

Dr inż. Arkadiusz Barczak
Politechnika Poznańska

Macierz tłumienia modalnego w modelowaniu układów nośnych pojazdów szynowych

W artykule przedstawiono zastosowanie metody modelowania tłumienia w postaci tłumienia modalnego w modelowaniu układów nośnych pojazdów szynowych.

Dla wybranych konstrukcji nadwozia wagonu osobowego i wózka wagonu osobowego wyznaczono wartości współczynników α i β charakteryzujące macierz tłumienia modalnego. Dla zbudowanego dyskretnego modelu pojazdu szynowego przeprowadzono badania symulacyjne wyznaczania odpowiedzi układu na zadane wymuszenie.

1. Wprowadzenie

Podstawowym zagadnieniem w procesie projektowania układu nośnego pojazdu szynowego jest prognozowanie jego trwałości zmęczeniowej.

Konieczna jest zatem znajomość przebiegów dynamicznych zmiennych naprężeń w wybranych punktach badanej konstrukcji. Obecnie historie stanu naprężenia w układach nośnych pojazdów szynowych uzyskuje się na podstawie pomiarów prowadzonych na torze.

Jest to proces kosztowny i długotrwały.

Rozwój komputerowych metod analizy konstrukcji nośnych z zastosowaniem MES oraz eksperymentalnych metod w zakresie analizy modalnej stanowią przyczynek tworzenia matematycznego modelu układu nośnego w fazie jego projektowania umożliwiającego analizę czasową i częstotliwościową w aspekcie prognozowania trwałości konstrukcji nośnej.

Model matematyczny zjawisk zachodzących w pojeździe szynowym z uwzględnieniem odkształcalności konstrukcji

nośnych przedstawiono za pomocą liniowego, stacjonarnego równania (1) [2]

$$\underline{\tilde{M}} \ddot{\underline{q}} + \underline{\tilde{C}} \dot{\underline{q}} + \underline{\tilde{K}} \underline{q} = \underline{F}(t) \quad (1)$$

gdzie:

- $\underline{q}$ – wektor współrzędnych uogólnionych,
- $\dot{\underline{q}}, \ddot{\underline{q}}$ – wektory: prędkości i przyspieszeń uogólnionych,
- $\underline{\tilde{M}}, \underline{\tilde{C}}, \underline{\tilde{K}}$ – macierze; bezwładności, tłumienia, sztywności.

Do wyznaczania elementów macierzy bezwładności $\underline{\tilde{M}}$ i sztywności $\underline{\tilde{K}}$ stosowane są skutecznie programy metody elementów skończonych [6]. Realna ocena dynamicznej pracy układu poddanego złożonemu, stanowi obciążenia jest możliwa po wyznaczeniu wielkości reprezentujących macierz tłumienia $\underline{\tilde{C}}$.

Wyznaczanie elementów macierzy tłumienia $\underline{\tilde{C}}$ jest możliwe na podstawie wyników odpowiednich eksperymentów. Szczególne znaczenie mają metody analizy modalnej [1, 4].

Zakłada się, że macierz tłumienia jest reprezentowana związkiem (2)

$$\underline{C} = \alpha \underline{K} + \beta \underline{M} \quad (2)$$

gdzie:

α, β – odpowiednie współczynniki.

Znane systemy komputerowej analizy układów nośnych – NASTRAN, ASYS korzystają z przyjętej w postaci (2) formuły dla określenia macierzy tłumienia. W celu rozwiązania zadania – wyznaczenie przemieszczeń, prędkości, przyspieszeń, odkształceń i naprężeń konieczna jest zatem znajomość wartości współczynników α, β .

W literaturze brak danych wartości tych współczynników w odniesieniu do konstrukcji nośnych pojazdów szynowych. Prezentowane wyniki badań eksperymentalnych układów nośnych pojazdów szynowych dotyczą częstości drgań własnych i bezwymiarowego współczynnika tłumienia modalnego.

W artykule przedstawiono metodę wyznaczania współczynników α, β na przykładzie modelu pojazdu szynowego przy przyjęciu (przy założeniu oscylacyjnego charakteru procesu przejściowego) współczynników tłumienia na podstawie eksperymentu numerycznego.

2. Wyznaczanie współczynników α, β charakteryzujących macierz tłumienia modalnego

Podstawowym zagadnieniem w analizie procesów zachodzących w układzie nośnym pojazdu szynowego jest określenie charakteru procesu przejściowego. Związane jest to z ustaleniem wpływu współczynników α , na wartości własne macierzy reprezentujących układ.

Przyjmując, że na układ opisany równaniem (1) nie działa wymuszenie a zadane zostały warunki początkowe założono rozwiązanie w postaci (3)

$$\underline{q}(t) = \underline{\hat{q}} e^{\lambda t} \quad (3)$$

gdzie:

λ – wartości własne.

Po podstawieniu (3) do (1) i przyjęciu (2) uzyskano (4)

$$\underline{K} \underline{\hat{q}} = \omega^2 \underline{M} \underline{\hat{q}} \quad (4)$$

gdzie wartości własne ω^2 (częstości drgań własnych) opisano równaniem (5)

$$\omega^2 = -\frac{\lambda^2 + \beta \lambda}{\alpha \lambda + 1} \quad (5)$$

Równanie to po przekształceniu jest równaniem kwadratowym względem λ . Pierwiastki tego równania λ_j reprezentujące częstości drgań własnych tłumionych przedstawiono związkiem (6).

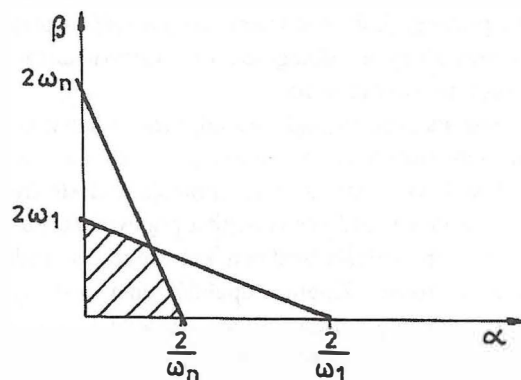
$$\lambda_{j,1,2} = -\frac{1}{2}(\beta + \alpha \omega_j^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\beta + \alpha \omega_j^2)^2 - \omega_j^2} \quad (6)$$

Zgodnie z przyjętym założeniem o oscylacyjnym charakterze procesu przejściowego uzyskano związki (7) i (8) umożliwiające wstępne oszacowanie wartości współczynników α i β .

$$\beta < -\alpha \omega_j^2 + 2\omega_j \quad (7)$$

$$\alpha < \frac{2\omega_j}{\omega_j^2} - \frac{\beta}{\omega_j^2} \quad (8)$$

Zakresy zmienności współczynników α i β wynikające z ograniczeń (7) i (8) przedstawiono na rys.1.



Rys. 1. Zależność między współczynnikami α i β dla przypadku procesu przejściowego o oscylacyjnym charakterze

Przyjęcie modelu tłumienia w postaci modalnej umożliwia rozprężnięcie równań (1) co jest równoznaczne z diagonalizacją macierzy reprezentujących układ.

Dokonując transformacji wektora współrzędnych $\underline{q}$ za pomocą podstawienia (9)

$$\underline{q} = \underline{X} \underline{\eta} \quad (9)$$

$\underline{X}$ – macierz wektorów własnych ogólnego zagadnienia własnego, $[\underline{K} - \omega^2 \underline{M}] \underline{X} = 0$

$\underline{\eta}$ – wektor współrzędnych głównych,

uzyskano (10)

$$\underline{M}_d \ddot{\underline{\eta}} + \underline{C}_d \dot{\underline{\eta}} + \underline{K}_d \underline{\eta} = \underline{X}^T \underline{F} \quad (10)$$

gdzie:

$$\underline{M}_d = \underline{X}^T \underline{M} \underline{X}$$

$$\underline{C}_d = \underline{X}^T \underline{C} \underline{X}$$

$$\underline{K}_d = \underline{X}^T \underline{K} \underline{X}$$

Zależność ta opisuje zbiór równań o postaci (11) lub (12)

$$m_j \ddot{\eta}_j + c_j \dot{\eta}_j + k_j \eta_j = F_j \quad (11)$$

$$\ddot{\eta}_j + 2D_j \omega_j \dot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = \frac{\hat{F}_j}{m_j} \quad (12)$$

gdzie:

D_j – bezwymiarowy współczynnik tłumienia.

Związek między współczynnikiem D_j a modalnymi współczynnikami m_j, c_j i k_j zapisano równaniem (13)

$$D_j = \frac{c_j}{2\sqrt{k_j \cdot m_j}} \quad (13)$$

Wartości współczynników D_j wyznaczone są na podstawie eksperymentu według analizy modalnej. Znajomość wartości współczynników D_j (dla badanego zakresu częstości drgań własnych wynikającego z rzędu modelu) pozwala na wyznaczenie elementów macierzy C_d (14)

$$\frac{C}{\tilde{d}} = 2D \sqrt{\frac{K}{\tilde{d}} \frac{M}{\tilde{d}}} \quad (14)$$

Ze względu na fakt przyjęcia macierzy tłumienia w postaci (2) słuszny jest związek (15)

$$C_{\tilde{d}} = \alpha K_{\tilde{d}} + \beta M_{\tilde{d}} \quad (15)$$

Macierze K_d i C_d oraz M_d są diagonalne stąd związek (15) odpowiada układowi n równań z dwoma niewiadomymi α i β (16)

$$KM_d \cdot \underline{\alpha\beta}_d = \underline{C}_d \quad (16)$$

gdzie:

KM_d ma postać:

$$\underline{KM}_d = \begin{bmatrix} k_{11} & m_{11} \\ \vdots & \vdots \\ \text{diag}[\underline{K}_d] & \text{diag}[\underline{M}_d] \\ \vdots & \vdots \\ k_{nn} & m_{nn} \end{bmatrix}$$

2

$$\underline{\alpha\beta}_d = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Rozwiązaniem równania (16) jest wektor $\alpha\beta_d$ (17) [3]

$$\underline{\alpha\beta}_d = KM_d^+ \cdot \underline{C}_d \quad (17)$$

gdzie:

KM_{d+} – macierz pseudoodwrotna.

Zaproponowana metoda rozwiązywania równania (16) jest równoznaczna z minimalizacją kwadratową wektora (18)

$$\underline{y} = \underline{C} - \underline{K} \underline{M} \cdot \underline{\alpha} \underline{\beta}_d \quad (18)$$

Znajomość współczynników α i β umożliwia zbudowanie macierzy tłumienia C a tym precyzuje model układu reprezentowany równaniem (1).

Możliwe zatem staje się prowadzenie analizy w zakresie badania charakterystyk czasowych i częstotliwościowych układu przy przyjętych stanach obciążenia.

Przedstawiona metoda wyznaczania współczynników α i β może być praktycznie stosowana dla układów w których wyróżnia się podukłady (nadwozie wagonu, ramy wózków) a zatem dla układów dla których macierze $\tilde{M}$, $\tilde{K}$, $\tilde{C}$ w (1) mają budowę blokową.

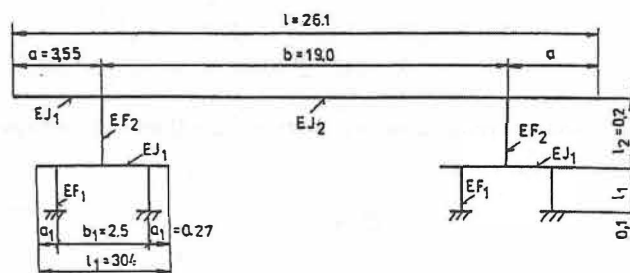
Przyjmując, że współczynniki α i β dla każdego podukładu mają różne wartości macierz tłumienia dla wybranego i -tego podukładu opisano (19)

$$C_{\tilde{z}_i} = \alpha_i K_{\tilde{z}_i} \quad (19)$$

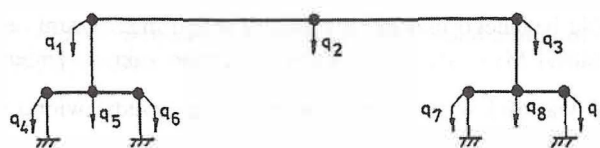
3. Wyznaczanie wartości współczynników α i β na przykładzie modelu pojazdu szynowego

Przedstawiona w rozdziale drugim metoda wyznaczania współczynników α i β charakteryzujących macierz tłumienia modalnego zastosowano w odniesieniu do modelu wagonu osobowego z uwzględnieniem odkształcalnego nadwozia i odkształcalnych ram wózków.

W przyjętym modelu nadwozie reprezentowane jest belką o zastępczej sztywności na zginanie opartą za pomocą prętów o zastępczej sztywności na ściskanie na belkach o zastępczej sztywności reprezentujących sztywność ramy wózka na zginanie opartymi na podłożu za pomocą prętów o zastępczej sztywności na ściskanie. Przyjęty model dyskretny o dziewięciu stopniach swobody pokazano na rys.3.



Rys. 2. Schemat modelu wagonu

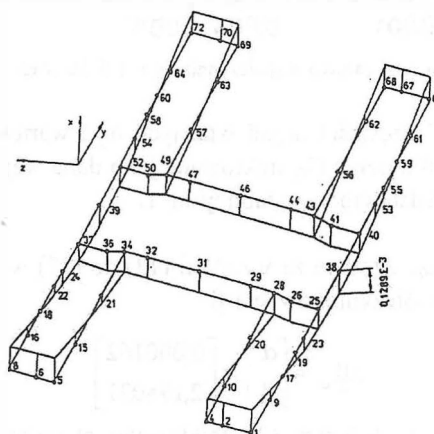


Rys. 3. Model dyskretny układu

Sztywność belki reprezentującej sztywność nadwozia na zginanie wyznaczono korzystając z metody sił oraz z wyników pomiarów statystycznych ugięć nadwozia przy zadanym stanie obciążenia [7].

Sztywność belek reprezentujących sztywność ram wózków na zginanie wyznaczono z zastosowaniem metody elementów skończonych przeprowadzając redukcję macierzy do wybranych stopni swobody.

Model dyskretny ramy wózka przedstawiono na rys.4.



Rys. 4. Model dyskretny ramy wózka

Ponieważ nie dysponowano wynikami badań eksperymentalnych w zakresie analizy modalnej nadwozi wagonu oraz ramy wózka współczynniki tłumienia D_j przyjęto na podstawie symulacji numerycznej (przy założonym oscylacyjnym charakterze procesu przejściowego).

Przeprowadzono transformację układu (1) do postaci w przestrzeni stanu (20) [5]

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} \quad (20)$$

gdzie:

$\underline{x}$ – wektor stanu (zmienne fazowe),

$$\underline{A} \text{ – macierz stanu } \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\underline{M}^{-1} \underline{K} & -\underline{M}^{-1} \underline{C} \end{bmatrix}$$

Wartości własne macierzy stanu $\underline{A}$ w postaci (21)

$$\lambda_j = \sigma_j \pm j\nu_j \quad (21)$$

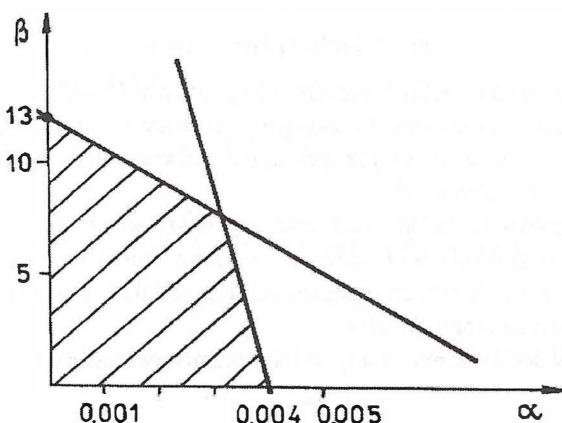
umożliwiają wyznaczenie współczynników tłumienia według związku (22)

$$D_j = -\frac{\sigma_j}{\omega_j} \quad (22)$$

gdzie:

$$\omega_j = \sqrt{\sigma_j^2 + \nu_j^2}$$

Dla badanego układu reprezentowanego macierzami bezwładności $\underline{M}_9$ i sztywności $\underline{K}_9$ wyznaczono zakresy zmienności wartości współczynników α i β co przedstawiono na rys.5.



Rys. 5. Graniczne wartości współczynników α i β dla badanego układu

Wartości częstości drgań własnych ω_j i wartości współczynników tłumienia D_{ej} traktowane jako dane wejściowe do zadania przedstawiono w tabelicy nr 1.

Postępując zgodnie ze wzorami (13) do (17) wyznaczono wartości współczynników α i β

$$\underline{\alpha\beta}_d = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000162 \\ 2,198031 \end{bmatrix}$$

Zgodnie ze wzorem (2) zbudowano macierz tłumienia $\underline{C}$ a następnie macierz stanu $\underline{A}_9$ (23)

Wartości częstości drgań własnych ω_j i wartości współczynników tłumienia D_{ej}
Tabela 1

Postać	Współczynniki tłumienia D_{ej}	Częstości drgań własnych ω_j [Hz]
1	0,0418	78,65
2	0,0418	78,63
3	0,0166	9,99
4	0,1277	1,31
5	0,1038	1,04
6	0,1602	5,99
7	0,1610	5,98
8	0,1248	7,84
9	0,1248	7,83

$$\underline{A}_{9a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\underline{M}^{-1} \underline{K} & -\underline{M}^{-1} (\alpha \underline{K} + \beta \underline{M}) \end{bmatrix} \quad (23)$$

Wyznaczone według (22) wartości współczynników tłumienia zebrano w tabelicy nr 22

Porównanie złożonych D_{ej} i wyznaczonych D_{1j} wartości współczynników tłumienia
Tabela 2

Nr postać	Wartości D_{ej} założone	Wartości D_{1j} wyznaczone
1	0,0418	0,0484
2	0,0418	0,0485
3	0,0166	0,0197
4	0,1277	0,1054
5	0,1038	0,1327
6	0,1602	0,0265
7	0,1610	0,0265
8	0,1248	0,0222
9	0,1248	0,0224

Stwierdzono wystąpienie istotnych różnic między wartościami współczynników tłumienia D_{ej} (przyjętych na podstawie eksperymentu numerycznego) a współczynnikami D_{1j} (obliczonymi przy przyjęciu wyznaczonych wartości współczynników α i β).

Stąd wniosek, że przyjęte współczynniki D_{ej} nie odpowiadają założonemu charakterowi modalnego tłumienia w układzie. Jest to wniosek słuszny, ponieważ w układzie występują podukłady (nadwozie, rama wózka) reprezentowane macierzą tłumienia w postaci modalnej oraz dyskretne elementy tłumiące łączące podukłady których tłumienie nie ma charakteru tłumienia modalnego.

W związku z tym przeprowadzono obliczenia wartości współczynników α i β dla podukładu nadwozia $\underline{\alpha\beta}_n$ oraz dla podukładu rama wózka $\underline{\alpha\beta}_w$ uzyskując wyniki:

$$\underline{\alpha\beta}_n = \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000085 \\ 1,765108 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\alpha\beta}_w = \begin{bmatrix} \alpha_w \\ \beta_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000120 \\ 11,889102 \end{bmatrix}$$

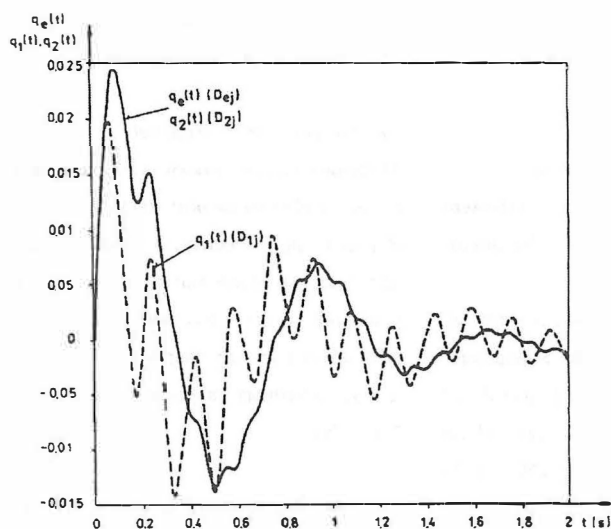
Wykorzystując wyznaczone wartości współczynników α i β wyznaczono macierze tłumienia modalnego dla podukładu nadwozia $\underline{C}_n$ i dla podukładu rama wózka $\underline{C}_w$.

Zbudowano macierz stanu A_{9b} (według 23), wyznaczono jej wartości własne i wyliczono współczynniki tłumienia D_{2j} (22), które zebrano w tablicy nr 3.

Porównanie złożonych D_{ej} i wyznaczonych D_{2j} wartości współczynników tłumienia
Tablica 3

Nr postać	Wartości D_{ej} założone	Wartości D_{2j} wyznaczone
1	0,0418	0,0419
2	0,0418	0,0419
3	0,0166	0,0169
4	0,1277	0,1301
5	0,1038	0,1035
6	0,1602	0,1596
7	0,1610	0,1588
8	0,1248	0,1236
9	0,1248	0,1237

Wyliczone wartości współczynników α i β określają macierz tłumienia układu, która z kolei w sposób decydujący wpływa na charakterystyki czasowe i częstotliwościowe zmiennych reprezentujących wektor współrzędnych uogólnionych. Przykładowy przebieg zmian odpowiedzi układu na kierunku wybranej współrzędnej przy przyjęciu wymuszenia w postaci założonego warunku początkowego dla innej zmiennej przedstawiono na rys.6.



Rys. 6. Przebieg odpowiedzi na kierunku $q_4(t)$ (rys.4) przy zadanym warunku początkowym $q_1(0) = 1$

4. Wnioski

Zaproponowana w artykule metoda wyznaczania współczynników α i β reprezentujących model tłumienia w postaci modalnej okazała się skuteczna. Przy jej zastosowaniu zweryfikowano hipotezę przyjęcia tłumienia w postaci modalnej jak również wyznaczono macierz tłumienia modalnego układu (przy znanych macierzach bezwładności i sztywności).

Przeprowadzone badania numeryczne pozwoliły na oszacowanie wartości współczynników α i β dla układów nadwozia wagonu i ram wózka przy przyjęciu założenia o

oscylacyjnym charakterze procesu przejściowego dla przyjętego modelu o dziewięciu stopniach swobody.

W celu wyznaczenia współczynników i reprezentujących rzeczywiste konstrukcje nośne – nadwozie i rama wózka – niezbędne jest przeprowadzenie eksperymentu w zakresie analizy modalnej.

Znajomość macierzy tłumienia w modelu konstrukcji nośnej pozwala na prowadzenie dalszych badań w kierunku wyznaczania jej trwałości zmęczeniowej.

Literatura

- [1] Barczak A.: *Badanie tłumienności złożonych układów dynamicznych przy zastosowaniu analizy modalnej. Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, seria Maszyny Robocze i Pojazdy, nr 24, 1984.*
- [2] Bishop R.E., Gladwell G.M., Michaelson S.: *Macierzowa analiza drgań. WNT 1972.*
- [3] Kaczorek T.: *Macierze w automatyce i elektronice. WNT, 1984.*
- [4] Natke H.G., *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen und Modalanalyse. Fiedr. Vieweg Verlagsgesellschaft 1983.*
- [5] Takahashi Y., Robins M., Auslander D.: *Sterowanie i systemy dynamiczne. WNT, 1975.*
- [6] Zienkiewicz O.: *Metoda elementów skończonych. Arkady 1972.*
- [7] *Praca zbiorowa OBRPSz Poznań: Badania statyczne pudła wagonu 127A. 1984.*