot \sin\delta_o} \cdot \operatorname{tg}\delta_o =$$
$$= \frac{753 + 300 \cdot 0{,}025}{753 - 300 \cdot 0{,}025} \cdot 0{,}025 \approx 0{,}0255$$

a rzeczywista długość wahadła zastępującego zestaw kołowy nie ulegnie zmianie (patrz wzór 61)

$$l_{wah} = \frac{b - R \cdot \sin\delta_o}{\operatorname{tg}\delta_o} = \frac{753 - 460 \cdot 0{,}025}{0{,}025} = 29660mm$$

- Gdy szyny są „nożowe", czyli mają one wyraźną krawędź toczenia o małym promieniu zaokrąglenia (ok. 10 mm), wówczas można przyjąć $R_s = 0$. Wtedy ekwiwalentna długość wahadła zastępczego będzie równa rzeczywistej długości wahadła zastępującego zestaw kołowy (wzór 61)

$$l_{wah_{ekw}} = \frac{b - R \cdot \sin\delta_o}{\operatorname{tg}\delta_o} = l_{wah} = 29660mm$$

W tym przypadku ekwiwalentna stożkowatość będzie równa rzeczywistej stożkowatości bieżni (wzór 128)

$$tg\,\delta_{ekw} = tg\,\delta_o,$$

a rzeczywista długość wahadła zastępującego zestaw kołowy wynosi (wzór 61)

$$l_{wah} = \frac{b - R \cdot \sin\delta_o}{\operatorname{tg}\delta_o} = \frac{753 - 460 \cdot 0{,}025}{0{,}025} = 29660mm$$

4.34. Parametry wężykowania zestawu kołowego w płaszczyźnie x,y toru

Równanie trajektorii środka ciężkości zestawu kołowego w płaszczyźnie x, y jest określone równaniem (141).

Amplituda wężykowania wystąpi gdy $x = x_a$, gdzie:

$$x_a = \frac{\Pi}{2} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah_{ekw}}} + 2n \cdot \Pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah_{ekw}}} =$$
$$= \frac{\Pi}{2} \cdot \sqrt{460 \cdot 2670} + 2n \cdot \Pi \cdot \sqrt{460 \cdot 2670} =$$
$$= 1739{,}9397 + n \cdot 6959{,}7588 = 1740 + n \cdot 6960mm$$

Amplituda ta wyniesie

$$y = y_a. \qquad (143)$$

Długość fali wężykowania wynosi

$$l_{węę} = 2\Pi\sqrt{R \cdot l_{wah_{ekw}}} = 2\Pi\sqrt{460 \cdot 2670} =$$
$$= 6959{,}7588 \approx 6960mm \qquad (144)$$

Stosunek tej wartości do długości fali wężykowania zestawu kołowego na torze zbudowanym z szyn nożowych wynosi

$$\alpha_{Lf} = \sqrt{\frac{l_{wah_{ekw}}}{l_{wah}}} = \sqrt{\frac{2670}{29660}} = 0{,}300.$$

Kąt, pod jakim trajektoria środka ciężkości zestawu kołowego jest odchylona w płaszczyźnie poziomej x, y od podłużnej osi symetrii toru, wynosi

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{y_a}{\sqrt{R \cdot l_{wah_{ekw}}}} \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah_{ekw}}}} \cdot x\right) \qquad (145)$$

Kąt ten przyjmie największą wartość gdy

$$x = x_o = 0 + n \cdot \Pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah_{ekw}}} =$$
$$= 0 + n \cdot \Pi \cdot \sqrt{460 \cdot 2670} \approx 0 + n \cdot 3480mm$$

Kąt φ wynosi wówczas

$$\varphi_o = \frac{y_a}{\sqrt{R \cdot l_{wah_{ekw}}}} \tag{146}$$

Przy tej samej amplitudzie y_a kąt φ_o określony wzorem (145) jest β – krotnie większy od kąta φ_o występującego na szynach nożowych, opisanych w [4], przy czym

$$\beta = \sqrt{\frac{l_{wah}}{l_{wah_{ekw}}}} = \sqrt{\frac{29660}{2670}} \approx 3{,}33$$

Krzywizna trajektorii środka ciężkości zestawu kołowego w płaszczyźnie x, y podczas wężykowania

$$\rho = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y_a}{R \cdot l_{wah_{ekw}}} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah_{ekw}}}} \cdot x\right) \tag{147}$$

Krzywizna ta osiąga największą wartość gdy

$$x = x_a = \frac{\Pi}{2} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah_{ekw}}} +$$
$$+ 2n \cdot \Pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah_{ekw}}} = 1740 + n \cdot 6960mm$$

Krzywizna wynosi wówczas ρ_a

$$\rho_a = -\frac{y_a}{R \cdot l_{wah_{ekw}}} \tag{148}$$

Przy tej samej amplitudzie y_a krzywizna ρ_a określona wzorem (148) jest γ-krotnie większa niż krzywizna ρ_o występująca na szynach krawędziowych [4], przy czym

$$\gamma = \frac{l_{wah}}{l_{wah_{eksp}}} = \frac{29660}{2670} = 11{,}0861423 \approx 11{,}1$$

4.35. Parametry podskakiwania środka ciężkości zestawu kołowego w płaszczyźnie x, z w torze

Równanie (73) przedstawia zależność uniesienia „z" środka ciężkości zestawu kołowego w górę w funkcji jego przemieszczenia „y" w poprzek toru. Podstawiając (141) do (73), otrzymamy

$$z = \frac{\operatorname{tg}\delta_o}{2 \cdot (b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o)} \cdot y_a^2 \cdot \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah_{ekw}}}} \cdot x\right) \tag{149}$$

Nie jest to ruch harmoniczny, lecz taki, w którym przemieszczenie „z" jest funkcją kwadratu sinusa wielokrotności przemieszczenia „x".

Z wzoru (149) wynika, że amplituda podskakiwania zestawu kołowego o wklęsłych bieżniach na torze o wypukłych główkach szyn wystąpi dla

$$x = \frac{\Pi}{2} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah_{ekw}}}$$

Wyniesie ona

$$z_a = \frac{\operatorname{tg}\delta_o}{2 \cdot (b - R \cdot \operatorname{tg}\delta_o)} \cdot y_a^2 \tag{150}$$

Jest ona identyczna jak dla zestawu kołowego o stożkowych bieżniach na torze krawędziowym.

Długość fali podskakiwania wyraża zależność:

$$L_{podsk} = \Pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah_{ekw}}} \tag{151}$$

Porównując wzory (144) i (151) widać, że długość fali podskakiwania jest znacznie mniejsza niż w przypadku kół o stożkowych bieżniach toczących się po krawędziowych szynach. Stosunek wartości uzyskanej z wzoru (151) dla kół o bieżniach wklęsłych i szyn o główkach wypukłych do wartości uzyskanej z wzoru (144) dla kół o bieżniach stożkowych i szyn krawędziowych wynosi δ, przy czym

$$\delta = \sqrt{\frac{l_{wah_{ekw}}}{l_{wah}}} = \sqrt{\frac{2670}{29660}} = 0{,}300$$

4.36. Łączna droga poślizgów osiowych obu kół zestawu o bieżniach wklęsłych wężykującego na torze krawędziowym

Z wzoru (95) mamy:

$$\Delta d = 4b \cdot \left[1 + \frac{R_s \cdot R_k}{b \cdot (R_k - R_s)} \cdot \left(\frac{b}{R_k} + \sin\delta_o\right)\right] \cdot \sin^2\frac{\varepsilon}{2} \tag{152}$$

Dla kół o bieżniach stożkowych toczących się po szynach nożowych droga ta wynosi (patrz 95B)

$$(\Delta d)_{noż} = b \cdot \varepsilon^2 \approx 4b \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \qquad (153)$$

Stosunek tych wartości jest następujący

$$\alpha_{\Delta d} = \frac{\Delta d}{(\Delta d)_{noż}} = 1 + \frac{R_s \cdot R_k}{b \cdot (R_k - R_s)} \cdot \left(\frac{b}{R_k} + \sin \delta_o \right) \qquad (154)$$

Liczbowo wynosi to

$$\alpha_{\Delta d} = 1 + \frac{300 \cdot 300}{753 \cdot (330 - 300)} \cdot \left(\frac{753}{330} + 0{,}025 \right) \approx 11{,}11$$

5. Zakończenie

Przeprowadzone w niniejszej pracy rozważania umożliwiły stwierdzenie występowania zjawiska kołysania zestawu kołowego podczas wężykowania w torze i wynikającego stąd podskakiwania środka ciężkości tego zestawu. Udało się również wyznaczyć częstotliwość tego podskakiwania, która okazała się dwukrotnie większa niż częstotliwość wężykowania.

Wprawdzie kąt kołysania zestawu kołowego jest bardzo mały, a zatem amplitudy podskakiwania środka ciężkości zestawu kołowego są również bardzo małe, niemniej częstotliwość podskakiwania może stać się źródłem impulsów wywołujących drgania wózka lub pudła pojazdu, jeśliby tak się złożyło, że częstotliwość podskakiwania, która jest zależna od prędkości, stanie się w pewnej chwili równa częstotliwości drgań własnych wózka lub pudła.

Warto zaakcentować fakt, iż łączna droga poślizgu obu kół zestawu kołowego o bieżniach wklęsłych, wężykującego na torze o wypukłych główkach szyn, jest $\alpha_{\Delta d} \approx 11{,}1$-krotnie większa od drogi poślizgów obu kół zestawu kołowego o bieżniach stożkowych wężykującego na torze zbudowanym z szyn krawędziowych.

Literatura

[1] Blader F.B.: Free Lateral Oscillations in Long Freight Trains. Praca doktorska, Queens University, Kingston, Kanada, 1972.

[2] Gąsowski W., Lang R.: Kołysanie poprzeczne zestawu kołowego podczas wężykowania w torze. Część I, Mechanika wężykowania zestawu kołowego, Pojazdy Szynowe Nr 2/1999.

[3] Gąsowski W., Lang R.: Kołysanie poprzeczne zestawu kołowego podczas wężykowania w torze. Część II, Obliczenie krzywizn konturów bieżni koła kolejowego i główki szyny kolejowej oraz wyznaczenie rzeczywistego położenia kręgów tocznych zestawu kołowego na torze, Pojazdy Szynowe, Nr 3/1999.

[4] Gąsowski W., Lang R.: Kołysanie poprzeczne zestawu kołowego podczas wężykowania w torze. Część III. Obliczenia kinematyczne zestawu kołowego przesuniętego prostopadle do osi podłużnej toru. Zestaw kołowy o stożkowych bieżniach kół poruszający się po torze krawędziowym. Pojazdy Szynowe, Nr 4/1999.