

Kołysanie poprzeczne zestawu kołowego podczas wężykowania w torze (2)

W pracy przedstawiono, w analityczny sposób, zależności opisujące kształt bieżni koła wagonu i główki szyny kolejowej. Określono charakterystyczne punkty styku koła z torem francuskim oraz z torem niemieckim, który jest identyczny z torem polskim. Zaakcentowano różnicę w zachowaniu się UIC-owskiego znormalizowanego zestawu kołowego na torze francuskim i niemieckim oraz wskazano ich prawdopodobną przyczynę.

Część II

OBLICZENIE KRZYWIZN KONTURÓW BIEŻNI KOŁA I GŁÓWKI SZYNY KOLEJOWEJ ORAZ WYZNACZENIE RZECZYWISTEGO POŁOŻENIA KRĘGÓW TOCZNYCH ZESTAWU KOŁOWEGO NA TORZE

1. Wstęp

Rozważania zawarte w niniejszej pracy obejmują przyjęcie zastępczej krzywizny wklęsłego konturu bieżni koła kolejowego, obliczenie krzywizny wypukłego konturu główki szyny kolejowej, oraz wyznaczenie rzeczywistego położenia płaszczyzn kręgów tocznych zestawu kołowego znajdującego się w środkowym położeniu na torze.

Szczegółowe rozważania, wyrażające się określeniem współrzędnych, odcinków łuków, promieni profilu itp. główek szyn i profiliów kół, były niezbędne m.in. do dokładnej analizy zachowania się pojazdów na różnych torach.

Otrzymane wyniki posłużą jako dane wyjściowe do analizy kołysania zestawu kołowego występującego nieodłącznie podczas wężykowania tego zestawu w torze prostym.

Artykuł jest kontynuacją pracy przedstawionej w [1], wykonywanej w ramach projektu badawczego KBN nr 9T 12C 02116 pt. Nowa koncepcja skrajni kinematycznej pojazdów szynowych.

2. Kształt bieżni kolejowego koła wagonowego

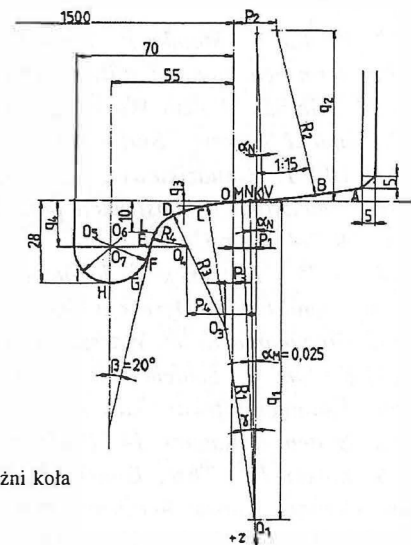
2.1. Kształt bieżni koła (rys. 1)

Przyjmijmy początek układu współrzędnych w punkcie 0. Zatem współrzędne punktu 0 wynoszą: $y_0 = 0$ $z_0 = 0$

2.1.1. Łuk podstawowej wklęsłości bieżni koła (łuk MC na rys.1)

Na świecie są stosowane dwa rodzaje szyn. Jedną z nich, to tzw. szyna S49, której jeden metr długości ma masę 49 kg, a druga to UICowska standardowa szyna UIC 60, której jeden metr długości ma masę 60 kg. W Polsce oba te rodzaje szyn są przedmiotem normy PN-84/H-93421 [2].

Bieżnia obu tych szyn jest wypukła, a promień jej wypukłości w okolicy osi symetrii szyny wynosi $R_{sz1} = 300$ mm. Półszerokość wypukłości na szynie S49 wynosi 9,5 mm, a

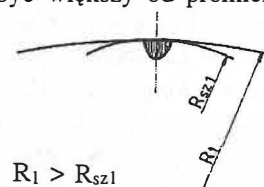


Rys. 1. Kształt bieżni koła

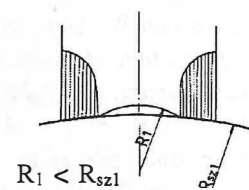
na szynie UIC 60 ma wartość 10,5 mm. Po tej wypukłości toczy się koło zestawu kołowego wtedy gdy nie wężykuje, a tor jest prosty. Aby plamka styku była eliptyczna, promień wklęsłości bieżni koła R_1 musi być większy od promienia wypukłości główki szyny R_{sz1} (rys.2).

W przeciwnym razie plamka styku miałaby kształt siodłowaty (rys.3)

Wobec nieprzerwanego występowania poślizgu wiertnego w pobliżu punktu styku, siodłowata plamka styku działałaby jak frez palcowy powodując szybkie zużywanie się koła i szyny. Dlatego promień wklęsłości bieżni koła musi być większy od promienia wypukłości główki szyny.



Rys. 2. Eliptyczna plamka styku



Rys. 3. Styk siodłowaty

2.1.2. Równanie łuku głównej wklęsłości konturu bieżni koła (łuk CN na rys. 1)

Zastąpmy kontur bieżni koła w okolicy punktu 0 łukiem okręgu. Równanie tego okręgu będzie miało postać:

$$(y - p_1)^2 + (z - q_1)^2 = R_1^2 \quad (1)$$

albo

$$z = q_1 + \sqrt{R_1^2 - (y - p_1)^2}, \quad (2)$$

przy czym dla $y > 0$ tylko ujemny pierwiastek równania (2) będzie miał sens fizyczny, a dla $y < 0$ tylko dodatni pierwiastek równania (2) będzie miał sens (rys. 1).

Współczynnik kierunkowy stycznej do krzywej (1) wyrazi się wzorem

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{R_1^2 - (y - p_1)^2}} \cdot [-2 \cdot (y - p_1)]$$

czyli

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y - p_1}{\sqrt{R_1^2 - (y - p_1)^2}} \quad (3)$$

Można to przedstawić jak niżej

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y - p_1}{\sqrt{R_1^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{y - p_1}{R_1}\right)^2\right]}}$$

Wartość wyrażenia $y - p_1$ jest rzędu 10 mm, a R_1 około 300 mm. Zatem

$$\left(\frac{y - p_1}{R_1}\right)^2 \text{ ma wartość ok. } 0,0001$$

W zestawieniu z 1 jest to pomijalnie małe, a zatem wzór (3) dla małych wartości y przyjmie postać

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y - p_1}{\sqrt{R_1^2}}$$

co daje

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_1 = -\frac{y - p_1}{R_1}$$

albo

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{y - p_1}{R_1}$$

W przyjętym układzie współrzędnych tylko ujemna wartość $\frac{dz}{dy}$ ma sens fizyczny. Zatem gdy $y < p_1$ tylko drugi z tych pierwiastków ma zastosowanie. Wobec tego

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y - p_1}{R_1} \quad (4)$$

Według [3] współczynnik kierunkowy stycznej do konturu bieżni wyraża się następującymi liczbami:

– w okolicy punktu 0 (0,0) mamy

$$m_0 = \frac{-0,016 - 0,017}{1} = -0,033$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 1$ mamy

$$m_1 = \frac{-0,047 - (-0,016)}{1} = -0,031$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 2$ mamy

$$m_2 = \frac{-0,075 - (-0,047)}{1} = -0,028$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 3$ mamy

$$m_3 = \frac{-0,100 - (-0,075)}{1} = -0,025$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 4$ mamy

$$m_4 = \frac{-0,122 - (-0,100)}{1} = -0,022$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 5$ mamy

$$m_5 = \frac{-0,142 - (-0,122)}{1} = -0,020$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 6$ mamy

$$m_6 = \frac{-0,160 - (-0,142)}{1} = -0,018$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 7$ mamy

$$m_7 = \frac{-0,176 - (-0,160)}{1} = -0,016$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 8$ mamy

$$m_8 = \frac{-0,190 - (-0,176)}{1} = -0,014$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 9$ mamy

$$m_9 = \frac{-0,203 - (-0,190)}{1} = -0,013$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 10$ mamy

$$m_{10} = \frac{-0,214 - (-0,203)}{1} = -0,011$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 11$ mamy

$$m_{11} = \frac{-0,224 - (-0,214)}{1} = -0,010$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 12$ mamy

$$m_{12} = \frac{-0,234 - (-0,224)}{1} = -0,010$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 13$ mamy

$$m_{13} = \frac{-0,242 - (-0,234)}{1} = -0,008$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 14$ mamy

$$m_{14} = \frac{-0,251 - (-0,242)}{1} = -0,009$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 15$ mamy

$$m_{15} = \frac{-0,260 - (-0,251)}{1} = -0,009$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 16$ mamy

$$m_{16} = \frac{-0,269 - (-0,260)}{1} = -0,009$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 17$ mamy

$$m_{17} = \frac{-0,280 - (-0,269)}{1} = -0,011$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 18$ mamy

$$m_{18} = \frac{-0,291 - (-0,280)}{1} = -0,011$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 19$ mamy

$$m_{19} = \frac{-0,304 - (-0,291)}{1} = -0,013$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = 20$ mamy

$$m_{20} = \frac{-0,320 - (-0,304)}{1} = -0,016$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = -1$ mamy

$$m_{(-1)} = \frac{0,017 - 0,054}{1} = -0,037$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = -2$ mamy

$$m_{(-2)} = \frac{0,054 - 0,094}{1} = -0,040$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = -3$ mamy

$$m_{(-3)} = \frac{0,094 - 0,138}{1} = -0,044$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = -4$ mamy

$$m_{(-4)} = \frac{0,138 - 0,185}{1} = -0,047$$

– w okolicy punktu o odciętej $y = -5$ mamy

$$m_{(-5)} = \frac{0,185 - 0,237}{1} = -0,052$$

Z powyższych danych widać, że na odcinku od $y = 1$ do $y = 4$ kolejne przyrosty wartości m są stałe, a zatem na tym odcinku występuje liniowa zależność m w funkcji y . Jeśliby nieregularną wartość $m_0 = 0,033$ występującą dla $y = 0$ zastąpić wartością $0,034$, to mielibyśmy liniową zależność m od y w przedziale od $y = -2$ do $y = 4$. Odrzucmy z tego przedziału dwie skrajne wartości $y = -2$ oraz $y = 4$ i rozpatrzmy dwie następujące wartości: $y = -1$ oraz $y = 3$ bliskie krańców rozpatrywanego przedziału. Dla $y = -1$ mamy

$$m_{(-1)} = \frac{-1 - p_1}{R_1}$$

czyli

$$-0,037 = \frac{-1 - p_1}{R_1}$$

Dla $y = 3$ mamy

$$-0,025 = \frac{3 - p_1}{R_1}$$

Stąd po przekształceniach otrzymujemy

$$0,037 R_1 = 1 + p_1$$

$$-0,025 R_1 = 3 - p_1$$

Dodając te równania stronami, otrzymujemy

$$0,012 R_1 = 4$$

Stąd mamy

$$R_1 = \frac{4}{0,012} = 333,33333 \text{ mm}$$

Przyjmijmy wartość z szeregu liczb normalnych Renarda

$$R_1 = 330 \text{ mm}$$

co jest większe od $R_{1sz} = 300 \text{ mm}$.

Podstawiając to do drugiego z równań, otrzymujemy

$$-0,025 = \frac{3 - p_1}{330}$$

czyli

$$-8,25 = 3 - p_1$$

Stąd wynika

$$p_1 = 11,25 \text{ mm}$$

Dla punktu 0 (0,0) równanie (1) przyjmie postać

$$(0 - p_1)^2 + (0 - q_1)^2 = R_1^2$$

skąd otrzymujemy

$$q_1 = \sqrt{R_1^2 - p_1^2}$$

Liczbowo wynosi to

$$(q_1)_1 = \sqrt{330^2 - 11,25^2} = 329,808 \text{ mm}$$

$$(q_1)_2 = -329,808$$

Tylko dodatnia wartość q_1 ma sens fizyczny. Zatem $q = 329,808 \text{ mm}$.

Równanie (1) przyjmie ostateczną postać

$$(y - 11,25)^2 + (z - 329,808)^2 = 330^2 \quad (5)$$

Współczynnik kierunkowy stycznej do krzywej (5) przyjmie poniższą postać otrzymaną z różniczkowania tej funkcji

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y - 11,25}{\sqrt{330^2 - (y - 11,25)^2}} \quad (6)$$

2.1.3. Promień krzywizny głównej wklęsłości konturu bieżni koła

$$R_1 = 330 \text{ mm}$$

2.1.4. Współrzędne środka okręgu o promieniu R_1

$$p_1 = 11,25 \text{ mm}$$

$$q_1 = 329,808 \text{ mm}$$

2.1.5. Współrzędne krańców przedziału $-1 \leq y \leq 4$

Dla $y = -1$ mamy z równania (2)

$$\begin{aligned} z &= 329,808 + \sqrt{330^2 - (-1 - 11,25)^2} = \\ &= 0,035445805 \approx 0,035 \text{ mm} \end{aligned}$$

Dla $y = 4$ mamy

$$\begin{aligned} z &= 329,808 + \sqrt{330^2 - (4 - 11,25)^2} = \\ &= -0,112350236 \approx -0,112 \text{ mm} \end{aligned}$$

Wartość ta różni się zaledwie o 0,001 mm od wartości (-0,111) podanej w [3]. Przy zgrubnym charakterze obróbki mechanicznej stosowanej na bieżni koła, taka różnica wymiarów jest mniejsza od śladów obróbki, a więc jest pomijalna.

Współczynnik kierunkowy stycznej do krzywej (5) w punktach $y = -1$ oraz $y = 4$ obliczymy z wzoru (4)

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=-1} = \frac{-1 - 11,25}{330} = -0,037121212 \approx -0,0371$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=4} = \frac{4 - 11,25}{330} = -0,021969696 \approx -0,0220$$

2.1.6. Punkt, w którym współczynnik kierunkowy stycznej wynosi $-1/40 = -0,025$

Z równania (4) mamy

$$-0,025 = \frac{y - 11,25}{330}$$

Stąd mamy

$$y_M = 11,25 - 0,025 \cdot 330 = 3 \text{ mm}$$

$$z_M = 329,808 + \sqrt{330^2 - (3 - 11,25)^2} =$$

$$= -0,088858882 \approx -0,089 \text{ mm}$$

2.1.7. Punkt, w którym współczynnik kierunkowy stycznej wynosi $-1/20 = -0,05$

Z równania (4) mamy

$$-0,05 = \frac{y - 11,25}{330}$$

Stąd mamy

$$y_{M1} = 11,25 - 16,5 = -5,25 \text{ mm}$$

$$z_{M1} = 329,808 + \sqrt{330^2 - (-5,25 - 11,25)^2} =$$

$$= 0,220758135 \approx 0,221 \text{ mm}$$

2.1.8. Prawy koniec dziedziny funkcji (1)

Dziedzinę funkcji (1) można rozszerzyć poza w/w przedział $-1 \leq y \leq 4$, a niedokładność wynikająca z tego rozszerzenia będzie nieznaczna.

Na odcinku od $y = 11$ do $y = 18$ (pomijając nieregularną wartość $m_{13} = 0,008$) można przyjąć, że współczynnik kierunkowy stycznej do konturu bieżni jest niemal stały i wynosi $m_{pr} \approx 0,01$.

Wobec tego prawy koniec dziedziny funkcji (1) wyznaczymy jak niżej:

$$y_N = p_1 - R_1 \cdot m_{pr}$$

Liczbowo wynosi to $y_N = 11,25 - 330 \cdot 0,01 = 7,95 \text{ mm}$

$$z_N = 329,808 + \sqrt{330^2 - (7,95 - 11,25)^2} =$$

$$= -0,175499587 \approx -0,175 \text{ mm}$$

Wartość ta różni się od wartości $(-0,183 \text{ mm})$ podanej w [3] zaledwie o $0,008 \text{ mm}$. Przy klasie dokładności obróbki mechanicznej stosowanej na bieżni koła różnica ta jest pomijalnie mała.

Można zatem przyjąć, że punkt N $(7,95; -0,175)$ jest prawym krańcem dziedziny funkcji (1).

Kąt nachylenia stycznej w tym punkcie wynosi $\alpha_N = 0,01$.

2.1.9. Równanie prostego odcinka NV (rys.1)

Współczynnik kierunkowy tej prostej wynosi $m_{pr} = 0,01$. Równaniem prostej NV będzie

$$\frac{z - z_N}{y - y_N} = -m_{pr}$$

czyli

$$\frac{z + 0,175}{y - 7,95} = -0,01$$

co można przekształcić do postaci

$$z = -0,01y - 0,0955$$

co można zaokrąglić do postaci

$$z = -0,01y - 0,096$$

(7)

2.1.10. Współrzędne punktu K (rys.1)

$$y_K = p_1 = 11,25 \text{ mm}$$

Z równania (10) mamy

$$z_K = -0,01y_K - 0,096$$

czyli

$$z_K = -0,01 \cdot 11,25 - 0,096 = -0,2085 \approx -0,209 \text{ mm}$$

2.1.11. Współrzędne punktu V (rys.1)

$$y_V = 18 \text{ mm} \quad (\text{patrz punkt 1.1.7})$$

Z równania (7) mamy

$$z_V = -0,01 \cdot 18 - 0,096 = -0,276 \text{ mm}$$

Wartość ta różni się od wartości $(-0,285 \text{ mm})$ podanej w [3] zaledwie o $0,009 \text{ mm}$, co jest pomijalne przy zgrubnym charakterze obróbki mechanicznej bieżni koła.

2.1.12. Równanie łuku VB (rys.1)

Równanie to będzie miało postać

$$(y - p_2)^2 + (z - q_2)^2 = R_2^2 \quad (8)$$

czyli

$$z = q_2 + \sqrt{R_2^2 - (y - p_2)^2} \quad (9)$$

Współczynnik kierunkowy stycznej do równania (8) wyrazi się wzorem

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y - p_2}{\sqrt{R_2^2 - (y - p_2)^2}} \quad (10)$$

czyli

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{y - p_2}{R_2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y - p_2}{R_2} \right)^2}}$$

$y - p_2$ będzie rzędu 15 mm, a R_2 rzędu 300 mm. Zatem drugie wyrażenie pod pierwiastkiem będzie pomijalnie małe w zestawieniu z 1. Wobec tego

$$\frac{dz}{dy} = \pm \frac{y - p_2}{R_2}$$

Jedynie ujemna wartość dz/dy ma sens fizyczny, zatem dla $y - p_2 > 0$ wzór (10) przyjmie postać

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{y - p_2}{R_2} \quad (11)$$

W punkcie V mamy $dz/dy = -0,01$. Zatem

$$-0,01 = - \frac{y_v - p_2}{R_2}$$

czyli

$$-0,01 \cdot R_2 = -18 + p_2 \quad (12)$$

W punkcie o odciętej $y = 24$ mm mamy według [2] $dz/dy = -0,028$.
Zatem

$$-0,028 = - \frac{24 - p_2}{R_2}$$

czyli

$$-0,028 R_2 - 24 + p_2 \quad (13)$$

Odejmując równanie (13) od (12), otrzymamy

$$0,018 R_2 = 6$$

skąd mamy

$$R_2 = \frac{6}{0,018} = 333,333 \text{ mm}$$

Przyjmujemy wartość z szeregu liczb normalnych Renarda

$$R_2 = 330 \text{ mm}$$

Podstawiając to do (12) otrzymamy

$$-0,01 \cdot 330 = -18 + p_2$$

skąd mamy

$$p_2 = 14,7 \text{ mm}$$

Równanie (9) przyjmie postać

$$z = q_2 + \sqrt{330^2 - (y - 14,7)^2}$$

Z tego równania w punkcie V otrzymamy

$$z_v = q_2 + \sqrt{330^2 - (y_v - 14,7)^2}$$

czyli

$$-0,276 = q_2 + \sqrt{330^2 - (18 - 14,7)^2}$$

skąd otrzymujemy

$$(q_2)_1 = -330,2594996 \approx -330,259 \text{ mm}$$

$$(q_2)_2 = 329,7074996 \approx 329,707 \text{ mm}$$

Sens fizyczny ma tylko wartość ujemna. Zatem

$$q_z = (q_2)_1 = -330,259 \text{ mm}$$

Równanie (8) przyjmie postać

$$(y - 14,7)^2 + (z + 330,259)^2 = 330^2 \quad (14)$$

albo

$$z = -330,259 + \sqrt{330^2 - (y - 14,7)^2} \quad (15)$$

2.1.13. Promień R_2

$$R_2 = 330 \text{ mm}$$

2.1.14. Współrzędne środka okręgu o promieniu R_2

$$p_2 = 14,7 \text{ mm}$$

$$q_2 = -330,259 \text{ mm}$$

2.1.15. Współrzędne punktu V (rys.1)

$$y_v = 18 \text{ mm}$$

Z równania (15) mamy

$$\begin{aligned} z_v &= -330,259 + \sqrt{330^2 - (18 - 14,7)^2} = \\ &= -0,275500413 \approx -0,276 \text{ mm} \end{aligned}$$

Są to takie same wartości co otrzymane w punkcie 2.1.11.

Współczynnik kierunkowy stycznej w tym punkcie wynosi

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_v = \frac{y_v - 13,2}{R_2} = \frac{18 - 14,7}{330} = -0,01$$

2.1.16. Współrzędne punktu B (rys.1)

$$y_B = 32,158 \text{ mm} \quad [3]$$

Z równania (15) mamy

$$z_B = -330,259 + \sqrt{330^2 - (32,158 - 14,7)^2} = -0,721114111 \approx -0,721 \text{ mm}$$

Wartość ta różni się od wartości (-0,780) podanej w [3] zaledwie o 0,059 mm, co jest pomijalne.

Współczynnik kierunkowy stycznej w tym punkcie wynosi

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_B = -\frac{y_B - p_2}{R_2} = -\frac{32,158 - 14,7}{330} = -0,05290303 \approx -0,0529$$

Zobaczmy, kiedy współczynnik kierunkowy stycznej osiągnie wartość -0,066666

$$-0,066666 = -\frac{y_{Bkor} - p_2}{R_2}$$

czyli

$$-0,066666 = -\frac{y_{Bkor} - 14,7}{330}$$

Stąd otrzymujemy

$$y_{Bkor} = 36,69999978 \approx 36,700 \text{ mm}$$

Z równania (15) mamy

$$z_{Bkor} = -330,259 + \sqrt{330^2 - (36,7 - 14,7)^2} = -0,993149964 \text{ albo } -659,52485$$

Jedynie wartość -0,993149964 ma sens (patrz rys.1).
Zatem $z_{Bkor} = -0,993 \text{ mm}$.

Ostatecznie współrzędne punktu B wyniosą

$$y_B = 36,700 \text{ mm}, \\ z_B = -0,993 \text{ mm},$$

co różni się od wartości (-1,085 otrzymane w drodze interpolacji) podanej w [3] zaledwie o 0,092 mm, co jest pomijalne, szczególnie wobec faktu, że punkt B wchodzi we

współpracę z szyną jedynie w zwrotnicach i krzyżownicach angielskich toru.

2.1.17. Równanie odcinka prostego AB (rys.1)

Współczynnik kierunkowy tej prostej wynosi

$$m_{AB} = -0,0666666 \approx -0,0667$$

Równanie szukanej prostej przyjmie postać

$$\frac{z - z_B}{y - y_B} = m_{AB}$$

Stąd

$$z - z_B = m_{AB} \cdot (y - y_B)$$

$$z = m_{AB} \cdot y - m_{AB} \cdot y_B + z_B$$

czyli

$$z = -0,0667y + 0,0667 \cdot 36,700 - 0,993$$

co daje

$$z = -0,0667y + 1,45489$$

Można zaokrąglić to do postaci

$$z = -0,0667y + 1,455 \quad (16)$$

2.1.18. Współrzędne punktu A (rys.1)

Według [3] mamy: $y_A = 60 \text{ mm}$

$$z_A = -0,0667 \cdot 60 + 1,455 = -2,547 \text{ mm}$$

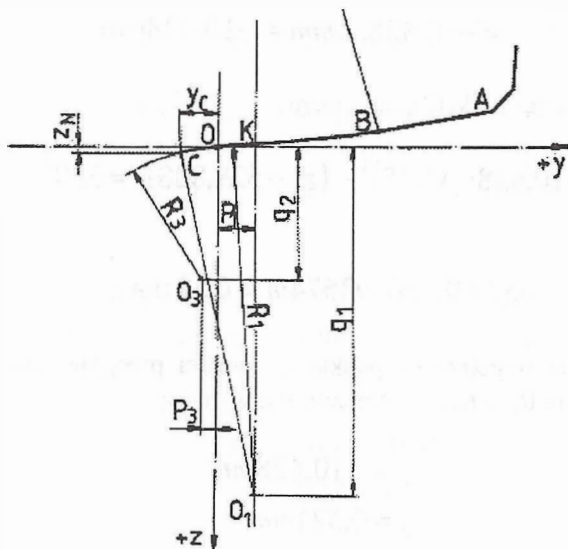
2.1.19. Promień zaokrąglenia przejściowego bieżni koła

Gdy zestaw kołowy jedzie po torze prostym i nie wężykuję, to zaokrąglenie przejściowe bieżni koła nie styka się w ogóle z zaokrągleniem przejściowym główki szyny. Jednak na łukach toru, a także podczas wężykowania, koło nabiegające na główkę szyny będzie się stykało swym zaokrągleniem przejściowym z zaokrągleniem przejściowym główki szyny. Aby plamka styku była eliptyczna, a nie siodłowata, musi promień zaokrąglenia przejściowego wklęsłości bieżni koła R_3 musi być większy od promienia zaokrąglenia przejściowego wypukłości główki szyny R_{3sz} . Ten ostatni według [2] wynosi $R_{3sz} = 80 \text{ mm}$.

Przyjmujemy do obliczeń $R_3 = 90 \text{ mm}$.

2.1.20. Współrzędne środka okręgu o promieniu zaokrąglenia przejściowego bieżni koła

Przejście łuku o promieniu $R_1 = 330$ w łuk zaokrąglenia przejściowego o promieniu $R_3 = 90$ jest przedstawione na rys.4.



Rys.4. Przebieg łuku $R_1 = 330$ w łuk $R_3 = 90$

Dotychczas wyznaczone są następujące wartości:

$$\overline{O_1 C} = R_1 = 330 \text{ mm}$$

$$\overline{O_3 C} = R_3 = 90 \text{ mm}$$

$$p_1 = 11,25 \text{ mm}$$

$$q_1 = 329,808 \text{ mm}$$

Odcinek $\overline{O_1 O_3}$ ma długość

$$R_{o_{103}} = \overline{O_1 C} - \overline{O_3 C} = R_1 - R_3 = 330 - 90 = 240 \text{ mm}$$

Równanie okręgu o promieniu $R_{o_{103}}$ będzie miało postać

$$(y - p_1)^2 + (z - q_1)^2 = 240^2$$

czyli

$$(y - 11,25)^2 + (z - 329,808)^2 = 240^2 \quad (17)$$

Przebieg łuku o promieniu $R_3 = 90$ w łuk o promieniu $R_4 = 13$ wygląda jak na rys.5

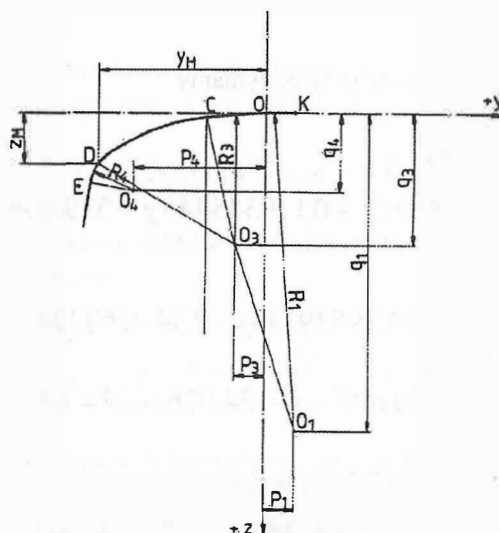
Dotychczas wyznaczone są następujące wartości:

$$\overline{O_3 D} = R_3 = 90 \text{ mm}$$

$$\overline{O_4 D} = R_4 = 13 \text{ mm}$$

$$p_4 = -26,211 \text{ mm} \quad [3]$$

$$q_4 = 16,446 \text{ mm} \quad [3]$$



Rys.5. Przebieg łuku $R_3 = 90$ w łuk $R_4 = 13$

Odcinek $\overline{O_3 O_4}$ ma długość

$$R_{o_{304}} = \overline{O_3 D} - \overline{O_4 D} = 90 - 13 = 77 \text{ mm}$$

Równanie okręgu o promieniu $R_{o_{304}}$ będzie miało postać:

$$(y - p_3)^2 + (z - q_3)^2 = R_{o_{304}}^2$$

czyli

$$(y + 26,211)^2 + (z - 16,446)^2 = 77^2 \quad (18)$$

Rozwiązując układ równań (17) i (18) znajdziemy współrzędne punktu O_3 .

$$(y - 11,25)^2 + (z - 329,808)^2 = 240^2$$

$$(y + 26,211)^2 + (z - 16,446)^2 = 77^2$$

czyli

$$y^2 - 22,5y + 126,5625 + z^2 - 659,6162 + 108773,3169 = 57600$$

$$y^2 + 52,422y + 687,016521 + z^2 - 32,892z + 270,470916 = 5929$$

Odejmując stronami pierwsze równanie od drugiego, otrzymujemy

$$74,922y + 560,454521 + 626,724z - 108502,846 = -51671$$

skąd otrzymujemy z funkcji y

$$z = 89,78655912 - 0,119545445y \quad (19)$$

Podstawiając to do (17), otrzymamy

$$(y - 11,25)^2 + (89,78655912 - 0,119545445y - 329,808)^2 = 240^2 \quad \text{Stąd}$$

czyli

$$y^2 + 34,39539149y + 134,9263424 = 0$$

$$\Delta = 34,39539149^2 - 4 \cdot 134,9263424 = 643,3375864$$

$$\sqrt{\Delta} = 25,36410035$$

$$y_1 = \frac{-34,39539149 - 25,36410035}{2} =$$

$$= -29,87974592 \text{ mm}$$

$$y_2 = \frac{-34,39539149 + 25,36410035}{2} =$$

$$= -4,51564557 \text{ mm}$$

Sens geometryczny ma tylko wartość y_2 . Zatem

$$y_{03} = y_2 = -4,51564557 \text{ mm}$$

Podstawiając to do (19), otrzymamy

$$z_{03} = 89,78655912 - 0,119545445 \cdot$$

$$(-4,51564557) = 89,78655912 + 0,539824859 =$$

$$= 90,32638398 \text{ mm}$$

Zaokrąglimy te wartości do $y_{03} = -4,516 \text{ mm}$, a z_2 do $90,326 \text{ mm}$. Zatem $p_3 = -4,516 \text{ mm}$: $q_3 = 90,326 \text{ mm}$

2.1.21. Współrzędne punktu C (rys.1)

Z rysunku 4 wynika zależność

$$\frac{p_1 + |y_c|}{p_1 + |p_3|} = \frac{R_1}{R_1 - R_3}$$

czyli

$$\frac{11,25 + |y_c|}{11,25 + |-4,516|} = \frac{330}{330 - 90}$$

Stąd mamy

$$|y_c| = 10,42825$$

Tylko ujemna wartość y_c ma sens fizyczny. Zatem

$$y_c = -10,42825 \text{ mm} \approx -10,428 \text{ mm}$$

Podstawiając to do (7), otrzymamy

$$(-10,428 - 11,25)^2 + (z_c - 329,808)^2 = 330^2$$

$$z_c = 0,520793574 \text{ m} \approx 0,521 \text{ mm}$$

Zatem współrzędne punktu C (punktu przejścia łuku o promieniu R_1 w łuk o promieniu R_3) wyniosą:

$$y_c = -10,428 \text{ mm}$$

$$z_c = 0,521 \text{ mm}$$

Wartość ta różni się od wartości podanej w [3] (0,553 uzyskane w drodze interpolacji) zaledwie o 0,032 mm, co jest pomijalnie małe.

2.1.22. Lewy kraniec dziedziny funkcji (1)

Punkt C na rys.1 jest lewym krańcem dziedziny funkcji (1)

$$y_c = -10,428 \text{ mm};$$

$$z_c = 0,521 \text{ mm}$$

Niezgodność kształtu konturu bieżni koła wynikająca z rozszerzenia dziedziny funkcji (1) na przedział CN na rys.1 nie przekracza nigdzie 0,032 mm, a więc jest pomijalnie mała.

2.1.23. Współrzędne punktu D (rys.1)

Z rysunku 5 wynika następującą zależność

$$\frac{|y_D| - |p_3|}{|p_4| - |p_3|} = \frac{R_3}{R_3 - R_4}$$

czyli

$$\frac{|y| - |-4,516|}{|-26,211| - |-4,516|} = \frac{90}{90 - 13}$$

Stąd

$$|y_D| = 29,87379221$$

i wreszcie (tylko ujemna wartość y_D ma sens fizyczny)

$$y_D = -29,87379221 \text{ mm} \approx -29,874 \text{ mm}$$

Równanie łuku pachwiny konturu bieżni koła będzie:

$$(y + 26,211)^2 + (z - 16,446)^2 = 13^2 \quad (20)$$

W punkcie D równanie to przyjmie postać

$$(-29,874 + 26,211)^2 + (z_D - 16,446)^2 = 169$$

Stąd

$$z_D = 3,97273134\text{mm} \approx 3,973\text{mm}$$

Zatem współrzędne punktu D (punktu przejścia łuku o promieniu R_3 w łuk o promieniu R_4) wyniosą:

$$y_D = -29,874\text{mm}$$

$$z_D = 3,973\text{mm}$$

2.1.24. Równanie łuku zaokrąglenia przejściowego bieżni koła

Równanie łuku zaokrąglenia przejściowego bieżni koła ma postać

$$(y - p_3)^2 + (z - q_3)^2 = R_3^2$$

czyli

$$(y + 4,516)^2 + (z - 90,326)^2 = 90^2 \quad (21)$$

albo

$$z = 90,326 + \sqrt{90^2 - (y + 4,516)^2} \quad (22)$$

Współczynnik kierunkowy stycznej do krzywej (21) wyrazi się wzorem

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y + 4,516}{\sqrt{90^2 - (y + 4,516)^2}} \quad (23)$$

2.1.25. Równanie łuku pachwiny konturu bieżni koła

Równanie to wyraża się wzorem (21)

$$(y + 26,211)^2 + (z - 16,446)^2 = 13^2$$

albo

$$z = 16,446 + \sqrt{13^2 - (y + 26,211)^2} \quad (24)$$

Współczynnik kierunkowy stycznej do krzywej (24) wyrazi się wzorem

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y + 26,211}{\sqrt{13^2 - (y + 26,211)^2}} \quad (25)$$

2.1.26. Współrzędne punkty kontrolnego L na obrzeżu koła

Po podstawieniu do wzoru (20) wartości $z_L = 10\text{ mm}$ (rys.1) wg [3] otrzymamy wartość odciętej

$$y_L = -37,50033497\text{mm} \approx -37,5\text{mm}$$

2.1.27. Rozstaw punktów kontrolnych na zestawie kołowym

$$L_L = 2 \cdot \left(\frac{1500}{2} - |y_L| \right) = 2 \cdot \left(\frac{1500}{2} - |-37,5| \right) = 1425\text{mm}$$

2.1.28. Współczynnik kierunkowy prostej EF

$$m_{EF} = -\tan(90^\circ - 20^\circ) = -\tan 70^\circ = -2,747477419 \approx -2,7475$$

2.1.29. Współrzędne punktu E (rys.1)

$$y_E = -|p_4| - R_4 \cdot \cos 20^\circ = -|-26,211| - 13 \cdot 0,93969262 = -38,42700407 \approx -38,427\text{mm}$$

$$z_E = q_4 - R_4 \cdot \sin 20^\circ = 16,446 - 13 \cdot 0,342020143 = 11,99973814 \approx 12\text{mm}$$

2.1.30. Równanie prostej EF (rys.1)

Ma ono postać

$$z - z_E = m_{EF} \cdot (y - y_E)$$

czyli

$$z - 12 = -2,747477419 \cdot (y + 38,427)$$

czyli

$$z = -2,747477419y - 93,57731478$$

co można zaokrąglić do postaci

$$z = -2,7475y - 93,577 \quad (26)$$

2.1.31. Współrzędne punktu F (rys.1)

Punkt F leży na prostej o równaniu (26). Zatem

$$z_F = -2,7475y_F - 93,577$$

Według [3] mamy

$$y_F = -39,764\text{mm}$$

Zatem

$$z_F = -2,7475 \cdot (-39,764) - 93,577$$

czyli

$$z_F = 15,67457 \text{ mm} \approx 15,675 \text{ mm}$$

2.1.32. Zestawienie funkcji matematycznych opisujących bieżnię koła określoną w [3]

Fragment AB konturu bieżni koła jest odcinkiem prostej o równaniu (16)

$$z = -0,0667y - 1,455$$

Rozciąga się on od punktu A o współrzędnych $y_A = 60$ mm oraz $z_A = -2,547$ mm do punktu B o współrzędnych $y_B = 36,700$ mm oraz $z_B = -0,993$ mm.

Fragment BV konturu bieżni koła jest łukiem okręgu o równaniu (14)

$$(y - 14,7)^2 + (z + 320,259)^2 = 330^2$$

co można przekształcić do postaci

$$z = -320,259 + \sqrt{108900 - (y - 14,7)^2} \quad (27)$$

Ten łuk okręgu rozciąga się od punktu B o współrzędnych $y_B = 36,700$ mm oraz $z_B = -0,993$ mm do punktu V o współrzędnych $y_V = 18$ mm oraz $z_V = -0,276$ mm.

Fragment VN konturu bieżni koła jest prostą o równaniu (7)

$$z = 0,01y - 0,096$$

Znajduje się on pomiędzy punktem V o współrzędnych $y_V = 18$ mm oraz $z_V = -0,276$ mm i punktem N o współrzędnych $y_N = 7,95$ mm, oraz $z_N = -0,175$ mm.

Fragment NC jest łukiem okręgu o równaniu (5)

$$(y - 11,25)^2 + (z - 329,808)^2 = 330^2,$$

które można przekształcić do postaci

$$z = 329,808 + \sqrt{330^2 - (y - 11,25)^2} \quad (28)$$

Ten łuk okręgu rozciąga się od początku punktu N o współrzędnych $y_N = 7,95$ mm oraz $z_N = -0,175$ mm do punktu C o współrzędnych $y_C = -10,428$ mm oraz $z_C = 0,521$ mm. Na łuku tym jest między innymi usytuowany punkt 0 o współrzędnych $y_0 = 0$ oraz $z_0 = 0$.

Fragment CD konturu bieżni koła jest łukiem okręgu o równaniu (21)

$$(y + 4,516)^2 + (z - 90,326)^2 = 90^2,$$

które można przekształcić do postaci (22)

$$z = 90,326 + \sqrt{90^2 - (y + 4,516)^2}$$

Ten łuk okręgu zawarty jest pomiędzy punktem C o współrzędnych $y_C = -10,428$ mm i $z_C = 0,521$ mm oraz punktem D o współrzędnych $y_D = -29,874$ mm oraz $z_D = 3,973$ mm.

Fragment DE konturu bieżni koła jest łukiem okręgu o równaniu (20)

$$(y + 26,211)^2 + (z - 16,446)^2 = 13^2$$

co można przekształcić do postaci (24)

$$z = 16,446 + \sqrt{169 - (y + 26,211)^2}$$

Ten łuk rozciąga się od punktu D o współrzędnych $y_D = -29,874$ mm oraz $z_D = 3,973$ mm do punktu E o współrzędnych $y_E = -38,427$ mm oraz $z_E = 12$ mm.

Na tym łuku jest usytuowany punkt kontrolny L o współrzędnych $y_L = -37,5$ mm oraz $z_L = 10$ mm.

Fragment EF konturu bieżni koła jest odcinkiem prostej o równaniu (26)

$$z = -2,7475y - 93,577$$

Odcinek tej prostej rozciąga się od punktu E o współrzędnych $y_E = -38,427$ mm oraz $z_E = 12$ mm do punktu F o współrzędnych $y_F = -39,764$ mm oraz $z_F = 15,675$ mm.

Pozostałe fragmenty konturu bieżni koła nigdy nie współpracują z szyną.

2.1.33. Współczynnik kierunkowy stycznej do konturu bieżni koła

Fragment AB konturu bieżni koła na całej swej długości jest prostą nachyloną do poziomu pod kątem, którego tangens obliczymy różniczkując równanie (13)

$$\frac{dz}{dy} = -0,0667$$

Współczynnik kierunkowy stycznej do fragmentu BV konturu bieżni koła wyraża się wzorem otrzymanym z różniczkowania wzoru (27)

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{108900 - (y - 14,7)^2}} \cdot [-2 \cdot (y - 14,7) \cdot 1]$$

czyli

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y - 14,7}{\sqrt{108900 - (y - 14,7)^2}} \quad (29)$$

Współczynnik kierunkowy prostej VN wynosi

$$m_{VN} = -0,01$$

Współczynnik kierunkowy stycznej do fragmentu NC konturu bieżni koła wyraża się wzorem otrzymanym z różniczkowania wzoru (28)

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{330^2 - (y - 11,25)^2}} \cdot [-2 \cdot (y - 11,25) \cdot 1]$$

czyli

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y - 11,25}{\sqrt{108900 - (y - 11,25)^2}} \quad (30)$$

W punkcie N będzie

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=y_N} = -\frac{y_N - 11,25}{\sqrt{108900 - (y_N - 11,25)^2}}$$

czyli

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=y_N} &= -\frac{7,95 - 11,25}{\sqrt{108900 - (7,95 - 11,25)^2}} = \\ &= 0,0100005 \approx 0,01 \end{aligned}$$

W punkcie O będzie

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=0} = \operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{y_0 - 11,25}{\sqrt{108900 - (y_0 - 11,25)^2}}$$

czyli

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=0} &= -\frac{0 - 11,25}{\sqrt{108900 - (0 - 11,25)^2}} = \\ &= 0,034110736 \approx 0,0341 \end{aligned}$$

W punkcie C współczynnik kierunkowy stycznej do bieżni koła wyniesie

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=y_c} &= -\frac{y_c - 11,25}{\sqrt{330^2 - (y_c - 11,25)^2}} = \\ &= -\frac{-10,428 - 11,25}{\sqrt{108900 - (-10,428 - 11,25)^2}} = \\ &= -0,0655833107 \approx -0,658 \end{aligned}$$

Współczynnik kierunkowy stycznej do fragmentu CD konturu bieżni koła wyraża się wzorem otrzymanym z różniczkowania wzoru (21)

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{90^2 - (y + 4,516)^2}} \cdot [-2 \cdot (y + 4,516) \cdot 1]$$

czyli

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y + 4,516}{\sqrt{8100 - (y + 4,516)^2}} \quad (31)$$

W punkcie C będzie

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=y_c} = -\frac{y_c + 4,516}{\sqrt{8100 - (y_c + 4,516)^2}}$$

czyli

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=y_c} &= -\frac{-10,428 + 4,516}{\sqrt{8100 - (-10,428 + 4,516)^2}} = \\ &= -0,066938353 \approx -0,0669 \end{aligned}$$

W punkcie D będzie

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=y_D} &= -\frac{-29,874 + 4,516}{\sqrt{8100 - (-29,874 + 4,516)^2}} = \\ &= -0,270491986 \approx -0,2705 \end{aligned}$$

Współczynnik kierunkowy stycznej do fragmentu DE bieżni koła wyraża się wzorem otrzymanym z różniczkowania wzoru (24)

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{169 - (y + 26,211)^2}} \cdot [-2 \cdot (y + 26,211) \cdot 1]$$

czyli

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y + 26,211}{\sqrt{169 - (y + 26,211)^2}} \quad (32)$$

W punkcie D będzie

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=y_D} = -\frac{y_D + 26,211}{\sqrt{169 - (y_D + 26,211)^2}}$$

czyli

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=y_D} &= -\frac{-29,874 + 26,211}{\sqrt{169 - (-29,874 + 26,211)^2}} = \\ &= -0,293668011 \approx -0,2937 \end{aligned}$$

W punkcie kontrolnym L wynosi to

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=y_L} = -\frac{y_L + 26,211}{\sqrt{169 - (y_L + 26,211)^2}}$$

czyli

$$\begin{aligned}\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=y_L} &= -\frac{-37,5 + 26,211}{\sqrt{169 - (-37,5 + 26,211)^2}} = \\ &= -1,75115928 \approx -1,7512\end{aligned}$$

W punkcie E wynosi to

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=y_E} = -\frac{y_E + 26,211}{\sqrt{169 - (y_E + 26,211)^2}}$$

czyli

$$\begin{aligned}\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=y_E} &= -\frac{-38,427 + 26,211}{\sqrt{169 - (-38,427 + 26,211)^2}} = \\ &= -2,747469594 \approx -2,7475\end{aligned}$$

I na koniec fragment EF bieżni koła na całej swej długości jest prostą nachyloną do poziomu pod kątem, którego tangens obliczymy różniczkując równanie (21)

$$\frac{dz}{dy} = -2,7475$$

2.1.34. Położenie punktu styku koła z szyną w stanie spoczynku na torze prostym, gdy zestaw kołowy zajmuje środkowe położenie w torze

Gdy zestaw kołowy będący w stanie spoczynku zajmuje środkowe położenie w torze, to można się spodziewać, że punkt styku koła z szyną znajdzie się we fragmencie NC bieżni koła. Ten fragment bieżni koła jest łukiem okręgu o równaniu (7)

$$(y - 11,25)^2 + ((z - 329,808)^2 = 330^2$$

Rozciąga się on od punktu N o współrzędnych $y_N = 7,95$ mm oraz $z_N = -0,175$ mm do punktu C o współrzędnych $y_C = -10,428$ mm oraz $z_C = 0,521$ mm. W tym fragmencie bieżni znajduje się punkt O o współrzędnych $y_0 = 0$ oraz $z_0 = 0$.

Współczynnik kierunkowy stycznej do konturu bieżni wyraża się wzorem (30)

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y - 11,25}{\sqrt{108900 - (y - 11,25)^2}}$$

W punkcie N będzie

$$\begin{aligned}\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=y_N} &= -\frac{y_N - 11,25}{\sqrt{108900 - (y_N - 11,25)^2}} = \\ &= -\frac{7,95 - 11,25}{\sqrt{108900 - (7,95 - 11,25)^2}} = \\ &= 0,0100005 \approx 0,01\end{aligned}$$

W punkcie O wynosi to

$$\begin{aligned}\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=0} &= -\frac{y_0 - 11,25}{\sqrt{108900 - (y_0 - 11,25)^2}} = \\ &= -\frac{0 - 11,25}{\sqrt{108900 - (0 - 11,25)^2}} = \\ &= 0,034110736 \approx 0,0341\end{aligned}$$

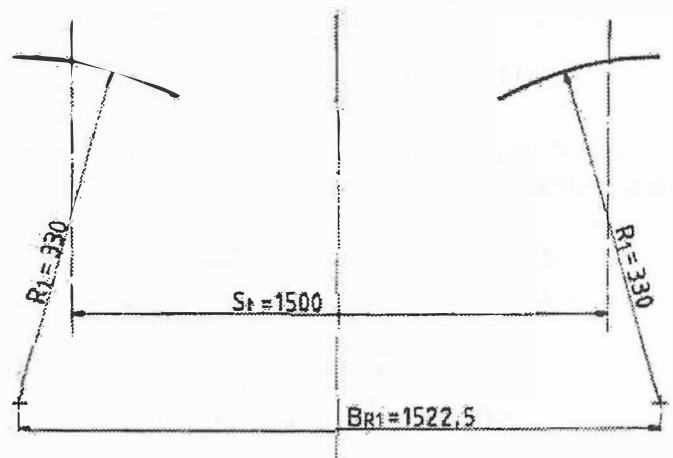
W punkcie C wynosi to

$$\begin{aligned}\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=y_C} &= -\frac{y_C - 11,25}{\sqrt{108900 - (y_C - 11,25)^2}} = \\ &= -\frac{-10,428 - 11,25}{\sqrt{108900 - (-10,428 - 11,25)^2}} = \\ &= -0,065833107 \approx -0,0658\end{aligned}$$

2.1.35. Rozstaw punktów O_1 na zestawie kołowym

$$B_{R1} = 1500 + 2 \cdot |p_1| = 1500 + 2 \cdot |11,25| = 1522,5 \text{ mm}$$

2.1.36. Układ krzywizn podstawowych wklęsłości bieżni kół zestawu kołowego

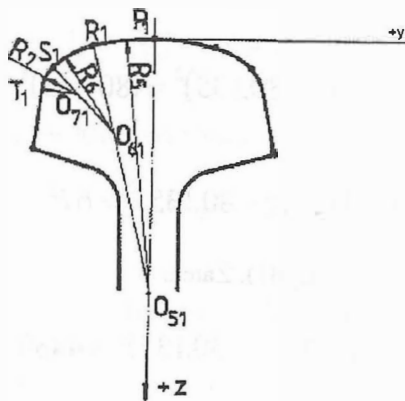


Rys. 6. Krzywizna podstawowa bieżni koła

3. Kształt główki szyny kolejowej

3.1. Układ współrzędnych

Rozpatrzmy główkę szyny UIC 60



Rys. 7. Kształt główki szyny kolejowej

Przyjmujemy początek układu współrzędnych w punkcie P_1 . Zatem współrzędne punktu P_1 wynoszą:

$$y_{P1} = 0$$

$$z_{P1} = 0$$

3.2. Równanie łuku P_1R_1

Równanie to ma postać

$$(y - p_{51})^2 + (z - q_{51})^2 = R_5^2$$

Według [2] mamy $R_5 = 300$ mm oraz $p_{51} = 0$.

Punkt P_1 leży na łuku P_1R_1 a więc spełnia jego równanie

$$(y_{P1} - p_{51})^2 + (z_{P1} - q_{51})^2 = R_5^2$$

czyli

$$(0 - 0)^2 + (0 - q_{51})^2 = R_5^2$$

czyli

$$q_{51}^2 = R_5^2$$

stąd

$$q_{51} = R_5 = 300$$

Zatem równanie (33) przyjmie postać

$$y^2 + (z - 300)^2 = 300^2 \quad (34)$$

3.3. Współrzędne punktu R_1

Według [2] mamy $y_{R1} = -10,5$ mm

Rzędną z_{R1} obliczymy z równania (34)

$$y_{R1}^2 + (z_{R1} - 300)^2 = 300^2$$

czyli

$$(-10,5)^2 + (z_{R1} - 300)^2 = 300^2$$

Stąd mamy

$$z_{R1} = 0,183806308 \approx 0,184 \text{ mm}$$

3.4. Promień zaokrąglenia przejściowego

Według [2] mamy $R_6 = 80$ mm.

3.5. Współrzędne punktu O_{61}

$$\frac{|y_{061}|}{|y_{R1}|} = \frac{R_5 - R_6}{R_5}$$

czyli

$$\frac{|y_{061}|}{|-10,5|} = \frac{300 - 80}{300}$$

$$|y_{061}| = 10,5 \cdot 0,733333 = 7,699999$$

(33) Tylko ujemna wartość ma sens fizyczny. Zatem

$$p_{61} = -y_{061} = -7,699999 \approx -7,7 \text{ mm}$$

Równanie okręgu o promieniu $O_{51}O_{61}$ i środka w punkcie O_{51}

$$y^2 + (z - q_{51})^2 = (R_5 - R_6)^2 \quad (35)$$

czyli

$$y^2 + (z - 300)^2 = (300 - 80)^2$$

czyli

$$y^2 + (z - 300)^2 = 220^2 \quad (36)$$

Punkt O_{61} spełnia równanie (35). Zatem

$$y_{061}^2 + (z_{061} - 300)^2 = 220^2$$

czyli

$$p_{61}^2 + (q_{61} - 300)^2 = 220^2$$

czyli

$$(-7,7)^2 + (q_{61} - 300)^2 = 48400$$

i ostatecznie

$$\begin{aligned} q_{61} &= 300 - 219,8652087 = \\ &= 80,13479129 \text{ mm} \approx 80,135 \text{ mm} \end{aligned}$$

3.6. Równanie łuku R_1S_1

$$(y - p_{61})^2 + (z - q_{61}^2) = R_6^2$$

czyli

$$(y + 7,7)^2 + (z - 80,135)^2 = 80^2$$

3.7. Współrzędne punktu S_1

Według [2] mamy $y_{S1} = -26 \text{ mm}$

Współrzedną z_{S1} obliczymy z równania (38)

$$(y_{S1} + 7,7)^2 + (z_{S1} - 80,135)^2 = 80^2$$

czyli

$$(-26 + 7,7)^2 + (z_{S1} - 80,135)^2 = 6400$$

Stąd otrzymujemy

$$z_{S1} - 80,135 = -77,87881612$$

i dalej

$$z_{S1} = 2,256183882 \approx 2,256 \text{ mm}$$

3.8. Promień zaokrąglenia krawędzi główki szyny

Według [2] mamy $R_7 = 13 \text{ mm}$

3.9. Współrzędne punktu 0_{71}

Z RYSUNKU 6 WYNIKA ZALEŻNOŚĆ

$$\frac{|p_{71}| - |p_{61}|}{|y_{S1}| - |p_{61}|} = \frac{R_6 - R_7}{R_6} \quad (39)$$

czyli

$$\frac{|p_{71}| - |-7,7|}{|-26| - |-7,7|} = \frac{80 - 13}{80}$$

Stąd otrzymujemy

$$|p_{71}| = 23,02625$$

czyli

$$p_{71} = -23,02625 \approx -23,026 \text{ mm}$$

Równanie okręgu o promieniu $0_{61}0_{71}$ i środku w punkcie 0_{61}

$$(y - p_{61})^2 + (z - q_{61})^2 = (R_6 - R_7)^2 \quad (40)$$

czyli

$$(y + 7,7)^2 + (z - 80,135)^2 = (80 - 13)^2$$

czyli

$$(y + 7,7)^2 + (z - 80,135)^2 = 67^2 \quad (41)$$

(37) Punkt 0_{71} spełnia równanie (41). Zatem

$$(y_{071} + 7,7)^2 + (z_{071} - 80,135)^2 = 4489$$

(38)

czyli

$$(p_{71} + 7,7)^2 + (q_{71} - 80,135)^2 = 4489$$

czyli

$$(-23,026 + 7,7)^2 + (q_{71} - 80,135)^2 = 4489$$

Stąd otrzymamy

$$q_{71} = 14,91143276 \approx 14,911 \text{ mm}$$

3.10. Równanie łuku S_1T_1

$$(y - p_{71})^2 + (z - q_{71})^2 = R_7^2 \quad (42)$$

czyli

$$(y + 23,026)^2 + (z - 14,911)^2 = 13^2 \quad (43)$$

3.11. Współrzędne punktu T_1

Promień $0_{71}T_1 = 13$ jest nachylony do poziomu pod kątem ε , którego tangens według [2] wynosi $1/20 = 0,05$. Zatem

$$z_{T1} = q_{71} - R_7 \cdot \tan \varepsilon$$

czyli

$$z_{T1} = 14,911 - 13 \cdot 0,05 = 14,261 \text{ mm} \approx 14,3 \text{ mm}$$

Odciętą y_{T1} znajdziemy z równania (43)

$$(y_{T1} + 23,026)^2 + (14,261 - 14,911)^2 = 13^2$$

Stąd mamy

$$y_{T1} = -36,00973983 \approx -36 \text{ mm}$$

3.12. Równanie boku główki szyny

Bok szyny jest odcinkiem linii prostej odchylonej od pionu pod kątem φ , którego tangens wynosi $1/20 = 0,05$.
Zatem współczynnik kierunkowy prostej T_1U_1 wynosi

$$m_{T_1} = -\operatorname{tg}(90 - \varphi) = -\operatorname{ctg} \varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = -\frac{1}{0,05} = -20$$

Szukane równanie ma postać

$$z - z_{T_1} = m_{T_1} \cdot (y - y_{T_1})$$

czyli

$$z - 14,261 = -20 \cdot (y + 36,009)$$

czyli

$$z = -20y - 705,919 \quad (44)$$

Pozostałe fragmenty profilu główki szyny nigdy nie wchodzi w współpracę z kołem, wobec czego nie będziemy ich tu rozpatrywać.

4. Szyna UIC 60 zabudowana w torze francuskim

4.1. Zasada budowy toru francuskiego

We Francji w torze kolejowym szyny są ustawione tak, że odległość pomiędzy punktami P1 obu szyn wynosi $S_t = 1500$ mm, przy czym osie symetrii szyn są odchylone od pionu pod kątem $\varphi_F = 1/20$

$$\operatorname{tg} \varphi_F = \frac{1}{20} = 0,05$$

Zatem

$$\sin \varphi_F = 0,049937616 \approx 0,0499$$

$$\cos \varphi_F = 0,998752338 \approx 0,9987$$

4.2. Współrzędne punktów charakterystycznych szyny po jej obrocie o kąt $\varphi_F = 1:20$

Punkt O_{S1} zajmie położenie O_{SF} o współrzędnych:

$$p_{SF} = R_s \cdot \sin \varphi_F = 300 \cdot 0,0499 = 14,97 \text{ mm}$$

$$q_{SF} = R_s \cdot \cos \varphi_F = 300 \cdot 0,9987 = 299,61 \text{ mm}$$

Punkt P_1 pozostaje w swoim położeniu.

Punkt R_1 zajmie położenie R_F o współrzędnych:

$$\begin{aligned} y_{RF} &= y_{R1} \cdot \cos \varphi_F + z_{R1} \cdot \sin \varphi_F = \\ &= -10,5 \cdot 0,9987 + 0,184 \cdot 0,0499 = \\ &= -10,4771684 \text{ mm} \approx -10,477 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{RF} &= z_{R1} \cdot \cos \varphi_F - y_{R1} \cdot \sin \varphi_F = \\ &= 0,184 \cdot 0,9987 - (-10,5) \cdot 0,0499 = \\ &= 0,7077108 \text{ mm} \approx 0,708 \text{ mm} \end{aligned}$$

Punkt O_{61} zajmie położenie O_{6F} o współrzędnych:

$$\begin{aligned} p_{6F} &= p_{61} \cdot \cos \varphi_F + q_{61} \cdot \sin \varphi_F = \\ &= -7,7 \cdot 0,9987 + 80,135 \cdot 0,0499 = \\ &= -3,6912535 \text{ mm} \approx -3,691 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{6F} &= q_{61} \cdot \cos \varphi_F - p_{61} \cdot \sin \varphi_F = \\ &= 80,135 \cdot 0,9987 - (-7,7) \cdot 0,0499 = \\ &= 80,4150545 \text{ mm} \approx 80,415 \text{ mm} \end{aligned}$$

Punkt S_1 zajmie położenie S_F o współrzędnych:

$$\begin{aligned} y_{SF} &= y_{S1} \cdot \cos \varphi_F + z_{S1} \cdot \sin \varphi_F = \\ &= -26 \cdot 0,9987 + 2,256 \cdot 0,0499 = \\ &= -25,8536256 \text{ mm} \approx -25,854 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{SF} &= z_{S1} \cdot \cos \varphi_F - y_{S1} \cdot \sin \varphi_F = \\ &= 2,256 \cdot 0,9987 - (-26) \cdot 0,0499 = \\ &= 3,5504672 \text{ mm} \approx 3,550 \text{ mm} \end{aligned}$$

Punkt O_{71} zajmie położenie O_{7F} o współrzędnych:

$$\begin{aligned} p_{7F} &= p_{71} \cdot \cos \varphi_F + q_{71} \cdot \sin \varphi_F = \\ &= (-23,026) \cdot 0,9987 + 14,911 \cdot 0,0499 = \\ &= -22,2520073 \text{ mm} \approx -22,252 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{7F} &= q_{71} \cdot \cos \varphi_F - p_{71} \cdot \sin \varphi_F = \\ &= 14,911 \cdot 0,9987 - (-23,026) \cdot 0,0499 = \\ &= 16,0406131 \text{ mm} \approx 16,041 \text{ mm} \end{aligned}$$

Punkt T_1 zajmie położenie T_F o współrzędnych:

$$\begin{aligned} y_{TF} &= y_{T1} \cdot \cos \varphi_F + z_{T1} \cdot \sin \varphi_F = \\ &= (-36) \cdot 0,9987 + 14,3 \cdot 0,0499 = \\ &= -35,23963 \text{ mm} \approx -35,240 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{TF} &= z_{T1} \cdot \cos \varphi_F - y_{T1} \cdot \sin \varphi_F = \\ &= 14,3 \cdot 0,9987 - (-36) \cdot 0,0499 = \\ &= 16,07781 \text{ mm} \approx 16,078 \text{ mm} \end{aligned}$$

Równanie łuku P_1R_F będzie miało postać:

$$(y - p_{SF})^2 + (z - q_{SF})^2 = R_s^2 \quad (45)$$

czyli

$$(y - 14,97)^2 + (z - 299,61)^2 = 300^2 \quad (46) \quad \text{Zatem}$$

Równanie łuku $R_F S_F$ będzie miało postać:

$$(y - p_{6F})^2 + (z - q_{6F})^2 = R_6^2 \quad (47)$$

czyli

$$(y + 3,691)^2 + (z - 80,415)^2 = 80^2 \quad (48)$$

Równanie łuku $S_F T_F$ będzie miało postać:

$$(y - p_{7F})^2 + (z - q_{7F})^2 = R_7^2 \quad (49)$$

czyli

$$(y + 22,252)^2 + (z - 16,041)^2 = 13^2 \quad (50)$$

Równanie boku główki szyny zabudowanej w torze francuskim (bok ten jest pionowy)

$$y = y_{TF}$$

czyli

$$y = -35,240$$

4.3. Współrzędne najwyższego położonego punktu główki szyny

Najwyższy położony punkt główki szyny UF miałby odcięta $y_{UF} = p_{5F} = 14,97$ mm. Jego rzędną z_{UF} znaleźlibyśmy z równania (46)

$$(y_{UF} - 14,97)^2 + (z_{UF} - 299,61)^2 = 300^2$$

czyli

$$(14,97 - 14,97)^2 + (z_{UF} - 299,61)^2 = 90000$$

Stąd otrzymalibyśmy

$$z_{UF} - 299,61 = -300$$

i wreszcie uzyskalibyśmy

$$z_{UF} = -0,39 \text{ mm}$$

Jednak odcięta $y_{UF} = 14,97$ mm leży już poza dziedziną funkcji (46), gdyż dziedzina tej funkcji jest zawarta w granicach:

$$y_{RF} \leq y \leq y_{RF\text{prawy}}$$

przy czym

$$\begin{aligned} y_{RF\text{prawy}} &= (-y_{R1}) \cdot 0,9987 + z_{RF} \cdot 0,0499 = \\ &= 10,5 \cdot 0,9987 + 0,184 \cdot 0,0499 = \\ &= 10,4955316 \approx 10,496 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$-10,477 \leq y \leq 10,496$$

Rzędne funkcji na powyższych krańcach dziedziny wynoszą:
Na lewym krańcu dziedziny jest to

$$z_{RF} = 0,708 \text{ mm}$$

na prawym końcu dziedziny funkcji jest to (z równania 46)

$$\begin{aligned} z_{RF\text{prawy}} &= 299,61 + \sqrt{300^2 - (y_{R\text{prawy}} - 14,97)^2} = \\ &= 299,61 + \sqrt{90000 - (10,496 - 14,97)^2} = \\ &= -0,356637018 \approx -0,357 \text{ mm} \end{aligned}$$

ZATEM NAJWYŻSZY PUNKT GŁÓWKI SZYNY ZABUDOWANEJ WE FRANCUSKIM TORZE LEŻY NA ŁUKU $R_6 = 80$ MM PO PRAWEJ STRONIE GŁÓWKI SZYNY. WSPÓŁRZĘDNE ŚRODKA TEGO ŁUKU WYNOSZĄ:

$$\begin{aligned} p_{8F} &= 7,7 \cdot \cos \varphi_F + 80,135 \cdot \sin \varphi_F = \\ &= 7,7 \cdot 0,9987 + 80,135 \cdot 0,0499 = \\ &= 11,6887265 \text{ mm} \approx 11,689 \text{ mm} \\ q_{8F} &= 80,135 \cdot \cos \varphi_F - 7,7 \cdot \sin \varphi_F = \\ &= 80,135 \cdot 0,9987 - 7,7 \cdot 0,0499 = \\ &= 79,6465945 \approx 79,647 \text{ mm} \end{aligned}$$

Równanie tego łuku ma postać:

$$(y - p_{8F})^2 + (z - q_{8F})^2 = R_6^2$$

czyli

$$(y - 11,689)^2 + (z - 79,647)^2 = 80^2 \quad (51)$$

Minimum funkcji (51) wystąpi dla $y = p_{8F} = 11,689$ mm.
Wtedy

$$(z - 79,647)^2 = 80^2$$

czyli

$$z_{\min} = -80 + 79,647 = -0,353 \text{ mm}$$

Zatem

$$z_{UF} = -0,353 \text{ mm}$$

4.3. Współrzędne punktu pomiarowego prześwitu toru V_F

Punkt pomiarowy prześwitu toru leży na poziomie niższym o 14 mm niż najwyższy punkt główki szyny zabudowanej w torze [1].

Zatem

$$z_{UF} = z_{UF} + 14 = -0,353 + 14 = 13,647 \text{ mm}$$

Odciętą tego punktu znajdziemy z równania (50)

$$(y_{VF} + 22,252)^2 + (z_{VF} - 16,041)^2 = 13^2$$

czyli

$$(y_{VF} + 22,252)^2 + (13,647 - 16,041)^2 = 13^2$$

Stąd otrzymujemy

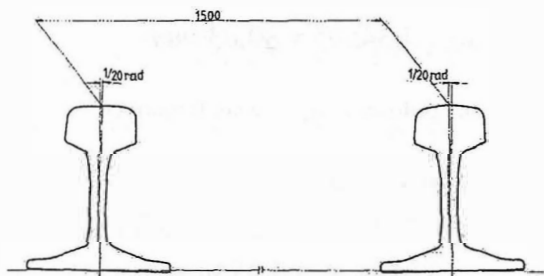
$$y_{VF} = -35,02966661 \text{ mm} \approx -25,030 \text{ mm}$$

co daje rozstaw punktów pomiarowych na obu szynach równy

$$B_F = 1500 - 2|y_{VF}| = 1500 - 2 \cdot |-35,030| = 1429,94 \text{ mm} \approx 1430 \text{ mm}$$

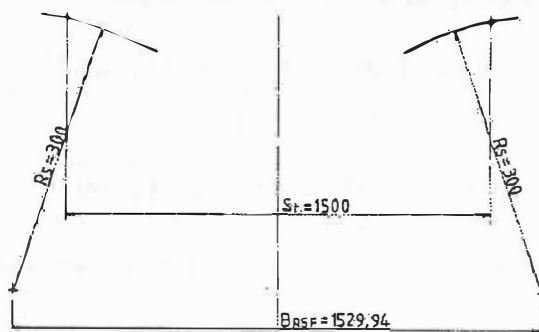
4.5. Rysunek szyny UIC 60 zabudowanej w torze francuskim

Szyna UIC 60 zabudowana w torze francuskim jest przedstawiona na rys.8.



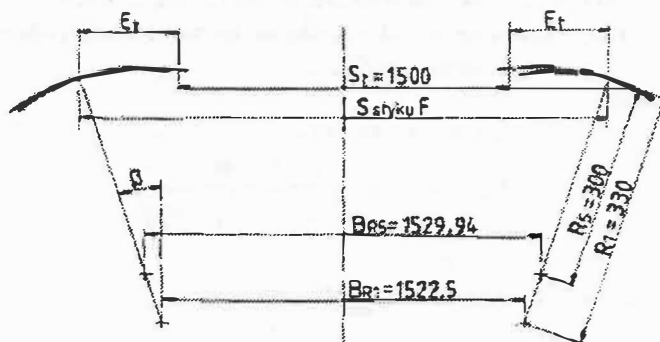
Rys.8. Szyna UIC 60 zabudowana w torze francuskim

4.7. Ustawienie krzywizn podstawowych wypukłości główek szyn



Rys.9. Krzywizny podstawowych wypukłości główek szyn

4.8. Ustawienie zestawu kołowego w środkowym położeniu na torze francuskim



Rys.10. Zestaw kołowy w środkowym położeniu na torze francuskim

Rozstaw punktów styku kół z szynami toru francuskiego

$$\sin \beta = \frac{B_{R5} - B_{R1}}{2 \cdot (R_1 - R_5)}$$

$$S_{styku} = B_{R5} + 2R_5 \cdot \sin \beta$$

czyli

$$S_{styku} = B_{R5} + 2R_5 \cdot \frac{B_{R5} - B_{R1}}{2 \cdot (R_1 - R_5)}$$

co liczbowo daje

$$S_{styku} = 1529,94 + 2 \cdot 300 \cdot \frac{1529,94 - 1522,5}{2 \cdot (330 - 300)} = 1604,34 \text{ mm}$$

$$E_i = \frac{S_{styku} - S_i}{2} = \frac{1604,34 - 1500}{2} = 52,17 \text{ mm}$$

Punkt ten leży poza dziedziną funkcji (5) i poza dziedziną funkcji (46).

Zatem w środkowym położeniu zestawu kołowego na torze francuskim każde koło styka się z szyną nie swoim

fragmentem NC z fragmentem P_FR_F szyny, lecz fragment NV koła będzie się stykał z fragmentem szyny zakreślonym łukiem R_G = 80 po prawej stronie szyny przedstawionej na rys.8. Łuk ten jest wyrażony równaniem (51)

$$(y - 11,689)^2 + (z - 79,647)^2 = 80^2$$

czyli

$$z = 79,647 + \sqrt{80^2 - (y - 11,689)^2}$$

Współczynnik kierunkowy stycznej do tej krzywej wyraża się wzorem

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y - 11,689}{\sqrt{80^2 - (y - 11,689)^2}} \quad (52)$$

Styk wystąpi w tym punkcie, w którym wartość równania (52) będzie równa współczynnikowi kierunkowemu prostej NV, czyli wyniesie m_{NV} = -0,01.

Zatem

$$-0,01 = -\frac{y - 11,689}{\sqrt{80^2 - (y - 11,689)^2}}$$

Rozwiązując to równanie znajdziemy y_{styku}

$$y = y_{styku} = 10,88891999 \approx 10,889 \text{ mm}$$

Rozstaw punktów styku wynosi zatem

$$S_{stykuf} = S_t + 2y_{styku} = 1500 + 2 \cdot 10,889 = 1521,778 \text{ mm} \approx 1522 \text{ mm}$$

Współczynnik kierunkowy stycznej do obu konturów wynosi

$$m_F = m_{NV} = -0,01$$

5. Szyna UIC 60 zabudowana w torze niemieckim (lub polskim)

5.1. Zasady budowy toru niemieckiego (i polskiego)

W Niemczech (i w Polsce) w torze kolejowym szyny są ustawione tak, że są one odchylone od pionu pod kątem $\varphi_N = 1/40 = 0,025$, a odległość pomiędzy punktami pomiarowymi prześwitu toru V_N wynosi B_N = 1435 mm

$$\text{tg } \varphi_N = 1/40 = 0,025$$

Zatem

$$\sin \varphi_N = 0,02499219 \approx 0,0250$$

$$\cos \varphi_N = 0,999687646 \approx 0,9997$$

5.2. Współrzędne punktów charakterystycznych szyny po jej obrocie o kąt $\varphi_N = 1:40$

Punkt 0₅₁ zajmie położenie 0₅₂ o współrzędnych:

$$p_{52} = R_s \cdot \sin \varphi_N = 300 \cdot 0,025 = 7,5 \text{ mm}$$

$$q_{52} = R_s \cdot \cos \varphi_N = 300 \cdot 0,9997 = 299,91 \text{ mm}$$

Punkt P₁ pozostaje w swoim położeniu.

Punkt R₁ zajmie położenie R₁₁ o współrzędnych:

$$\begin{aligned} y_{R11} &= y_{R1} \cdot \cos \varphi_N + z_{R1} \cdot \sin \varphi_N = \\ &= -10,5 \cdot 0,9997 + 0,184 \cdot 0,025 = \\ &= -10,49225 \text{ mm} \approx -10,492 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{R11} &= z_{R1} \cdot \cos \varphi_N - y_{R1} \cdot \sin \varphi_N = \\ &= 0,184 \cdot 0,9997 - (-10,5) \cdot 0,025 = \\ &= 0,4464448 \approx 0,446 \text{ mm} \end{aligned}$$

Punkt 0₆₁ zajmie położenie 0₆₂ o współrzędnych:

$$\begin{aligned} p_{62} &= p_{61} \cdot \cos \varphi_N + q_{61} \cdot \sin \varphi_N = \\ &= -7,7 \cdot 0,9997 + 80,135 \cdot 0,025 = \\ &= -5,694315 \approx -5,694 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{62} &= q_{61} \cdot \cos \varphi_N - p_{61} \cdot \sin \varphi_N = \\ &= 80,135 \cdot 0,9997 - (-7,7) \cdot 0,025 = \\ &= 80,03034595 \approx 80,030 \text{ mm} \end{aligned}$$

Punkt S₁ zajmie położenie S₁₁ o współrzędnych:

$$\begin{aligned} y_{S11} &= y_{S1} \cdot \cos \varphi_N + z_{S1} \cdot \sin \varphi_N = \\ &= -26 \cdot 0,9997 + 2,256 \cdot 0,025 = \\ &= -25,9358 \approx -25,936 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{S11} &= z_{S1} \cdot \cos \varphi_N - y_{S1} \cdot \sin \varphi_N = \\ &= 2,256 \cdot 0,9997 - (-26) \cdot 0,025 = \\ &= 2,9053232 \approx 2,905 \text{ mm} \end{aligned}$$

Punkt 0₇₁ zajmie położenie 0₇₂ o współrzędnych:

$$\begin{aligned} p_{72} &= p_{71} \cdot \cos \varphi_N + q_{71} \cdot \sin \varphi_N = \\ &= (-23,026) \cdot 0,9997 + 14,911 \cdot 0,025 = \\ &= -22,6463172 \approx -22,646 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{72} &= q_{71} \cdot \cos \varphi_N - p_{71} \cdot \sin \varphi_N = \\ &= 14,911 \cdot 0,9997 - (-23,026) \cdot 0,025 = \\ &= 15,4821767 \approx 15,482 \text{ mm} \end{aligned}$$

Punkt T₁ zajmie położenie T₁₁ o współrzędnych:

$$\begin{aligned}
y_{T11} &= y_{T1} \cdot \cos \varphi_N + z_{T1} \cdot \sin \varphi_N = \\
&= (-36) \cdot 0,9997 + 14,3 \cdot 0,025 = \\
&= -35,6317 \approx -35,632 \text{ mm} \\
z_{T11} &= z_{T1} \cdot \cos \varphi_N - y_{T1} \cdot \sin \varphi_N = \\
&= 14,3 \cdot 0,9997 - (-36) \cdot 0,025 = \\
&= 15,19571 \approx 15,196 \text{ mm}
\end{aligned}$$

Równanie łuku P_1R_{11} będzie miało postać:

$$(y - p_{52})^2 + (z - q_{52})^2 = R_5^2 \quad (53)$$

czyli

$$(y - 7,5)^2 + (z - 299,91)^2 = 300^2 \quad (54)$$

Równanie łuku $R_{11}S_{11}$ będzie miało postać:

$$(y - p_{62})^2 + (z - q_{62})^2 = R_6^2 \quad (55)$$

czyli

$$(y + 5,694)^2 + (z - 80,030)^2 = 80^2 \quad (56)$$

Równanie łuku $S_{11}T_{11}$ będzie miało postać:

$$(y - p_{72})^2 + (z - q_{72})^2 = R_7^2$$

czyli

$$(y + 22,646)^2 + (z - 15,482)^2 = 13^2 \quad (57)$$

Kąt odchylenia boku główki szyny od pionu

$$\operatorname{tg} \varphi_N = \operatorname{tg} \varphi - 0,025 = 0,05 - 0,025 = 0,025$$

Współczynnik kierunkowy boku główki szyny

$$\begin{aligned}
m_{T11} &= -\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi_N) = -\operatorname{ctg} \varphi_N = \\
&= -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_N} = -\frac{1}{0,025} = -40
\end{aligned}$$

Równanie boku główki szyny odchylonej od pionu pod kątem 1:40

$$z = z_{T11} = m_{T11} \cdot (y - y_{T11}) \quad (58)$$

czyli

$$z = m_{T11} \cdot y + z_{T11} - m_{T11} \cdot y_{T11}$$

czyli

$$z = -40y + 15,196 - 40 \cdot (-35,632)$$

Stąd

$$z = -40y + 1440,476 \quad (59)$$

5.3. Współrzędne najwyżej położonego punktu główki szyny

Najwyżej położony punkt główki szyny U_{11} ma odciętą $y_{U11} = p_{52} = 7,5$ mm. Jego rzędną z_{U11} znajdziemy z równania (54)

$$(y_{U11} - 7,5)^2 + (z_{U11} - 299,91)^2 = 300^2$$

czyli

$$(7,5 - 299,91)^2 + (z_{U11} - 299,91)^2 = 90000$$

Stąd otrzymujemy

$$z_{U11} = -0,09 \text{ mm}$$

Punkt o odciętej $y_{U11} = 7,5 \text{ mm}$ na szynie UIC 60 zabudowanej w torze niemieckim leży na łuku o promieniu $R = 300$ mm po prawej stronie główki szyny.

5.4. Współrzędne punktu pomiarowego prześwitu toru V_{F11} po obrocie szyny o kąt 1/40

Biorąc pod uwagę, że punkt pomiarowy prześwitu toru leży na poziomie niższym o 14 mm niż najwyższy punkt główki szyny zabudowanej w torze, to:

$$z_{V11} = z_{U11} + 14 = -0,09 + 14 + 13,91 \text{ mm}$$

Odciętą tego punktu znajdziemy z równania (57)

$$(y_{V11} + 22,646)^2 + (z_{V11} - 15,482)^2 = 13^2$$

czyli

$$(y_{V11} + 22,646)^2 + (13,91 - 15,482)^2 = 169$$

Stąd otrzymujemy

$$y_{V11} = -35,55060445 \approx -35,551 \text{ mm}$$

co dałoby rozstaw punktów pomiarowych na obu szynach równy

$$\begin{aligned}
B_{11} &= 1500 - 2 \cdot |y_{V11}| = 1500 - 2 \cdot |-35,551| = \\
&= 1500 - 2 \cdot 35,551 = 1500 - 71,102 = \\
&= 1428,898 \text{ mm} \approx 1429 \text{ mm}
\end{aligned}$$

Ale w myśl zasad budowy toru w Niemczech (i w Polsce) B_{11} musi być równe 1435 mm.

Zatem każda z szyn musi zostać odsunięta od środka toru w kierunku na zewnątrz toru o wielkość

$$\Delta B_{11} = \frac{1435 - 1429}{2} = 3mm$$

5.5. Współrzędne punktów konturu bieżni po przesunięciu o ΔB_{11}

Po przesunięciu punkty charakterystyczne osiągną inne współrzędne niż podane powyżej.

Punkt 0_{52} zajmie położenie 0_{5N}

$$p_{5N} = p_{52} + \Delta B_{11} = 7,5 + 3 + 10,5mm$$

$$q_{5N} = q_{52} = 299,91mm$$

Punkt P_1 zajmie położenie P_N o współrzędnych

$$y_{PN} = y_{P1} + \Delta B_{11} = 0 + 3 = 3mm$$

$$z_{PN} = z_{P1} = 0$$

Punkt R_{11} zajmie położenie R_N :

$$y_{RN} = y_{R11} + \Delta B_{11} = -10,492 + 3 = -7,492mm$$

$$z_{RN} = z_{R11} = 0,446mm$$

Punkt 0_{61} zajmie położenie 0_{6N} o współrzędnych:

$$p_{6N} = p_{62} + \Delta B_{11} = -5,694 + 3 = -2,694mm$$

$$q_N = q_{62} = 80,030mm$$

Punkt S_{12} zajmie położenie S_N :

$$y_{SN} = y_{S11} + \Delta B_{11} = -25,936 + 3 = -22,936mm$$

$$z_{SN} = z_{S11} = 2,905mm$$

Punkt 0_{71} zajmie położenie 0_{7N} o współrzędnych:

$$p_{7N} = p_{72} + \Delta B_{11} = -22,646 + 3 = -19,646mm$$

$$q_{7N} = q_{72} = 15,482mm$$

Punkt T_{11} zajmie położenie T_N

$$y_{TN} = y_{T11} + \Delta B_{11} = -35,632 + 3 = -32,632mm$$

$$z_{TN} = z_{T11} = 15,196mm$$

Równanie łuku $P_N R_N$:

$$(y - p_{5N})^2 + (z - q_{5N})^2 = R_5^2 \quad (60)$$

czyli

$$(y - 10,5)^2 + (z - 299,91)^2 = 300^2 \quad (61)$$

Równanie łuku $R_N S_N$:

$$(y - p_{6N})^2 + (z - q_{6N})^2 = R_6^2 \quad (62)$$

czyli

$$(y + 2,694)^2 + (z - 80,030)^2 = 80^2 \quad (63)$$

Równanie łuku $S_N T_N$:

$$(y - p_{7N})^2 + (z - q_{7N})^2 = R_7^2 \quad (64)$$

czyli

$$(y + 19,646)^2 + (z - 15,482)^2 = 13^2 \quad (65)$$

Równanie boku główki szyny

$$z - z_{TN} = m_{TN} \cdot (y - y_{TN}) \quad (66)$$

gdzie

$$m_{TN} = m_{TN} = m_{T11} = -40$$

Zatem

$$z = m_{TN} \cdot y + z_{TN} - m_{TN} \cdot y_{TN}$$

czyli

$$\begin{aligned} z &= -40 \cdot y + 15,196 - 40 \cdot (-32,632) \\ z &= -40y + 15,196 + 1305,28 \\ z &= -40y + 1320,476 \end{aligned} \quad (67)$$

5.6. Współrzędne najwyżej położonego punktu główki szyny

$$y_{UN} = y_{U11} + \Delta B_{11} = 7,5 + 3 = 10,5mm$$

$$z_{UN} = z_{U11} = -0,09mm$$

Punkt U_N na szynie UIC 60 zabudowanej w torze niemieckim (lub polskim) leży na łuku o promieniu $R_5 = 300$ mm po prawej stronie główki szyny.

5.7. Współrzędne punktu pomiarowego prześwitu toru V_{FN} po przesunięciu szyny o $\Delta B_{11} = 3$ mm

Uwzględniając, że punkt pomiarowy prześwitu toru leży na poziomie niższym o 14 mm niż najwyższy punkt główki szyny zabudowanej w torze, to wówczas

$$z_{VN} = z_{UN} + 14 = -0,09 + 14 = 13,91mm$$

Odcietą tego punktu wyznaczmy z równania (65)

$$(y_{VN} + 19,646)^2 + (z_{VN} - 15,482)^2 = 13^2$$

czyli

$$(y_{VN} + 19,646)^2 = 13^2 - (z_{VN} - 15,482)^2$$

Stąd otrzymujemy

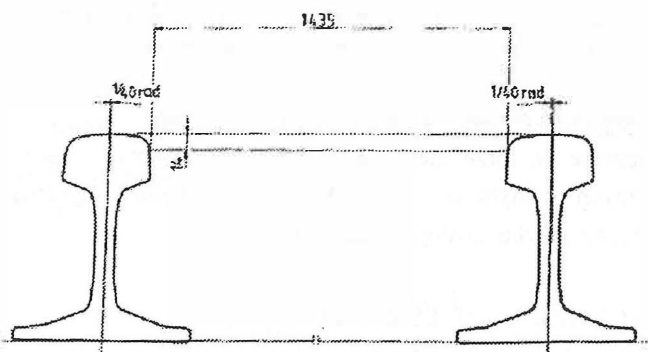
$$y_{VN} = -32,55060445 \approx -32,551 \text{ mm}$$

co daje rozstaw punktów pomiarowych na obu szynach równy

$$B_N = 1500 - 2 \cdot |y_{VN}| = 1500 - 2 \cdot |-32,551| = 1434,898 \approx 1435 \text{ mm}$$

5.8. Rysunek szyny UIC 60 zabudowanej w torze niemieckim (lub polskim)

SZYNA UIC 60 ZABUDOWANA W TORZE NIEMIECKIM JEST PRZEDSTAWIONA NA RYS.11

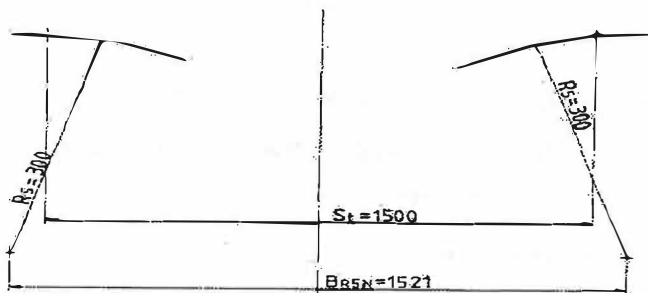


Rys. 11. Szyna UIC zabudowana w torze niemieckim (lub polskim)

5.9. Rozstaw środków okręgów o promieniach R_5 na torze niemieckim (lub polskim)

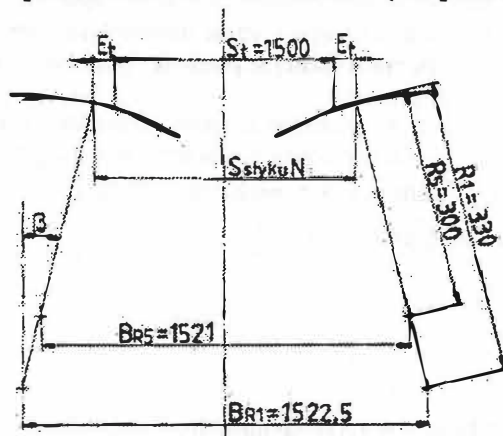
$$B_{R5N} = S_t + 2 \cdot |p_{5N}| = 1500 + 2 \cdot |10,5| = 1500 + 21 = 1521 \text{ mm}$$

5.10. Ustawienie krzywizn podstawowych wklęsłości główek szyn



Rys. 12. Krzywizny podstawowych wklęsłości bieżni kół

5.11. Ustawienie zestawu kołowego w środkowym położeniu na torze niemieckim (lub polskim)



Rys. 13. Zestaw kołowy w środkowym położeniu na torze niemieckim (lub polskim)

Rozstaw punktów styku kół z szynami na torze niemieckim (lub polskim)

$$\sin \beta = \frac{B_{R1} - B_{R5}}{2 \cdot (R_1 - R_5)}$$

$$S_{styku} = B_{R5} - 2R_5 \cdot \sin \beta$$

czyli

$$S_{styku} = B_{R5} - 2R_5 \cdot \frac{B_{R1} - B_{R5}}{2 \cdot (R_1 - R_5)}$$

co liczbowo daje

$$S_{stykuN} = 1521 - 2 \cdot 300 \cdot \frac{1522,5 - 1521}{2 \cdot (330 - 300)} = 1506 \text{ mm}$$

$$E_t = \frac{S_{styku} - S_t}{2} = \frac{1506 - 1500}{2} = 3 \text{ mm}$$

Zatem w środkowym położeniu zestawu kołowego na torze niemieckim (lub polskim) każde koło styka się swoim fragmentem NC z fragmentem P_FR_F szyny w środku górnej powierzchni szyny.

WSPÓŁCZYNNIK KIERUNKOWY STYCZNEJ W PUNKCIE STYKU KOŁA Z SZYNĄ WYRAŻA SIĘ WZOREM

$$m_N \approx \sin \beta = -\frac{B_{R1} - B_{R5}}{2 \cdot (R_1 - R_5)} = -\frac{1522,5 - 1521}{2 \cdot (330 - 300)} = -0,025 = -1:40$$

6. Różnice w zachowaniu się zestawu kołowego na torze francuskim i niemieckim

6.1. Różnica rozstawu kręgów tocznych i kątów nachylenia stycznej w punkcie styku koła z szyną

Rozstaw kręgów tocznych kolejowego zestawu kołowego zajmującego środkowe położenie na torze francuskim wynosi $S_{stF} = 1522 \text{ mm}$, a kąt nachylenia stycznej w punkcie styku koła z szyną wynosi

$$\left(\frac{dz}{dy} \right)_{stF} = -0,01$$

Dla odmiany w torze niemieckim (lub polskim) rozstaw kręgów tocznych zestawu kołowego zajmującego środkowe położenie wynosi $S_{stN} = 1506 \text{ mm}$, a kąt nachylenia stycznej w punkcie styku koła z szyną wynosi

$$\left(\frac{dz}{dy} \right)_{stN} = -0,025$$

6.2. Znaczenie powyższych różnic

Autorzy niniejszej pracy nie napotkali żadnej wzmianki w światowej literaturze technicznej z dziedziny kolejnictwa, która stwierdzałaby występowanie innego rozstawu kręgów tocznych na znormalizowanym wagonowym zestawie kołowym zajmującym środkowe położenie na torze francuskim, zbudowanym z szyn UIC 60 odchylonych od pionu pod kątem $1/20$, niż rozstaw kręgów tocznych występujący na tymże samym zestawie kołowym gdy zajmuje on środkowe położenie na torze niemieckim zbudowanym z takich samych szyn odchylonych od pionu pod kątem $1/40$. A przecież ta odmienność jest ewidentna, gdyż dwa kontury krzywoliniowe (kontur bieżni koła i kontur główki szyny) mogą się stykać z sobą tylko w takim punkcie, w którym występuje wspólna normalna do obu tych konturów, a zatem również wspólna styczna do tych konturów. Położenie takiego punktu styku zależy od usytuowania środków krzywizn obu stykających się z sobą konturów, a to usytuowanie jest inne przy ustawieniu szyn w torze francuskim pod kątem $1/20$ niż przy odchyleniu pod kątem $1/40$ w torze niemieckim. Położenia rzeczywistych kręgów tocznych przedstawiono na rysunkach 10 i 13.

We wszystkich publikacjach znanych autorom niniejszego opracowania określa się rozstaw kręgów tocznych jako równy w przybliżeniu 1500 mm . Rzeczywiście, dla obliczeń momentu zginającego osie zestawów kołowych, dla obliczeń wytrzymałościowych ram wózków, maźnic i usprężynowań, czy też dla obliczeń skrajni kinematycznej wagonów nie jest istotne, czy przyjmiemy rozstaw kręgów tocznych równy 1500 mm czy 1506 mm czy 1522 mm i możemy nadal przyjmować rozstaw 1500 mm do

tych obliczeń, a niedokładność wyników obliczeń wynikająca z tego przybliżenia jest pomijalnie mała.

Zupełnie inaczej wygląda sprawa przy obliczaniu sił dynamicznych występujących w płamce styku koła z szyną. Tutaj istotną cechą odróżniającą współpracę zestawu kołowego z torem francuskim od współpracy tegoż zestawu z torem niemieckim nie jest liczbową wartość rozstawu kręgów tocznych, lecz fakt, że na torze francuskim, w chwili gdy zestaw kołowy zajmuje środkowe położenie w torze, przy rozstawie kręgów tocznych równym $S_{stF} = 1522 \text{ mm}$, kąt nachylenia stycznej w punkcie styku każdego koła z szyną wynosi

$$\left(\frac{dz}{dy} \right)_{stF} = -0,01$$

Zatem chwilowe pochylenie bieżni kół zestawu kołowego zajmującego środkowe położenie w torze francuskim wynosi $\sigma_{OF} = 0,01$.

Natomiast gdy zestaw kołowy zajmuje środkowe położenie na torze niemieckim, to przy rozstawie kręgów tocznych równym $S_{stN} = 1506 \text{ mm}$, kąt nachylenia stycznej w punkcie styku każdego koła z szyną wynosi

$$\left(\frac{dz}{dy} \right)_{stN} = -0,025$$

czyli chwilowe pochylenie bieżni kół zestawu kołowego zajmującego środkowe położenie w torze niemieckim wynosi $\sigma_{ON} = 0,025$.

Zatem w położeniu środkowym zestawu kołowego na torze francuskim, w płamkach styku każdego z kół z szynami występuje jedynie niewielki poślizg wiertny o prędkości kątowej równej zaledwie $\omega_{spF} = 0,01\omega_o$ podczas gdy w analogicznych warunkach na torze niemieckim chwilowa prędkość kątowa poślizgu wiertnego wynosi

$$\omega_{sp} = -0,025 \cdot \omega_o \quad (76)$$

gdzie ω_{sp} - prędkość kątowa poślizgu wiertnego

ω_o - prędkość kątowa obracającego się zestawu kołowego.

7. Wnioski końcowe

Koła zestawu kołowego w swym położeniu środkowym na torze francuskim wykonują poślizg wiertny o prędkości kątowej dwa i pół razy mniejszej, niż w analogicznym położeniu na torze niemieckim. Ponadto w swym środkowym położeniu na francuskim torze prostym zestaw kołowy współpracuje z wypukłościami główek szyn prostoliniowymi fragmentami konturów bieżni swych kół. Jest to więc współpraca identyczna jak w przypadku stożkowego koła

tramwajowego z torem zbudowanym z szyn kolejowych, co omówiono w pracy [1]. W takiej współpracy, przy małych odbiegnięciach zestawu kołowego od jego środkowego położenia w torze, nie pojawia się w ogóle sztywność grawitacyjna (terminologia anglojęzyczna *gravitational stiffness*), ponieważ nie pojawia się różnica pomiędzy współczynnikami kierunkowymi wspólnych normalnych w punktach styku lewego i prawego koła z szynami. Sztywność ta pojawia się dopiero przy dużych odbiegnięciach zestawu kołowego od środkowego położenia w torze.

Zupełnie inaczej wygląda współpraca zestawu kołowego z niemieckim (lub polskim) torem prostym. Tu z wypukłościami główek szyn zawsze współpracują wklęsłe fragmenty bieżni kół, a sztywność grawitacyjna pojawia się już od najmniejszego odbiegnięcia zestawu kołowego od środkowego położenia w torze. Zatem zupełnie inna jest dynamika współpracy jednego i tego samego zestawu kołowego z torem francuskim niż z torem niemieckim.

To prawdopodobnie jest jedną z przyczyn zjawiska zaobserwowanego w ostatnich latach i wspomnianego w [1], a mianowicie tego, że pewne pojazdy biegają bardzo stabilnie na torach jednych kolei, aż do osiągnięcia bardzo wysokich prędkości, a na torach innych kolei wykazują niestabilny bieg już przy znacznie mniejszych prędkościach.

Literatura

- [1] Gąsowski W., Lang R.: „Kołysanie poprzeczne zestawu kołowego podczas wężykowania w torze”. *Pojazdy Szynowe*, nr 2/1999.
- [2] Polska Norma PN-84/H-93421. „Szyny normalnotorowe”.
- [3] Polska Norma PN-92/K-91056. „Tabor kolejowy. Zarys zewnętrzny obręczy i wieńców kół bezobrzeczowych zestawów kołowych”.