

## Kołysanie poprzeczne zestawu kołowego podczas wężykowania w torze (5)

Praca zawiera analizę kinematyki toczącego się zestawu kołowego. Szczególną uwagę zwrócono na jego kołysanie poprzeczne w torze w sytuacji, gdy podczas toczenia się zostanie on odchylony o pewien kąt od prostopadłej do podłużnej symetrii toru.

Najpierw rozpatrzono kinematykę zestawu kołowego o stożkowych obręczach kół na torze krawędziowym.

Następnie uogólniono wyniki na przypadek zestawu kołowego o wklęsłych bieżniach kół toczącego się po torze o wypukłych główkach szyn.

### Część V

#### USTALENIE WZORÓW DLA ZESTAWU KOŁOWEGO W POŁOŻENIU ŚRODKOWYM W TORZE, OBRÓCONEGO O PEWIEN KĄT WOKÓŁ LINII PIONOWEJ PRZECHODZĄCEJ PRZEZ JEGO ŚRODEK CIĘŻKOŚCI

##### 1. Wstęp

Dokładne zbadanie wpływu poprzecznego kołyszącego ruchu zestawu kołowego na przebieg jego wężykowania podczas jazdy wzdłuż kierunku toru wymaga analizy i ustalenia formalnych zależności dla różnych możliwych położen zestawu kołowego względem toru.

W niniejszej pracy przedstawiono wzory ustalone dla zestawu kołowego, który znajduje się w położeniu środkowym w torze i jest on obrócony o pewien kąt wokół linii pionowej przechodzącej przez jego środek ciężkości.

W celu uproszczenia rozważań zestaw kołowy o stożkowych bieżniach zastąpiono bistożkiem symetrycznym o identycznym kącie stożkowatości  $\delta_0$ , jaki występuje na zestawie kołowym.

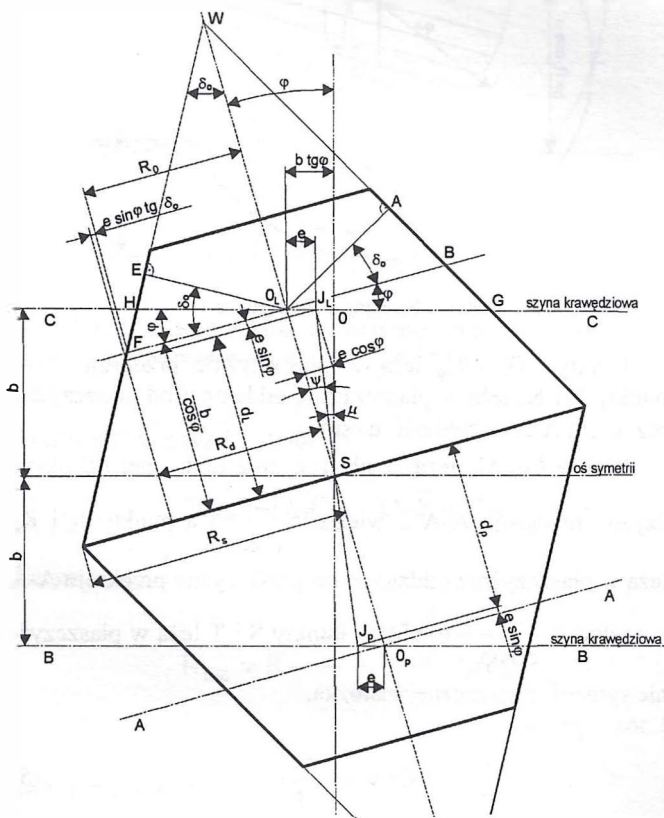
Artykuł jest kontynuacją prac przedstawionych w [1, 2, 3, 4], wykonywanych w ramach projektu badawczego KBN nr 9T 12C 02116 pt. „Nowa koncepcja skrajni kinematycznej pojazdów szynowych”.

##### 2. Przedstawienie geometryczne rozpatrywanego położenia

Badane położenie jest przedstawione na rys.1, a jego przekroje na rys. od 2 do 5.

Niech kąt skośnego ustawienia bistożka w torze wynosi „ $\varphi$ ”, stożkowatość „ $\delta_0$ ” - połowa odległości pomiędzy krawędziami toczenia się bistożka po torze „ $b$ ”, a promień koła, będącego przekrojem poprzecznym bistożka oddalonym o „ $b$ ” od środka bistożka, niech będzie „ $R$ ”. Oznacza to, że promień podstawy bistożka wynosi  $R_s$ , którego wartość wynosi:

$$R_s = R + b \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \quad (1)$$



Rys.1. Bistożek ustawiony skośnie w torze krawędziowym

Punkty  $O_L$ ,  $J_L$ ,  $J_P$ ,  $O_P$ ,  $S$ ,  $W$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$  i  $H$  leżą w płaszczyźnie poziomej oddalonej o  $R$  od płaszczyzny główek szyn.

$$R_O = \overline{O_L F} = R_S - \overline{SO_L} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 =$$

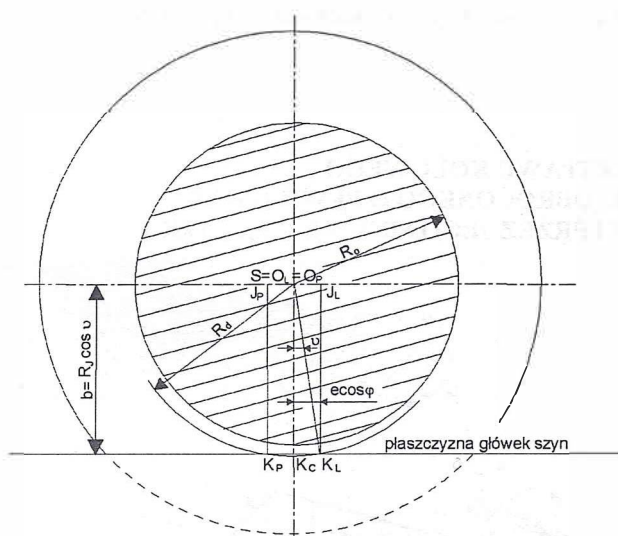
$$= R + b \cdot \operatorname{tg} \delta_0 - \frac{b}{\cos \varphi} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 = R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \quad (2)$$

Z kolei

$$R_d = R_O + e \cdot \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta_0 = R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 + e \cdot \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \quad (3)$$

Występuje też zależność

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{J_L O}{b} = \frac{O_L O - O_L J_L}{b} = \frac{b \cdot \operatorname{tg} \varphi - e}{b} = \operatorname{tg} \varphi - \frac{e}{b} \quad (4)$$



Rys.2. Przekrój A-A z rysunku 1

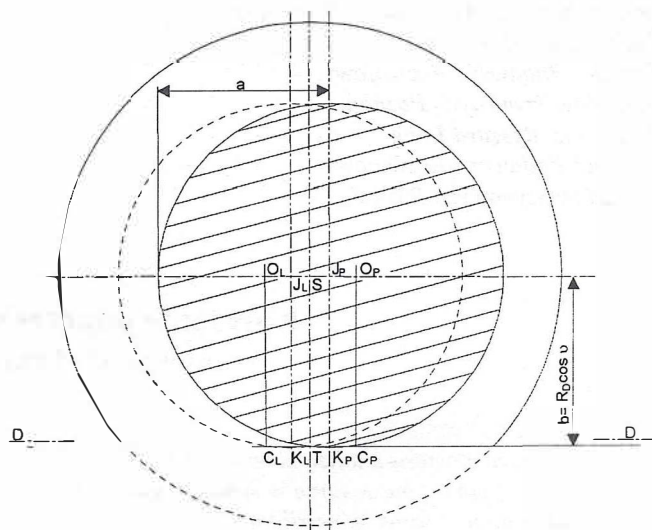
Punkty  $O_p$  i  $C_p$  leżą w płaszczyźnie przekroju A-A, punkty  $J_p$  i  $K_p$  leżą w płaszczyźnie oddalonej od płaszczyzny przekroju A-A o wielkość  $e \cdot \sin \varphi$ .

Punkty  $O_l$  i  $C_l$  leżą w płaszczyźnie oddalonej od płaszczyzny przekroju A-A o wielkość  $\frac{2b}{\cos \varphi}$ , a punkty  $J_l$  i  $K_l$  leżą w płaszczyźnie oddalonej od płaszczyzny przekroju A-A o wielkość  $\frac{2b}{\cos \varphi} - e \cdot \sin \varphi$ . Punkty S i T leżą w płaszczyźnie symetrii poprzecznej bistożka.

$$\sin v = \frac{e \cdot \cos \varphi}{R_d} \quad (5)$$

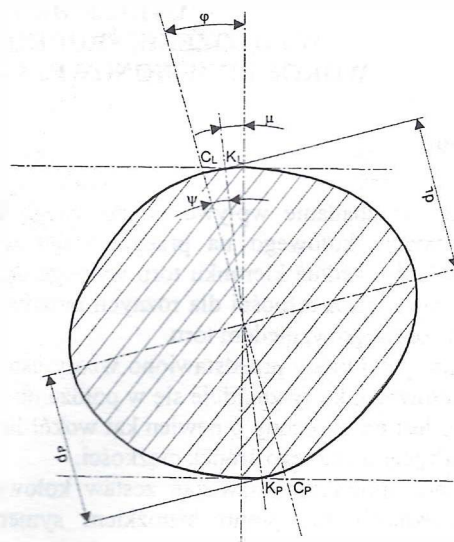
Punkty  $O_p, J_p, C_p$  i  $K_p$  leżą w płaszczyźnie przekroju B-B, natomiast punkty  $O_l, J_l, C_l$  i  $K_l$  w płaszczyźnie oddalonej od płaszczyzny przekroju B-B o wielkość  $2b$ .

Punkty S i T leżą w płaszczyźnie symetrii podłużnej toru.



Rys.3. Przekrój B-B z rysunku 1

Przekrój D-D z rys.3 wygląda następująco:



Rys.4. Przekrój D-D z rysunku 3

$$d_L = d_p = d = \frac{b}{\cos \varphi} - e \cdot \sin \varphi \quad (6)$$

W przekrojach C-C i B-B stożek jest elipsą. Półosie tej elipsy wyznaczmy w następujący sposób:

$$\overline{O_L F} = \overline{O_L B} = R_O = R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi} \cdot \operatorname{tg} \delta_0$$

(patrz wzór 2)

Z rysunku 1 wynikają zależności:

$$\text{Kąt } AO_L G = \delta_0 + \varphi$$

$$\text{Kąt } EO_L H = \delta_0 - \varphi$$

$$\overline{O_L A} = \overline{O_L B} \cdot \cos \delta_0 = \left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \cos \delta_0 \quad (7)$$

$$\overline{O_L G} = \frac{\overline{O_L A}}{\cos(\delta_0 + \varphi)} = \frac{\left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \cos \delta_0}{\cos(\delta_0 + \varphi)} \quad (8)$$

$$\overline{O_L E} = \overline{O_L F} \cdot \cos \delta_0 = \overline{O_L A} = \left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \cos \delta_0 \quad (\text{patrz 7})$$

$$\overline{O_L H} = \frac{\overline{O_L E}}{\cos(\delta_0 - \varphi)} = \frac{\left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \cos \delta_0}{\cos(\delta_0 - \varphi)} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \overline{GH} = \overline{O_L G} + \overline{O_L H} = & \frac{\left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \cos \delta_0}{\cos(\delta_0 + \varphi)} + \\ & + \frac{\left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \cos \delta_0}{\cos(\delta_0 - \varphi)} \end{aligned}$$

co po przekształceniach daje

$$\overline{GH} = 2 \cdot \left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \frac{\cos^2 \delta_0 \cdot \cos \varphi}{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos(\delta_0 - \varphi)} \quad (10)$$

Duża półoś elipsy wynosi

$$a_{el} = \frac{\overline{GH}}{2} = \left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \frac{\cos^2 \delta_0 \cdot \cos \varphi}{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos(\delta_0 - \varphi)} \quad (11)$$

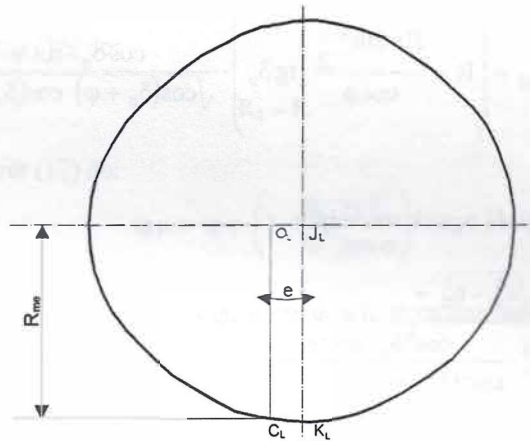
Odcinek e wynosi

$$\begin{aligned} e = \overline{O_L J_L} = \overline{O_L G} - a_{el} = & \frac{\left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \cos \delta_0}{\cos(\delta_0 + \varphi)} - \\ & - \left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \frac{\cos^2 \delta_0 \cdot \cos \varphi}{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos(\delta_0 - \varphi)} \end{aligned}$$

co po przekształceniach daje

$$e = \left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \frac{\sin \delta_0 \cdot \cos \delta_0 \cdot \sin \varphi}{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos(\delta_0 - \varphi)} \quad (12)$$

Małą półoś elipsy wyznaczmy następująco:



Rys.5. Przekrój bistożka dokonany płaszczyzną odchyloną od prostopadłej do jego osi podłużnej o kąt  $\varphi$

Przekrój C-C z rys.1, gdzie:

$$R_{me} = \overline{O_L C_L} = \overline{O_L F} = R_0$$

Zatem

$$R_{me} = R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi}$$

(patrz wzór 2)

Dla  $y = e$  jest  $z = R_e = R_0$ .

Z równania elipsy mamy:

$$\frac{e^2}{a_{el}^2} + \frac{R_0^2}{b_{el}^2} = 1$$

Stąd

$$e^2 \cdot b_{el}^2 + R_0^2 \cdot a_{el}^2 = a_{el}^2 \cdot b_{el}^2$$

co daje

$$b_{el}^2 = R_0^2 \cdot \frac{a_{el}^2}{a_{el}^2 - e^2}$$

Podstawiając tu (11) oraz (12), a także (2), otrzymamy

$$b_{el}^2 = R_0^2 \cdot \frac{R_0^2 \cdot \frac{\cos^4 \delta_0 \cdot \cos^2 \varphi}{\cos^2(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos^2(\delta_0 - \varphi)}}{R_0^2 \cdot \frac{\cos^4 \delta_0 \cdot \cos^2 \varphi}{\cos^2(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos^2(\delta_0 - \varphi)} - R_0^2 \cdot \frac{\sin^2 \delta_0 \cdot \cos^2 \delta_0 \cdot \sin^2 \varphi}{\cos^2(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos^2(\delta_0 - \varphi)}}$$

co po uproszczeniu daje

$$b_{el} = R_{OL} \frac{\cos \delta_0 \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos(\delta_0 - \varphi)}}$$

Podstawiając tu (2), otrzymamy

$$b_{el} = \left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \frac{\cos \delta_0 \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos(\delta_0 - \varphi)}} \quad (13)$$

Odległość ogniskowa elipsy

$$c_{el} = \sqrt{a_{el}^2 - b_{el}^2} = \sqrt{R_0^2 \cdot \frac{\cos^4 \delta_0 \cdot \cos^2 \varphi}{\cos^2(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos^2(\delta_0 - \varphi)} - R_0^2 \cdot \frac{\cos^2 \delta_0 \cdot \cos^2 \varphi}{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos(\delta_0 - \varphi)}}$$

co po przekształceniach daje

$$c_{el} = \left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \frac{\cos \delta_0 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos(\delta_0 - \varphi)} \quad (14)$$

Mimośród liczbowy elipsy

$$\varepsilon_{el} = \frac{c_{el}}{a_{el}} = \frac{\left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \frac{\cos \delta_0 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos(\delta_0 - \varphi)}}{\left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \frac{\cos^2 \delta_0 \cdot \cos \varphi}{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos(\delta_0 - \varphi)}}$$

Stąd

$$\varepsilon_{el} = \frac{\sin \varphi}{\cos \delta_0} \quad (15)$$

Po podstawieniu (12) do (3), otrzymamy

$$R_d = R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} + \left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \frac{\sin \delta_0 \cdot \cos \delta_0 \cdot \sin \varphi}{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos(\delta_0 - \varphi)} \cdot \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta_0,$$

co daje

$$R_d = \left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \left[ 1 + \frac{\sin^2 \delta_0 \cdot \sin^2 \varphi}{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos(\delta_0 - \varphi)} \right] \quad (16)$$

Podstawiając (12) do (4) otrzymamy

$$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg} \varphi - \frac{R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi}}{b} \cdot \frac{\sin \delta_0 \cdot \cos \delta_0 \cdot \sin \varphi}{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos(\delta_0 - \varphi)} \quad (17)$$

Podstawiając (12) i (16) do (5), otrzymamy

$$\sin \nu = \frac{\left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \frac{\sin \delta_0 \cdot \cos \delta_0 \cdot \sin \varphi}{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos(\delta_0 - \varphi)} \cdot \cos \varphi}{\left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \left[ 1 + \frac{\sin^2 \delta_0 \cdot \sin^2 \varphi}{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos(\delta_0 - \varphi)} \right]}$$

co daje

$$\sin \nu = \frac{\sin \delta_0 \cdot \cos \delta_0 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \sin(\delta_0 - \varphi)} \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos(\delta_0 - \varphi) + \sin^2 \delta_0 \cdot \sin^2 \varphi}$$

Po przekształceniu otrzymamy

$$\sin \nu = \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad (18)$$

Podstawiając (12) do (16) otrzymamy

$$d = \frac{b}{\cos \varphi} - \left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \cdot \frac{\sin \delta_0 \cdot \cos \delta_0 \cdot \sin \varphi}{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos(\delta_0 - \varphi)} \cdot \sin \varphi$$

co daje

$$d = \frac{b}{\cos \varphi} - \left( R - \frac{2b \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \right) \cdot \frac{\sin \delta_0 \cdot \cos \delta_0 \cdot \sin^2 \varphi}{\cos(\delta_0 + \varphi) \cdot \cos(\delta_0 - \varphi)} \quad (19)$$

### 3. Uproszczenie wzorów

W przypadku, gdy kąt  $\varphi$  ma małą wartość, wzory przedstawione w rozdziale 2 można sprowadzić do prostszej postaci.

Wzór (11) można przekształcić następująco:

$$a_{el} = R \cdot \left( 1 - \frac{2b}{R} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \right) \cdot \frac{\cos^2 \delta_0 \cdot \cos \varphi}{\cos^2 \delta_0 \cdot \cos^2 \varphi - \sin^2 \delta_0 \cdot \sin^2 \varphi}$$

i dalej

$$a_{el} = R \cdot \left( 1 - \frac{2b}{R} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \right) \cdot \frac{1}{\cos \varphi \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 \delta_0 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi)}$$

Wielkość  $2b$  nigdy nie jest większa niż 1,676 m (taka jest ona tylko na kolejach Hiszpanii, Portugalii, Brazylii, Argentyny, Chile i Urugwaju). Promień koła  $R$  nigdy nie będzie mniejszy niż 0,3 m (taki jest on dla maksymalnie zużytego koła tramwajowego). Stożkowatość  $\operatorname{tg} \delta_0$  bieżni koła nigdy nie będzie większa niż 0,1 (taka jest ona na zewnętrznej części bieżni dawnego konturu koła kolejowego).

Gdyby kąt  $\varphi$  wynosił nawet  $10^\circ$  (co jest nieprawdopodobne), czyli gdyby było  $\operatorname{tg} \varphi = 0,17632$ ,  $\sin \frac{\varphi}{2} = 0,087488$  oraz  $\cos \varphi = 0,9848$ , to i tak wartość liczbową wyrażenia

$$\frac{2b}{R} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi} \cdot \operatorname{tg} \delta_0$$

nie byłaby nigdy większa niż 0,004342, a wartość liczbową wyrażenia  $\operatorname{tg}^2 \delta_0 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi$  nie byłaby nigdy większa niż 0,00054576. Można więc przyjąć, że wyrażenia te są pomijalnie małe w zestawieniu z 1, a zatem wzór (11) przyjmie postać

$$a_{el} = \frac{R}{\cos \varphi} \quad (20)$$

Postępując analogicznie z wzorami (12÷19), tzn. przekształcając je i odrzucając pomijalnie małe wartości, można je znacznie uprościć i doprowadzić do następującej postaci:

– wzór (12) do:

$$e = \frac{R}{\cos \varphi} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad (21)$$

Wobec małej wartości kąta  $\varphi$  można przyjąć  $\cos \varphi \approx 1$ , oraz  $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$ , wobec czego mamy

$$e = (R \cdot \operatorname{tg} \delta_0) \cdot \varphi$$

– wzór (13) do:

$$b_{el} = R \quad (22)$$

– wzór (14) do:

$$c_{el} = R \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \delta_0}, \quad (23)$$

a mimośród liczbowy elipsy wyniesie

$$\varepsilon_{el} = \frac{c_{el}}{a_{el}} = \frac{R \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\cos \delta_0 \cdot \cos \varphi}$$

czyli

$$\varepsilon_{el} = \frac{\sin \varphi}{\cos \delta_0} \quad (24)$$

– wzór (16) do:

$$R_d = R \quad (25)$$

– wzór (17) do:

$$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg} \varphi \cdot \left( 1 - \frac{R}{b} \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{\cos \varphi} \right) \quad (26)$$

Ponieważ  $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi \approx \varphi$ , a  $\cos \varphi \approx 1$ , to można zapisać

$$\mu = \left( 1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \right) \cdot \varphi \quad (27)$$

Istnieje zależność geometryczna (patrz rys.1 oraz 4)  $\psi = \varphi - \mu$ , zatem:

$$\psi = \varphi - \left( 1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \right) \cdot \varphi$$

czyli

$$\psi = \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \varphi \quad (28)$$

– wzór (19) do:

$$d = \frac{b}{\cos \varphi} \quad (29)$$

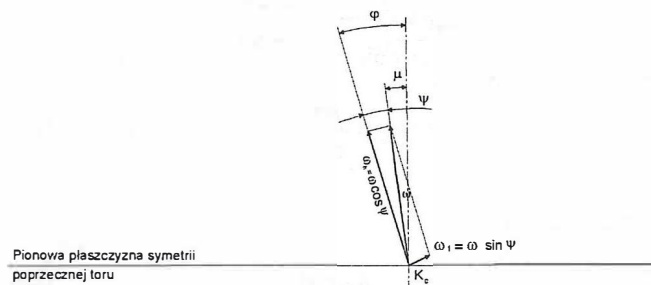
Odległość pomiędzy punktami styku mierzona wzdłuż osi symetrii bistożka wynosi

$$2d = \frac{2b}{\cos \varphi}$$

#### 4. Właściwości kinematyczne zestawu kołowego w rozpatrywanym położeniu

##### 4.1. Rozkład chwilowej prędkości kątowej zestawu kołowego

Z rysunku 4 wynika, że chwilową osią obrotu zestawu kołowego względem toru nie jest prosta  $C_L C_P$  będąca rzutem osi zestawu kołowego na płaszczyźnie główek szyn, lecz jest nią prosta  $K_L K_P$ . Niech zestaw kołowy toczy się w rozpatrywanym położeniu z prędkością kątową  $\omega$ , której wektor jest skierowany wzdłuż prostej  $K_L K_P$ . W punkcie, w którym prosta  $K_L K_P$  przecina pionową płaszczyznę symetrii poprzecznej toru można tę prędkość kątową rozłożyć na dwie składowe, jak na rysunku 6.



Rys.6. Rozkład prędkości kątowej  $\omega$  na składowe

Prędkość  $\omega_n = \omega \cdot \cos \Psi \approx \omega$  jest prędkością kątową zestawu kołowego obracającego się wokół prostej równoległej do osi zestawu kołowego, usytuowanej na poziomie główek szyn. W jej wyniku powstaje prędkość liniowa geometrycznego środka zestawu kołowego równa:

$$v_n = R \cdot \omega_n$$

czyli

$$v_n = R \cdot \omega \cdot \cos \psi \approx R \cdot \omega \quad (30)$$

Składowa tej prędkości liniowej w kierunku wzdłuż toru wynosi

$$v_{nII} = v_n \cdot \cos \varphi$$

czyli

$$v_{nII} = R \cdot \omega \cdot \cos \psi \cdot \cos \varphi \approx R \cdot \omega \quad (31)$$

Składowa tej prędkości liniowej w kierunku prostopadłym do kierunku toru wynosi

$$v_{nI} = v_n \cdot \sin \varphi$$

czyli

$$v_{nI} = R \cdot \omega \cdot \cos \psi \cdot \sin \varphi \approx R \cdot \omega \cdot \sin \varphi \quad (32)$$

Z kolei prędkość kątową  $\omega_t = \omega \cdot \sin \Psi$  jest prędkością obracania się zestawu kołowego wokół prostej prostopadłej do kierunku osi zestawu kołowego, leżącej w płaszczyźnie

główek szyn oraz w pionowej płaszczyźnie symetrii podłużnej zestawu kołowego. Prosta ta jest odchylona od kierunku toru o kąt  $\varphi$  (patrz rys.1 i 4).

Chwilowa prędkość kątowa zestawu kołowego wokół tej prostej wynosi (rys.6):

$$\omega_t = \omega \cdot \sin \psi \quad (33)$$

W wyniku tej prędkości kątowej powstaje prędkość liniowa geometrycznego środka zestawu kołowego, równa

$$v_t = R \cdot \omega_t$$

czyli

$$v_t = R \cdot \omega \cdot \sin \psi \quad (34)$$

Składowa tej prędkości liniowej w kierunku wzdłuż toru wyniesie

$$v_{tII} = v_t \cdot \sin \varphi$$

czyli

$$v_{tII} = R \cdot \omega \cdot \sin \psi \cdot \sin \varphi \quad (35)$$

Składowa prędkości liniowej  $v_t$  w kierunku prostopadłym do kierunku toru wyniesie

$$v_{tI} = v_t \cdot \cos \varphi$$

czyli

$$v_{tI} = R \cdot \omega \cdot \sin \psi \cdot \cos \varphi \quad (36)$$

Sumaryczna prędkość liniowa geometrycznego środka zestawu kołowego w kierunku wzdłuż toru wyniesie

$$v_{II} = v_{nII} + v_{tII}$$

czyli podstawiając tu (31) oraz (35)

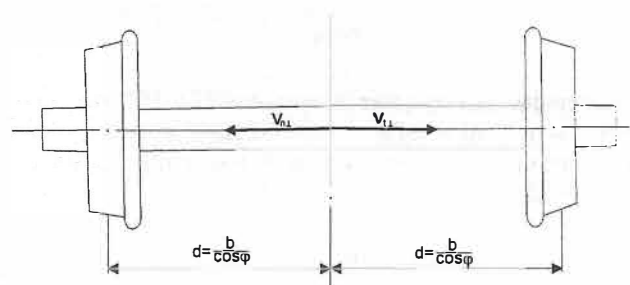
$$v_{II} = R \cdot \omega \cdot \cos \psi \cdot \cos \varphi + R \cdot \omega \cdot \sin \psi \cdot \sin \varphi$$

czyli

$$v_{II} = R \cdot \omega \cdot \cos(\varphi - \psi) \approx R \cdot \omega \quad (37)$$

Sumaryczna prędkość liniowa geometrycznego środka zestawu kołowego w kierunku prostopadłym do toru wyniesie

$$v_I = v_{nI} - v_{tI}$$



Rys.7. Prędkość zestawu kołowego w poprzek toru

czyli (patrz wzory 32 i 36)

$$v_I = R \cdot \omega \cdot \cos \psi \cdot \sin \varphi - R \cdot \omega \cdot \sin \psi \cdot \cos \varphi$$

czyli

$$v_I = R \cdot \omega \cdot \sin(\varphi - \psi) \quad (38)$$

#### 4.2. Prędkość liniowa bieguna kołysania zestawu kołowego mierzona w poprzek toru

Prędkość liniowa bieguna kołysania zestawu kołowego mierzona wzdłuż kierunku toru, wynikająca z prędkości kątowej  $v_n = \omega \cdot \cos \psi$ , wynosi (patrz wzór 30)

$$v_{nIbP} = v_n \cdot \cos \varphi = R \cdot \omega \cdot \cos \psi \cdot \cos \varphi$$

Prędkość liniowa bieguna kołysania zestawu kołowego mierzona prostopadłe do kierunku toru, wynikająca z prędkości kątowej  $\omega_n = \omega \cdot \cos \psi$ , wynosi (patrz wzór 30):

$$v_{nIbP} = v_n \cdot \sin \varphi = R \cdot \omega \cdot \cos \psi \cdot \sin \varphi$$

Prędkość liniowa bieguna kołysania zestawu kołowego wynikająca z prędkości kątowej  $\omega_t = \omega \cdot \sin \psi$ , wynosi:

$$v_{tbp} = z_s \cdot \omega_t$$

czyli

$$v_{tbp} = z_s \cdot \omega \cdot \sin \psi \quad (39)$$

Składowa tej prędkości liniowej mierzona w kierunku wzdłuż toru wyniesie

$$v_{tIbP} = v_{tbp} \cdot \sin \varphi$$

czyli

$$v_{tIbP} = z_s \cdot \omega \cdot \sin \psi \cdot \sin \varphi \quad (40)$$

Składowa tej prędkości liniowej mierzona w kierunku prostopadłym do toru wyniesie

$$v_{tIbP} = v_{tbp} \cdot \cos \varphi$$

czyli

$$v_{tIbP} = z_s \cdot \omega \cdot \sin \psi \cdot \cos \varphi \quad (41)$$

Sumaryczna prędkość liniowa bieguna kołysania mierzona wzdłuż toru wyniesie

$$v_{IbP} = v_{nIbP} + v_{tIbP}$$

Podstawiając tu (31) i (40) otrzymamy

$$v_{IbP} = R \cdot \omega \cdot \cos \psi \cdot \cos \varphi + z_s \cdot \omega \cdot \sin \psi \cdot \sin \varphi$$

czyli

$$v_{IbP} = \omega \cdot (R \cdot \cos \psi \cdot \cos \varphi + z_s \cdot \sin \psi \cdot \sin \varphi) \approx \omega \cdot R$$

Sumaryczna prędkość liniowa bieguna kołysania mierzona prostopadłe do kierunku toru wyniesie (patrz rys.7)

$$v_{IbP} = v_{tIbP} - v_{nIbP}$$

Podstawiając tu (41) oraz (32) otrzymamy

$$v_{IbP} = z_s \cdot \omega \cdot \sin \psi \cdot \cos \varphi - R \cdot \omega \cdot \cos \psi \cdot \sin \varphi$$

czyli

$$v_{IbP} = \omega \cdot (z_s \cdot \sin \psi \cdot \cos \varphi - R \cdot \cos \psi \cdot \sin \varphi)$$

Dla małych kątów  $\varphi$  oraz  $\psi$  można przyjąć, że  $\sin \psi \approx \psi$ ,  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \psi \approx 1$ , oraz  $\cos \varphi \approx 1$ . Wówczas równanie powyższe przyjmie postać:

$$v_{IbP} = \omega \cdot (z_s \cdot \psi - R \cdot \varphi)$$

Podstawiając tu zależność (28) i odpowiednio przekształcając, otrzymamy

$$v_{IbP} = \omega \cdot R \cdot \varphi \cdot \left( b \cdot \operatorname{ctg} \delta_o \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta_o}{b} - 1 \right)$$

czyli

$$v_{IbP} = 0 \quad (42)$$

#### 5. Uogólnienie uzyskanych wyników na przypadek zestawu kołowego o wklęsłych bieżniach poruszającego się po torze o wypukłych główkach szyn

Z wzoru (29) wynika, że przy małej wartości kąta  $\varphi$ , wielkość  $d$  praktycznie jest równa wartości  $b$ . Wobec tego przyrost odległości pomiędzy punktami styku na kołach jest pomijalnie mały. Zatem odchylenie zestawu kołowego o pewien kąt od prostopadłej do podłużnej osi symetrii toru nie ma innego wpływu na kołysanie się zestawu kołowego i na wężykowanie niż tylko poprzez fakt wtaczania się zestawu kołowego w takie położenie, w którym wystąpią różnice promieni toczenia obu kół w wyniku odsunięcia się środka geometrycznego zestawu kołowego od podłużnej płaszczyzny symetrii toru. To zagadnienie zostało już wcześniej rozpatrzone przez autorów [2, 3, 4].

Nie ma więc potrzeby analizy wpływu tego odchylenia o kąt  $\varphi$  na kołysanie się zestawu kołowego o wklęsłych bieżniach kół na torze o wypukłych główkach szyn, gdyż będzie to wpływ pomijalnie mały.

#### Literatura:

- [1] Gąsowski W., Lang R.: Kołysanie poprzeczne zestawu kołowego podczas wężykowania w torze. Część I.

Mechanika wężykowania zestawu kołowego. Pojazdy Szynowe, nr 2/1999

- [2] Gąsowski W., Lang R.: Kołysanie poprzeczne zestawu kołowego podczas wężykowania w torze. Część II. Obliczenie krzywizn konturów bieżni koła i główki szyny kolejowej oraz wyznaczenie rzeczywistego położenia kręgów tocznych zestawu kołowego na torze. Pojazdy Szynowe, nr 3/1999
- [3] Gąsowski W., Lang R.: Kołysanie poprzeczne zestawu kołowego podczas torze. Część III. Obliczenia kinematyczne zestawu kołowego przesuniętego prostopadle do

osi podłużnej toru. Zestaw kołowy o stożkowych bieżniach kół poruszających się po torze krawędziowym. Pojazdy Szynowe nr 4/1999

- [4] Gąsowski W., Lang R.: Kołysanie poprzeczne zestawu kołowego podczas wężykowania w torze. Część IV. Obliczenia kinematyczne zestawu kołowego przesuniętego prostopadle do osi podłużnej toru. Zestaw kołowy o wklęsłych bieżniach kół poruszających się po torze o wypukłych główkach szyn. Pojazdy Szynowe, nr 1/2000.