

Kołysanie poprzeczne zestawu kołowego podczas wężykowania w torze (3)

W pracy opisano wzajemne relacje usytuowania zestawu kołowego ze stożkowymi bieżniami kół z torem krawędziowym (układ tramwajowy) oraz z wklęsłymi bieżniami kół z torem o wypukłych główkach szyn (układ kolejowy). Stwierdzono podskakiwanie środka ciężkości zestawu towarzyszące jego wężykowaniu. Wyznaczono częstotliwość tego podskakiwania. Ujawniono, że ta częstotliwość może być źródłem impulsów wywołujących drgania pudła lub wózka pojazdu.

Część III

OBLICZENIA KINEMATYCZNE ZESTAWU KOŁOWEGO PRZESUNIĘTEGO PROSTOPADLE DO OSI PODŁUŻNEJ TORU ZESTAW KOŁOWY O STOŻKOWYCH BIEŻNIACH KÓŁ PORUSZAJĄCYCH SIĘ PO TORZE KRAWĘDZIOWYM

1. Wstęp

Celem niniejszej pracy jest analiza poprzecznego kołysania kolejowego zestawu kołowego w torze podczas wężykowania. Autorzy opracowania nie natknęli się w światowej literaturze technicznej na żaden opis tego zjawiska. Jest ono świadomie lub nieświadomie pomijane przez badaczy zagadnienia współpracy kół zestawów kołowych z szynami toru. Dotychczas zjawisko wężykowania utrzymywane jest w konwencji ruchu płaskiego w płaszczyźnie główek szyn. Jednak kołysanie zestawu kołowego jest nierozzerwalnie związane z wężykowaniem. Wężykowanie nie może odbywać się bez kołysania zestawu kołowego i na odwrót.

Autorzy sądzili, iż zjawisko kołysania może wywoływać szkodliwe drgania podwozi i nadwozi pojazdów szynowych. Szczegółowa analiza zależności geometrycznych zachodzących pomiędzy zestawem kołowym i szynami zawarta w pracy potwierdziła te przypuszczenia.

Obliczenia kinematyki zestawu kołowego przesuniętego prostopadle do osi podłużnej toru podzielono na dwie części. W części III rozpatrzono zestaw kołowy ze stożkowymi bieżniami kół poruszających się po torze krawędziowym. Jest to układ charakterystyczny dla tramwajów. W części IV przedstawiono zestaw z wklęsłymi bieżniami kół toczących się po torze z wypukłymi główkami szyn [3]. Jest to przypadek jaki ma miejsce na kolei.

Zagadnienia te są prawdopodobnie rozpatrywane po raz pierwszy w świecie, dlatego autorzy świadomie nie czynili zbyt dużych skrótów przy wyprowadzaniu wzorów. Może się

to okazać dla niektórych czytelników mało zajmujące, ale dla zainteresowanych tymi sprawami bardziej dogodne.

Artykuł jest kontynuacją prac przedstawionych w [1,2], wykonywanych w ramach projektu badawczego KBN nr 9T 12C 02116 pt.: „Nowa koncepcja skrajni kinematycznej pojazdów szynowych”.

2. Przedstawienie geometryczne

Założono, że tor, na którym stoi rozpatrywany zestaw kołowy jest zbudowany z szyn 180 P zgodnych z normą [4]. Tor z takimi szynami można uważać za tor o płaskich główkach szyn i ostrych krawędziach tych główek.

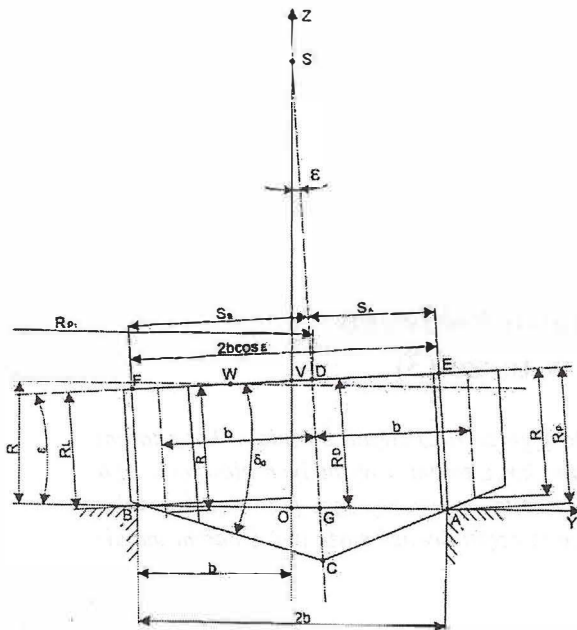
Rozpatrzmy zestaw kołowy o stożkowych bieżniach kół, czyli rozszerzymy przypadek Klingelowski [1] o kołysanie poprzeczne tego zestawu kołowego.

Zastąpmy taki zestaw kołowy bistożkiem o kącie nachylenia jego tworzących do poziomu różnym kątowni nachylenia bieżni kół do poziomu (rys.1).

Przyjmijmy początek układu współrzędnych w punkcie O położonym na poziomie główek szyn, w równej odległości od krawędzi obu główek szyn.

Niech połowa odległości pomiędzy krawędziami toczenia się kół po torze wynosi b [m], promienie toczenia obu połówek bistożka mierzone w odległości b od środka bistożka niech wynoszą R [m], a kąt stożkowatości bistożka niech wynosi δ_0 .

W rozpatrywanym przypadku ustawienia, oś stożka jest nachylona do poziomu pod kątem ε .



Rys. 1. Bistożek na torze krawędziowym

Przyjmijmy początek układu współrzędnych w punkcie O położonym na poziomie główek szyn, w równej odległości od krawędzi obu główek szyn.

Niech połowa odległości pomiędzy krawędziami toczenia się kół po torze wynosi b [m], promień toczenia obu połówek bistożka mierzone w odległości b od środka bistożka niech wynoszą R [m], a kąt stożkowatości bistożka niech wynosi δ_0 .

W rozpatrywanym przypadku ustawienia, oś bistożka jest nachylona do poziomu pod kątem ε .

a) Współrzędne punktu A

$$y_A = b \quad z_A = 0$$

b) Współrzędne punktu B

$$y_B = -b \quad z_B = 0$$

c) Równanie prostej AC

$$\frac{z - z_A}{y - y_A} = \operatorname{tg}(\delta_0 + \varepsilon)$$

Podstawiając tu $z_A = 0$ i $y_A = b$, otrzymamy

$$\frac{z - 0}{y - b} = \operatorname{tg}(\delta_0 + \varepsilon)$$

Stąd

$$z = [\operatorname{tg}(\delta_0 + \varepsilon)] \cdot y - b \cdot \operatorname{tg}(\delta_0 + \varepsilon) \quad (1)$$

d) Równanie prostej BC

$$\frac{z - z_B}{y - y_B} = -\operatorname{tg}(\delta_0 - \varepsilon)$$

Podstawiając tu $z_B = 0$ i $y_B = -b$, otrzymamy

$$\frac{z - 0}{y + b} = -\operatorname{tg}(\delta_0 - \varepsilon)$$

Stąd

$$z = -[\operatorname{tg}(\delta_0 - \varepsilon)] \cdot y - b \cdot \operatorname{tg}(\delta_0 - \varepsilon) \quad (2)$$

e) Współrzędne punktu C wynikające z równań (1) i (2).
Z równania (1) będzie

$$z_c = [\operatorname{tg}(\delta_0 + \varepsilon)] \cdot y_c - b \cdot \operatorname{tg}(\delta_0 + \varepsilon) \quad (3)$$

Z równania (2) będzie

$$z_c = -[\operatorname{tg}(\delta_0 - \varepsilon)] \cdot y_c - b \cdot \operatorname{tg}(\delta_0 - \varepsilon) \quad (4)$$

Odejmując te równania stronami, otrzymamy

$$0 = [\operatorname{tg}(\delta_0 + \varepsilon) + \operatorname{tg}(\delta_0 - \varepsilon)] \cdot y_c + -b \cdot [\operatorname{tg}(\delta_0 + \varepsilon) - \operatorname{tg}(\delta_0 - \varepsilon)]$$

Stąd

$$y_c = b \cdot \frac{\operatorname{tg}(\delta_0 + \varepsilon) - \operatorname{tg}(\delta_0 - \varepsilon)}{\operatorname{tg}(\delta_0 + \varepsilon) + \operatorname{tg}(\delta_0 - \varepsilon)}$$

Po przekształceniach tej zależności będzie:

$$y_c = b \cdot \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin 2\delta_0} \quad (5)$$

Podstawiając to do (3) otrzymamy

$$z_c = [\operatorname{tg}(\delta_0 + \varepsilon)] \cdot \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin 2\delta_0} - b \cdot \operatorname{tg}(\delta_0 + \varepsilon)$$

co po przekształceniach daje

$$z_c = -2b \cdot \frac{\sin(\delta_0 + \varepsilon) \cdot \sin(\delta_0 - \varepsilon)}{\sin 2\delta_0} \quad (6)$$

- f) Długość odcinka CD
Z rysunku 1 wynika, że:

$$L_{CD} = R + b \cdot \operatorname{tg} \delta_0$$

czyli

$$L_{CD} = \frac{R \cdot \cos \delta_0 + b \cdot \sin \delta_0}{\cos \delta_0} \quad (7)$$

- g) Współrzędne punktu D
Z rysunku 1 wynika, że:

$$y_D = y_C - L_{CD} \cdot \sin \varepsilon$$

Podstawiając tu (5) i (7) otrzymamy

$$y_D = b \cdot \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin 2\delta_0} - \frac{R \cdot \cos \delta_0 + b \cdot \sin \delta_0}{\cos \delta_0} \cdot \sin \varepsilon$$

Po przekształceniach tej zależności będzie:

$$y_D = 2 \cdot \frac{b \cdot \cos \varepsilon - R \cdot \sin \delta_0 \cdot \cos \delta_0 - b \cdot \sin^2 \delta_0}{\sin 2\delta_0} \cdot \sin \varepsilon \quad (8)$$

Z rysunku 1 mamy

$$z_D = z_C + L_{CD} \cdot \cos \varepsilon$$

Podstawiając tu (6) i (7), otrzymamy

$$z_D = -2b \cdot \frac{\sin(\delta_0 + \varepsilon) \cdot \sin(\delta_0 - \varepsilon)}{\sin 2\delta_0} + \frac{R \cdot \cos \delta_0 + b \cdot \sin \delta_0}{\cos \delta_0} \cdot \cos \varepsilon$$

co po przekształceniach daje

$$z_D = R \cdot \cos \varepsilon + 2b \cdot \frac{\sin^2 \varepsilon - 2 \cdot \sin^2 \delta_0 \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{\sin 2\delta_0} \quad (9)$$

- h) Przyrost współrzędnych punktu D mierzony względem takiego położenia tego punktu, jakie zajmowałby on w sytuacji, w której bistożek leżałby na torze symetrycznie i poziomo

$$\Delta y_D = y_D - 0 = 2 \cdot \frac{b \cdot \cos \varepsilon - R \cdot \sin \delta_0 \cdot \cos \delta_0 - b \cdot \sin^2 \delta_0}{\sin 2\delta_0} \cdot \sin \varepsilon \quad (10)$$

Podobnie

$$\Delta z_D = z_D - R = R \cdot \cos \varepsilon + 2b \cdot \frac{\sin^2 \varepsilon - 2 \sin^2 \delta_0 \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{\sin 2\delta_0} - R$$

co po przekształceniach daje

$$\Delta z_D = 4b \cdot \frac{\cos^2 \delta_0 \cdot \left(1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0\right) - \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{\sin 2\delta_0} \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \quad (11)$$

- i) Równanie prostej CD (patrz rys.1)

$$\frac{z - z_C}{y - y_C} = -\operatorname{ctg} \varepsilon$$

Stąd mamy

$$z = -(\operatorname{ctg} \varepsilon) \cdot y + y_C \cdot \operatorname{ctg} \varepsilon + z_C$$

Podstawiając tu (5) oraz (6), otrzymamy

$$z = -(\operatorname{ctg} \varepsilon) \cdot y + b \cdot \frac{\sin 2\varepsilon}{\cos 2\delta_0} \operatorname{ctg} \varepsilon - 2b \cdot \frac{\sin(\delta_0 + \varepsilon) \cdot \sin(\delta_0 - \varepsilon)}{\sin 2\delta_0}$$

co po przekształceniach daje

$$z = -(\operatorname{ctg} \varepsilon) \cdot y + b \cdot \operatorname{ctg} \delta_0 \quad (12)$$

- j) Współrzędne punktu przecięcia tej prostej z osią „z” (punkt S na rys.1)

$$\begin{aligned} y_S &= 0 \\ z_S &= b \cdot \operatorname{ctg} \delta_0 \end{aligned} \quad (13)$$

Wyniki te uzyskano w niniejszej analizie bez stosowania jakichkolwiek uproszczeń. Zatem wyznaczone współrzędne punktu S są niezależne od kąta przechylenia zestawu kołowego. Wobec tego punkt S jest biegunem kołysania tego zestawu. Prosta prostopadła do płaszczyzny rysunku 1, przechodząca przez biegun kołysania S jest osią kołysania zestawu kołowego. Z dotychczasowych rozważań wynika, że zestaw kołowy, który stał nieruchomo w nominalnym położeniu środkowym w torze, gdzie jego oś była prostopadła do kierunku toru, a jego środek geometryczny leżał w pionowej podłużnej płaszczyźnie symetrii toru, nigdy nie może osiągnąć położenia przedstawionego na rys.1 w wyniku równoległego przesunięcia w poprzek toru o wielkość y , lecz musi on zostać przechylony o kąt ε wokół swojej osi kołysania. Przechylenie takie może nastąpić na przykład w wyniku ogromnej siły poprzecznej, działającej na zestaw kołowy i pokonującej wszelkie tarcia.

- k) Równanie przechylonej osi zestawu kołowego.
Z rysunku 1 mamy

$$\frac{z - z_D}{y - y_D} = \operatorname{tg} \varepsilon$$

Stąd otrzymujemy

$$z = (\operatorname{tg} \varepsilon) \cdot y - y_D \cdot \operatorname{tg} \varepsilon + z_D$$

Podstawiając tu (8) i (9), otrzymujemy

$$z = (\operatorname{tg} \varepsilon) \cdot y + \\ - 2 \cdot \frac{b \cdot \cos \varepsilon - R \cdot \sin \delta_0 \cdot \cos \delta_0 - b \cdot \sin^2 \delta_0}{\sin 2\delta_0} \cdot \sin \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varepsilon + R \cdot \cos \varepsilon + \\ + 2b \cdot \frac{\sin^2 \varepsilon - 2 \sin^2 \delta_0 \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{\sin 2\delta_0}$$

co po przekształceniach daje

$$z = (\operatorname{tg} \varepsilon) \cdot y + \frac{R + 2b \cdot \operatorname{tg} \delta_0 + \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{\cos \varepsilon} \quad (14)$$

1) Punkty charakterystyczne przechylonej osi zestawu kołowego.

Oś ta przecina oś „z” w punkcie V o współrzędnych (patrz rys.1 i wzór 14)

$$y_V = 0 \quad z_V = \frac{R + 2b \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{\cos \varepsilon}$$

Gdyby bistożek był ułożony na torze symetrycznie i poziomo, to jego oś symetrii podłużnej miałaby równanie $z = R$. Przechylona oś bistożka przecina się z prostą $z = R$ w punkcie W o współrzędnych y_w, z_w , przy czym (patrz rys.1) jest: $z_w = R$. Podstawiając to do (14) i przyjmując y_w zamiast y , otrzymujemy

$$R = (\operatorname{tg} \varepsilon) \cdot y_w + \frac{R + 2b \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{\cos \varepsilon}$$

skąd mamy

$$y_w = \frac{R \cdot \cos \varepsilon - R - 2b \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{\sin \varepsilon}$$

czyli

$$y_w = -(R + b \cdot \operatorname{tg} \delta_0) \cdot \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \quad (15)$$

3. Właściwości kinematyczne zestawu kołowego w rozpatrywanym położeniu

3.1 Promień toczenia się prawego koła

Jest to odległość punktu A od przechylonej osi bistożka na rys.1.

Aby ją wyznaczyć przekształcamy równanie (15) jak niżej:

$$(\operatorname{tg} \varepsilon) \cdot y - z + \frac{R + 2b \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{\cos \varepsilon} = 0$$

Jest to równanie typu $A \cdot y + B \cdot z + C = 0$

$$\text{gdzie: } A = \operatorname{tg} \varepsilon; B = -1; C = \frac{R + 2b \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{\cos \varepsilon}$$

Odległość punktu A od tej prostej według znanego wzoru z geometrii analitycznej wynosi

$$R_p = \frac{|A \cdot y_A + B \cdot z_A + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

czyli

$$R_p = \frac{\left| (\operatorname{tg} \varepsilon) \cdot b - 1 \cdot 0 + \frac{R + 2b \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{\cos \varepsilon} \right|}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1}}$$

co po przekształceniach daje

$$R_p = R + b \cdot \left(\sin \varepsilon + 2 \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (16)$$

3.2 Promień toczenia się lewego koła

Jest to odległość punktu B od przechylonej osi bistożka na rys.1.

Z geometrii analitycznej mamy:

$$R_L = \frac{|A \cdot y_B + B \cdot z_B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

co po przekształceniach daje

$$R_L = R - b \cdot \left(\sin \varepsilon - 2b \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (17)$$

3.3. Umowny promień toczenia środka bistożka

Z rysunku 1 mamy

$$R_D = \frac{z_D}{\cos \varepsilon}$$

Podstawiając tu (9) otrzymamy

$$R_D = \frac{R \cdot \cos \varepsilon + 2b \cdot \frac{\sin^2 \varepsilon - 2 \cdot \sin^2 \delta_0 \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{\sin 2\delta_0}}{\cos \varepsilon}$$

czyli

$$R_D = R + 4b \cdot \frac{2 \cos^2 \frac{\varepsilon}{2} - \sin^2 \delta_0}{\sin 2\delta_0 \cdot \cos \varepsilon} \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \quad (18)$$

3.4. Odległość podpory A od płaszczyzny symetrii bistożka

W celu wyznaczenia tej odległości przekształćmy równanie (12) jak niżej:

$$-(\operatorname{ctg} \varepsilon) \cdot y - z + b \cdot \operatorname{ctg} \delta_0 = 0$$

Jest to równanie typu $A \cdot y + B \cdot z + C = 0$, gdzie:
 $A = -\operatorname{ctg} \varepsilon$; $B = -1$; $C = b \cdot \operatorname{ctg} \delta_0$.

Odległość punktu A od tej prostej wynosi:

$$s_A = \frac{|A \cdot y_A + B \cdot z_A + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Podstawiając tu $A = -\operatorname{ctg} \varepsilon$, $B = -1$, $C = b \operatorname{ctg} \delta_0$, $y_A = b$ i $z_A = 0$, otrzymamy

$$s_A = \frac{|-(\operatorname{ctg} \varepsilon) \cdot b - 1 \cdot 0 + b \cdot \operatorname{ctg} \delta_0|}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \varepsilon + 1}}$$

co po przekształceniach daje

$$s_A = b \cdot \frac{\sin(\delta_0 - \varepsilon)}{\sin \delta_0} \quad (19)$$

3.5. Odległość podpory B od płaszczyzny symetrii bistożka

Z geometrii analitycznej mamy

$$s_B = \frac{|A \cdot y_B + B \cdot z_B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Podstawiając tu $A = -\operatorname{ctg} \varepsilon$, $B = -1$ i $C = b \cdot \operatorname{ctg} \delta_0$, $y_B = -b$ i $z_B = 0$, otrzymamy

$$s_B = \frac{|-(\operatorname{ctg} \varepsilon) \cdot (-b) - 1 \cdot 0 + b \cdot \operatorname{ctg} \delta_0|}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \varepsilon + 1}}$$

czyli

$$s_B = b \cdot \frac{\sin(\delta_0 + \varepsilon)}{\sin \delta_0} \quad (20)$$

3.6. Ubytek odległości podpory A od płaszczyzny symetrii bistożka

$$\Delta s_A = y_A - s_A$$

Podstawiając tu $y_A = b$ oraz wzór (19), otrzymamy

$$\Delta s_A = b - b \cdot \frac{\sin(\delta_0 - \varepsilon)}{\sin \delta_0}$$

czyli

$$\Delta s_A = 2b \cdot \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos \left(\delta_0 - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\sin \delta_0} \quad (21)$$

3.7. Przyrost odległości podpory B od płaszczyzny symetrii bistożka

$$\Delta s_B = s_B - |y_B|$$

Podstawiając tu $y_B = -b$ oraz wzór (20), otrzymamy

$$\Delta s_B = b \cdot \frac{\sin(\delta_0 + \varepsilon)}{\sin \delta_0} - |-b|$$

czyli

$$\Delta s_B = 2b \cdot \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos \left(\delta_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\sin \delta_0} \quad (22)$$

Z porównania punktów 3.6 oraz 3.7 wynika, że przesunięcia poprzeczne bistożka na podporach A i B nie są sobie równe, nawet w przypadku, gdy nastąpiło wymuszone przechylenie nieruchomego zestawu kołowego wokół jego osi kołysania przy pomocy ogromnej siły poprzecznej pokonującej wszelkie tarcia.

3.8. Odległość płaszczyzny podparcia BF od płaszczyzny podparcia EA

$$s_{EF} = s_A + s_B \quad (\text{rys.1})$$

Podstawiając (19) i (20), otrzymamy:

$$s_{EF} = b \cdot \frac{\sin(\delta_0 - \varepsilon)}{\sin \delta_0} + b \cdot \frac{\sin(\delta_0 + \varepsilon)}{\sin \delta_0},$$

co po przekształceniach daje

$$s_{EF} = 2b \cdot \cos \varepsilon \quad (23)$$

3.9. Skrócenie odległości pomiędzy przekrojami podparcia bistożka w wyniku jego przechylenia o kąt ε

$$\Delta s_{yz} = \Delta s_A - \Delta s_B \quad (\text{rys.1})$$

Podstawiając do powyższej zależności (21) i (22), otrzymamy

$$\Delta s_{yz} = 2b \cdot \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos \left(\delta_0 - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\sin \delta_0} - 2b \cdot \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos \left(\delta_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\sin \delta_0}$$

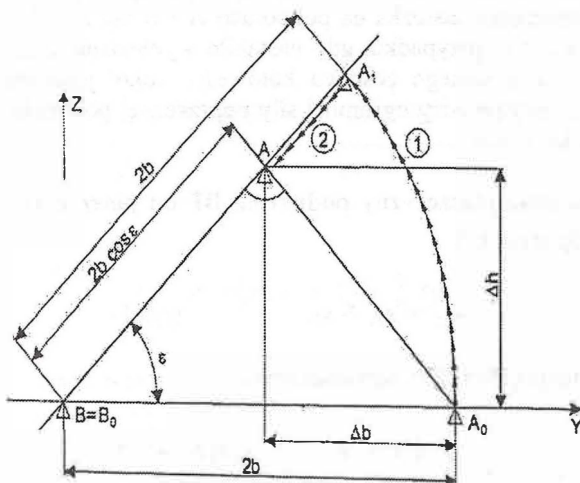
co po przekształceniach daje

$$\Delta s_{yz} = 4b \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \approx b \cdot \varepsilon^2 \quad (24)$$

3.10. Poślizgi poosiowe bistożka w płaszczyźnie y-z

Przyjmijmy, że nie miało miejsca żadne wymuszone przechylenie nieruchomego bistożka wokół jego osi kołysania. Załóżmy również, że prawa szyna toru uniosła się do góry o wielkość Δh i jednocześnie przesunęła w lewo o wielkość Δb (patrz rys.2), tak, że kąt nachylenia przechylonego zestawu kołowego do poziomu wyniósł ε , a odległość między podporami wynosi $2b \cdot \cos \varepsilon$. Oznacza to, że odległość między podporami zmalała o wielkość Δs_{yz} wyrażoną wzorem (24). Ta różnica odległości podpór może powstać tylko w wyniku poślizgów poosiowych kół na podporach A i B lub co najmniej na jednej z tych podpór.

Mechanizm tych poślizgów można sobie wyobrazić następująco (rys.2):



Rys.2. Schemat powstania poślizgów poosiowych podczas kołysania poprzecznego zestawu kołowego w torze

Najpierw odbywa się ruch ①. Jest to obrót całego układu belki (symbolizującej bistożek) wraz z podporą A_0 w płaszczyźnie y-z wokół podpory B_0 , o kąt ε do położenia A_1B_0 . Odbywa on jako czysty obrót belki wokół podpory B_0 , gdyż podczas tego ruchu nie zmienia się punkt oparcia belki o podporę B_0 , ani też nie zmienia się odległość pomiędzy podporami belki. Odległość A_1B_0 jest równa początkowej odległości A_0B_0 i wynosi $2b$.

Teraz następuje ruch ② – czyli ruch podpory A_1 wzdłuż belki do położenia A. Jest to ruch ślizgowy podpory A_1 względem belki. Droga tego ruchu ślizgowego wynosi:

$$\begin{aligned} \Delta s_{yz} &= \overline{AA_1} = \overline{BA_1} - \overline{BA} = 2b - 2b \cdot \cos \varepsilon = 2b \cdot (1 - \cos \varepsilon) = \\ &= 4b \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \approx 4b \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 = b \cdot \varepsilon^2 \end{aligned}$$

co jest wyrażone wzorem (24).

Oczywiście, w rzeczywistości ruchy ① i ② odbywają się równocześnie.

3.11. Odległość najniższego punktu bistożka od bieguna kołysania

Jest to odcinek CS na rysunku 1

$$L_{CS} = \sqrt{(y_C - y_S)^2 + (z_S - z_C)^2}$$

Podstawiając tu (5), (13) i (6) oraz $y_S = 0$, otrzymamy

$$L_{CS} = \sqrt{\left(b \cdot \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin 2\delta_0} - 0 \right)^2 + \left[b \cdot \operatorname{ctg} \delta_0 + 2b \cdot \frac{\sin(\delta_0 + \varepsilon) \cdot \sin(\delta_0 - \varepsilon)}{\sin 2\delta_0} \right]^2}$$

Po przekształceniach będzie:

$$L_{CS} = \frac{2b \cdot \cos \varepsilon}{\sin 2\delta_0} \quad (25)$$

3.12. Długość wahadła, jakim jest kołyszący się zestaw kołowy

Jest to odcinek SD na rysunku 1

$$L_{wah} = L_{SD} = L_{CS} - L_{CD}$$

Podstawiając tu (25) i (7), otrzymamy

$$L_{wah} = \frac{2b \cdot \cos \varepsilon}{\sin 2\delta_0} - \frac{R \cdot \cos \delta_0 + b \cdot \sin \delta_0}{\cos \delta_0}$$

czyli

$$L_{wah} = 2 \cdot \frac{b \cdot \cos \varepsilon - R \cdot \sin \delta_0 \cdot \cos \delta_0 - b \cdot \sin^2 \delta_0}{\sin 2\delta_0} \quad (26)$$

Długość odcinka SD, czyli odległość środka ciężkości zestawu kołowego od bieguna kołysania S jest zależna od $\cos \varepsilon$. Zatem ruch zestawu kołowego w poprzek toru nie jest wyłącznie ruchem wahadła wokół punktu S, mimo, że wysokość położenia tego punktu ponad główkami szyn jest wielkością stałą. Ruchowi wahadłowemu towarzyszy tu jeszcze przesuwanie się środka ciężkości zestawu kołowego w kierunku radialnym wahania. Tak więc zestaw kołowy jest wahadłem o długości zależnej liniowo od cosinusa kąta wychylenia.

3.13. Promień krzywizny rzutu poziomego trajektorii geometrycznego środka zestawu kołowego podczas wężykowania

$$R_{\rho_h} = \frac{Z_D}{\operatorname{tg} \varepsilon}$$

Podstawiając tu (9), otrzymamy

$$R_{\rho_h} = \frac{R \cdot \cos \varepsilon + 2b \cdot \frac{\sin^2 \varepsilon - 2 \sin^2 \delta_0 \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{\sin 2\delta_0}}{\operatorname{tg} \varepsilon}$$

czyli

$$R_{\rho_h} = \frac{\left[R \cdot \sin 2\delta_0 \cdot \cos \varepsilon + 2b \cdot \left(\sin^2 \varepsilon - 2 \sin^2 \delta_0 \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] \cdot \cos \varepsilon}{\sin 2\delta_0 \cdot \sin \varepsilon} \quad (27)$$

3.14. Krzywizna rzutu poziomego trajektorii geometrycznego środka zestawu kołowego podczas wężykowania

$$\rho_h = \frac{1}{R_{\rho_h}}$$

Podstawiając tu (27) otrzymamy

$$\rho_h = \frac{\sin 2\delta_0}{\left[R \cdot \sin 2\delta_0 \cdot \cos \varepsilon + 2b \cdot \left(\sin^2 \varepsilon - 2 \sin^2 \delta_0 \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] \cdot \cos \varepsilon} \cdot \sin \varepsilon \quad (28)$$

4. Właściwości kinematyczne zestawu kołowego, gdy kąt odchylenia jego osi od poziomu jest mały

W przypadku, gdy kąt ε jest bardzo mały, czyli $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$ oraz $\cos \varepsilon \approx 1$, zależności wyznaczone w podpunktach 2 i 3 można uprościć. Wtedy wzór (10) przyjmie postać:

$$\Delta y_D = 2 \cdot \frac{b - R \cdot \sin \delta_0 \cdot \cos \delta_0 - b \cdot \sin^2 \delta_0}{\sin 2\delta_0} \cdot \varepsilon$$

czyli ostatecznie

$$\Delta y_D = \frac{b - R \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\operatorname{tg} \delta_0} \cdot \varepsilon \quad (29)$$

Stąd

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{b - R \cdot \operatorname{tg} \delta_0} \cdot \Delta y_D \quad (30)$$

albo

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{b \left(1 - \frac{R}{b} \right) \cdot \operatorname{tg} \delta_0} \cdot \Delta y_D \quad (31)$$

Z kolei równanie (11) dla małych kątów ε przyjmie postać:

$$\Delta z_D = 4b \cdot \frac{\cos^2 \delta_0 \cdot \left(1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \right) - \frac{\varepsilon^2}{4}}{\sin 2\delta_0} \cdot \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Ponieważ w liczniku ułamka wyraz $\frac{\varepsilon^2}{4}$ jest pomijalnie mały w stosunku do pierwszego wyrazu, to można przyjąć

$$\Delta z_D = b \cdot \frac{\cos^2 \delta_0 \cdot \left(1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \right)}{\sin 2\delta_0} \cdot \varepsilon^2$$

czyli

$$\Delta z_D = b \cdot \frac{\left(1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \right)}{2 \operatorname{tg} \delta_0} \cdot \varepsilon^2$$

Podstawiając tu (31), otrzymamy

$$\Delta z_D = \frac{b \cdot \left(1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \right)}{2 \operatorname{tg} \delta_0} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \delta_0}{b^2 \cdot \left(1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \right)^2} \cdot (\Delta y_D)^2$$

czyli

$$\Delta z_D = \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{2b \cdot \left(1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \right)} \cdot (\Delta y_D)^2 \quad (32)$$

Wzór (16) dla małych kątów ε przyjmie postać:

$$R_p = R + b \cdot \varepsilon \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (33)$$

Podstawiając tu (31) otrzymamy

$$R_p = R + b \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{b \cdot \left(1 + \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0\right)} \cdot (\Delta y_D) \cdot \left[1 + \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{2b \cdot \left(1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0\right)} \cdot (\Delta y_D)\right]$$

czyli

$$R_p = R + \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0} \cdot (\Delta y_D) \cdot \left[1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \delta_0}{2} \cdot \frac{\Delta y_D}{b \cdot \left(1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0\right)}\right] \quad (34)$$

Wzór (17) dla małych kątów ε przyjmie postać

$$R_L = R - b \cdot \varepsilon \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{2} \cdot \varepsilon\right) \quad (35)$$

Podstawiając tu (31) otrzymamy

$$R_L = R - b \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{b \cdot \left(1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0\right)} \cdot (\Delta y_D) \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{b \cdot \left(1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0\right)} \cdot (\Delta y_D)\right]$$

czyli

$$R_L = R - \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0} \cdot (\Delta y_D) \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \delta_0}{2} \cdot \frac{\Delta y_D}{b \cdot \left(1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0\right)}\right] \quad (36)$$

Wzór (18) dla małych kątów ε przyjmie postać

$$R_D = R + 4b \cdot \frac{2 - \sin^2 \delta_0}{\sin 2\delta_0} \cdot \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Podstawiając tu (31) otrzymamy

$$R_D = R + 4b \cdot \frac{2 - \sin^2 \delta_0}{\sin 2\delta_0} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \delta_0}{4b^2 \cdot \left(1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0\right)^2} \cdot (\Delta y_D)^2$$

czyli

$$R_D = \frac{(2 - \sin^2 \delta_0) \cdot \operatorname{tg}^2 \delta_0}{b \cdot \sin 2\delta_0 \cdot \left(1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0\right)^2} \cdot (\Delta y_D)^2 \quad (37)$$

Wzór (25) dla małych kątów ε przyjmie postać

$$l_{cs} = \frac{2b}{\sin 2\delta_0} \quad (38)$$

Wzór (26) dla małych kątów ε przyjmie postać

$$l_{wah} = 2 \cdot \frac{b - R \cdot \sin \delta_0 \cdot \cos \delta_0 - b \cdot \sin^2 \delta_0}{\sin 2\delta_0}$$

co po przekształceniach daje

$$l_{wah} = \frac{b \left(1 - \frac{R}{b}\right) \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\operatorname{tg} \delta_0} \quad (39)$$

Zatem dla małych kątów ε odległość środka ciężkości przechylonego zestawu kołowego od bieguna kołysania jest wielkością stałą, niezależną od kąta wychylenia ε . Ponieważ l_{wah} jest liczbą dużą w porównaniu z wymiarami b i R zestawu kołowego, to można przyjąć, że dla małych kątów ε kołyszący się zestaw kołowy jest wahadłem matematycznym o długości l_{wah} określonej wzorem (39).

Z kolei wzór (28) dla małych kątów ε przyjmie postać:

$$\rho_h = - \frac{\sin 2\delta_0}{R \cdot \sin 2\delta_0 + 2b \cdot \left(\varepsilon^2 - 2 \sin^2 \delta_0 \cdot \frac{\varepsilon^2}{4}\right)} \cdot \varepsilon$$

czyli

$$\rho_h = - \frac{1}{R \cdot \left(1 + \frac{b}{R} \cdot \frac{2 - \sin^2 \delta_0}{\sin 2\delta_0} \cdot \varepsilon^2\right)} \cdot \varepsilon$$

Podstawiając tu (31) otrzymamy

$$\rho_h = - \frac{1}{R \cdot \left[1 + \frac{R}{b} \cdot \frac{2 - \sin^2 \delta_0}{\sin 2\delta_0} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \delta_0}{b^2 \cdot \left(1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0\right)^2} \cdot (\Delta y_D)^2\right]} \cdot \varepsilon$$

czyli

$$\rho_h = - \frac{1}{R \cdot \left[1 + \frac{2 - \sin^2 \delta_0}{2 \cdot \cos \delta_0} \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{\left(1 - \frac{R}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0\right)^2} \cdot \frac{(\Delta y_D)^2}{R \cdot b}\right]} \cdot \varepsilon$$

Wyrażenie $\frac{(\Delta y_D)^2}{R \cdot b}$ jest tak małe, że nawet dla dość dużego kąta δ_0 ($\sim 45^\circ$) drugi wyraz w nawiasie kwadratowym jest pomijalnie mały w zestawieniu z 1.

Wobec tego można zapisać:

$$\rho_h = -\frac{1}{R} \cdot \varepsilon \quad (40)$$

Podstawiając tu (31) otrzymamy

$$\rho_h = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\text{tg} \delta_0}{b \cdot \left(1 - \frac{R}{b} \cdot \text{tg} \delta_0\right)} \cdot (\Delta y_D) \quad (41)$$

5. Ekwiwalentna stożkowatość

Oznaczmy

$$\frac{\text{tg} \delta_0}{1 - \frac{R}{b} \cdot \text{tg} \delta_0} = \text{tg} \delta_{\text{ekw}} \quad (42)$$

Dla zestawu kołowego, którego $\text{tg} \delta_0 = \frac{1}{40} = 0,025$, wartość R wynosi ok. 0,5 m, natomiast b wynosi $\frac{1453}{2} = 726,5 \text{ mm}$.

$$\text{Zatem mamy } \text{tg} \delta_{\text{ekw}} = \frac{0,025}{1 - \frac{0,5}{0,7265} - 0,025} = 0,0254$$

Podstawiając (42) do (41) otrzymujemy

$$\rho_h = -\frac{\text{tg} \delta_{\text{ekw}}}{R \cdot b} \cdot (\Delta y_D) \quad (43)$$

Podstawiając (42) do (31) otrzymujemy

$$\varepsilon = \frac{\text{tg} \delta_{\text{ekw}}}{b} \cdot (\Delta y_D) \quad (44)$$

Wzór (32) przyjmie postać

$$\Delta z_D = \frac{\text{tg} \delta_{\text{ekw}}}{2b} \cdot (\Delta y_D)^2 \quad (45)$$

Wzór (34) przyjmie postać

$$R_p = R + (\text{tg} \delta_{\text{ekw}}) \cdot (\Delta y_D) \cdot \left[1 + \frac{\text{tg} \delta_0 \cdot \text{tg} \delta_{\text{ekw}}}{2b} \cdot (\Delta y_D)\right] \quad (46)$$

Wzór (36) przyjmie postać

$$R_L = R - (\text{tg} \delta_{\text{ekw}}) \cdot (\Delta y_D) \cdot \left[1 - \frac{\text{tg} \delta_0 \cdot \text{tg} \delta_{\text{ekw}}}{2b} \cdot (\Delta y_D)\right] \quad (47)$$

Wzór (37) przyjmie postać

$$R_D = R + \frac{(2 - \sin^2 \delta_0) \cdot \text{tg}^2 \delta_{\text{ekw}}}{b \cdot \sin 2\delta_0} \cdot (\Delta y_D)^2 \quad (48)$$

Wzór (39) przyjmie postać

$$l_{\text{wah}} = \frac{b}{\text{tg} \delta_{\text{ekw}}} \quad (49)$$

Dla $b = 0,7265$ oraz dla $\text{tg} \delta_{\text{ekw}} = 0,0254$ mamy $l_{\text{wah}} = 28,602 \text{ m}$.

Jak wiadomo, krzywizna dowolnej krzywej wyraża się wzorem:

$$\rho_h = \frac{\left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right|}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}$$

Wyrażenie to dla małych wartości $\left| \frac{dy}{dx} \right|$ przyjmie postać:

$$\rho_h = \left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right|$$

Fizyczny sens ma jedynie wartość:

$$\rho_h = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Podstawiając to do (43) otrzymujemy

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\text{tg} \delta_{\text{ekw}}}{R \cdot b} \cdot (\Delta y_D)$$

czyli

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\text{tg} \delta_{\text{ekw}}}{R \cdot b} \cdot (\Delta y_D) = 0 \quad (50)$$

6. Zamiana przyrostów współrzędnych środka ciężkości zestawu kołowego na współrzędne uogólnione

Wyrażając przyrosty współrzędnych środka ciężkości zestawu kołowego Δy_D oraz Δz_D jako przesunięcia uogólnione „y” oraz „z” tego środka ciężkości, mierzone od położenia środkowego w torze, otrzymamy odpowiednio równania (43), (44), (45), (46), (47), (48) i (50) w następującej postaci:

$$\rho_h = -\frac{\operatorname{tg} \delta_{ekw}}{R \cdot b} \cdot y \quad (51)$$

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \delta_{ekw}}{b} \cdot y \quad (52)$$

$$z = \frac{\operatorname{tg} \delta_{ekw}}{2b} \cdot y^2 \quad (53)$$

$$R_p = R + (\operatorname{tg} \delta_{ekw}) \cdot y \cdot \left(1 + \frac{y \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \operatorname{tg} \delta_{ekw}}{2b} \right) \quad (54)$$

$$R_L = R - (\operatorname{tg} \delta_{ekw}) \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \operatorname{tg} \delta_{ekw}}{2b} \right) \quad (55)$$

$$R_D = R + \frac{(2 - \sin^2 \delta_0) \cdot \operatorname{tg}^2 \delta_{ekw}}{b \cdot \sin 2\delta_0} \cdot y^2$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\operatorname{tg} \delta_{ekw}}{R \cdot b} \cdot y = 0 \quad (56)$$

Nie trudno zauważyć, że wzory (51), (52), (54) i (55) są odpowiednikami wzorów wyprowadzonych przez Klingela, zacytowanych w [1], wzory (5), (3), (1) i (2), str. str. 37 i 38. Zamiast δ_0 zawartego we wzorach Klingelowskich tutaj mamy wyrażenie δ_{ekw} . Wzór (53), a także wzory (52) i (48) nie mają swych odpowiedników Klingelowskich, gdyż nie mogły one zostać wyprowadzone przy założeniu, że wpływ kąta przechylenia zestawu kołowego na przebieg rozpatrywanego zjawiska jest pomijalnie mały.

7. Równanie rzutu poziomego trajektorii środka zestawu kołowego w ruchu wężykowania w płaszczyźnie poziomej

Równanie różniczkowe (56) ma następujące szczególne rozwiązanie:

$$y = y_a \cdot \sin \left[\left(\sqrt{\frac{\operatorname{tg} \delta_{ekw}}{R \cdot b}} \right) \cdot x \right] \quad (57)$$

Jest to odpowiednik wzoru Klingelowskiego, zacytowanego w [1], wzór (7), str. 38 z tą różnicą, że rolę stożkowatości rzeczywistej δ_0 pełni stożkowatość ekwiwalentna δ_{ekw} .

Podstawiając tu (49), otrzymamy:

$$y = y_a \cdot \sin \left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot x \right) \quad (58)$$

Dla

$$x = 0 + n \cdot \pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}, \quad (59)$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą będzie:

$$y = 0 \quad (60)$$

Amplituda wężykowania wystąpi wówczas, gdy $x = x_a$ i wyniesie ona $y_{max} = y_a$, gdzie:

$$x_a = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}} + 2n \cdot \pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}} \quad (61)$$

Gdy prześwit toru wynosi 1435^{+10}_{-5} mm, a szerokość prowadna zestawu kołowego jest $1428^{-1,5}_{-16}$ mm, występuje maksimum $y_a = 16,5$ mm.

8. Równanie rzutu pionowego trajektorii środka zestawu kołowego w ruchu podskakiwania w płaszczyźnie pionowej

Wraz z wężykowaniem zestawu kołowego w torze, którego trajektoria jest określona wzorem (58), bezustannie występuje też podskakiwanie geometrycznego środka zestawu kołowego, określone wzorem (53). Podstawiając (58) i (48) do (53) otrzymamy

$$z = \frac{y_a^2}{2l_{wah}} \cdot \sin^2 \left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot x \right) \quad (62)$$

Dla $x = 0 + n\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}$ otrzymamy $z = 0$ (63)

Amplituda podskakiwania wystąpi gdy $x = x_c$, gdzie:

$$x_c = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}} + n \cdot \pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}} \quad (64)$$

i wyniesie ona

$$z_{max} = z_a = \frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah}} \quad (65)$$

Gdy $y_a = 16,5 \text{ mm} = 0,0165 \text{ m}$, a $l_{wah} = 28,602 \text{ m}$, to mamy $z_a = \frac{0,0165^2}{2 \cdot 28,602} = 0,0000048 \text{ m} = 0,0048 \text{ mm}$.

9. Długość fali wężykowania środka zestawu kołowego

Okresem funkcji (58) jest 2π . Zatem długość fali trajektorii wężykowania wynosi:

$$L_{fh} = 2\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}} \quad (66)$$

Długość fali wężykowania zestawu kołowego nie zależy od jego przemieszczenia y ani od kąta ϵ .

10. Długość fali podskakiwania środka zestawu kołowego

Okresem funkcji (62) jest π , a wykresem trajektorii tego ruchu jest fala sinusa podniesionego do kwadratu.

Długość tej fali wyniesie:

$$L_{fv} = \pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}} \quad (67)$$

Długość fali trajektorii podskakiwania L_{fv} jest równa połowie długości fali trajektorii wężykowania L_{fh}

$$L_{fv} = \frac{L_{fh}}{2} \quad (68)$$

Gdy wartość R jest ok. 0,5 m, a $l_{wah} = 28,602 \text{ m}$, to $L_{fh} = 23,75 \text{ m}$, a $L_{fv} = 11,875 \text{ m}$

11. Kąt pod jakim trajektoria środka zestawu kołowego jest odchylona w płaszczyźnie poziomej od podłużnej osi symetrii toru

Zależność opisująca ten kąt ma następującą postać:

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{y_a}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot x\right) \quad (69)$$

Wartość maksymalna kąta φ wystąpi, gdy

$$x = 0 + 2n\pi\sqrt{R \cdot l_{wah}} \quad (70)$$

i wyniesie ona

$$\varphi_{\max} = \varphi_0 = \frac{y_a}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \quad (71)$$

Dla $x = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}} + n\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}$
będzie $\varphi = 0$ (72)

Dla $x = \pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}} + 2n\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}$
będzie $\varphi_{\min} = -\varphi_0$ (73)

12. Kąt, pod jakim trajektoria środka ciężkości zestawu kołowego jest odchylona od podłużnej osi symetrii toru w płaszczyźnie pionowej

Kąt ten wyraża zależność:

$$\psi = \frac{d_z}{d_x} = \frac{y_a^2}{2l_{wah} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot 2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot x\right)$$

Podstawiając tu (63) i przekształcając, otrzymamy

$$\psi = \frac{y_a^2}{2L_{wah} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot \sin\left(\frac{2}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot x\right) \quad (74)$$

Dla $x = 0 + n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}$ będzie $\varphi = 0$.

Maksymalna wartość kąta ψ wystąpi wtedy, kiedy:

$$\frac{2}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n,$$

czyli gdy

$$x = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} + \pi \cdot n \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}} \quad (75)$$

Ta maksymalna wartość wyniesie:

$$\psi_{\max} = \psi_a = \frac{y_a^2}{2l_{wah} \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \quad (76)$$

Dla $x = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}} + n \cdot \pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}$
będzie $\psi = 0$

Dla $x = \frac{3\pi}{4} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}} + n \cdot \pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}$
otrzymamy $\psi_{\min} = -\psi_a$ (77)

13. Krzywizna rzutu poziomego trajektorii środka ciężkości zestawu kołowego

Zależność wyrażająca tę krzywiznę ma następującą postać:

$$\rho_{oh} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y_a}{R \cdot l_{wah}} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot x\right) \quad (78)$$

Dla $x = 0 + n \cdot \pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}$ będzie $\rho_{oh} = 0$.

Wartość maksymalna tej krzywizny wystąpi, gdy:

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}} + 2n \cdot \pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}$$

i wyniesie ona

$$\rho_{oh} = \rho_{oha} = -\frac{y_a}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \quad (79)$$

Dla $x = \frac{3\pi}{2} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}} + 2n \cdot \pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}$

otrzymamy $\rho_{ohmin} = -\rho_{oha}$

Dla $x = 0 + n \cdot \pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}$ otrzymamy $\rho = 0$.

14. Krzywizna rzutu pionowego trajektorii środka ciężkości zestawu kołowego

Krzywiznę tę opisuje zależność:

$$\rho_{ov} = \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d\psi}{dx} = \frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot \cos\left(\frac{2}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot x\right), \quad (80)$$

którą po odpowiednich przekształceniach można zapisać w postaci:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} - \frac{4}{R \cdot l_{wah}} \cdot \frac{y_a^2}{2l_{wah}^2} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot x\right)$$

Podstawiając tu (62), otrzymamy

$$\rho_{ov} = \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} - \frac{4}{R \cdot l_{wah}} \cdot z \quad (81)$$

Wzór (80) osiąga maksimum, gdy:

$$x = 0 + n\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}},$$

natomiast minimum, gdy:

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}} + n\pi \sqrt{R \cdot l_{wah}}$$

To maksimum wynosi

$$\rho_{ova} = \frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} \quad (82)$$

a minimum

$$\rho_{ovmin} = -\rho_{ova} \quad (83)$$

Podskakiwanie środka ciężkości zestawu kołowego nie jest ruchem harmonicznym, gdyż druga pochodna równania trajektorii tego ruchu nie jest proporcjonalna do przemieszczenia tego środka ciężkości (wzór 81), lecz jest przesunięta o pewną fazę.

15. Składowy ruch poprzeczny środka zestawu kołowego podczas wężykowania w torze

Równanie składowego ruchu poprzecznego środka zestawu kołowego wyznaczmy z wzoru (58), zakładając, że zestaw kołowy porusza się wzdłuż toru ruchem jednostajnym o prędkości v_0 ; zatem $x = V_0 \cdot t$, a wzór (58) przyjmie postać

$$y = y_a \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot t\right) \quad (84)$$

Jest to ruch harmoniczny. Okresem tego ruchu jest

$$T_y = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{R \cdot l_{wah}}}{V_0} \quad (85)$$

a częstotliwością drgań jest

$$n_y = \frac{1}{T_y} = \frac{V_0}{2\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \quad (86)$$

Gdy R jest ok. 0,5 m, $l_{wah} = 28,602$ m, a v_0 wynosi 144 km/h = 40 m/s, to

$$T = \frac{\sqrt{0,5 \cdot 28,602}}{40} = 0,59 \text{ sek.}$$

Oznacza to, że częstotliwość wężykowania zestawu kołowego będzie: $n_y = 1,7 \frac{1}{s}$

Z wzoru (84) otrzymujemy:

– dla $t = 0$ jest $y = y_0 = 0$

– dla $t = \frac{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4V_0}$ jest

$$y_{45} = y_0 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 0,707 y_a$$

– dla $t = \frac{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{2V_0}$ jest

$y_{90} = y_a \cdot \sin \frac{\pi}{2} = y_a$, co liczbowo wynosi 0,0165 m

$$- \text{ dla } t = \frac{3\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}}{4V_0} \quad \text{jest}$$

$$y_{135} = y_a \cdot \sin \frac{3\pi}{4} = 0,707 y_a$$

$$- \text{ dla } t = \frac{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}}{2V_0} \quad \text{jest}$$

$$y_{180} = y_a \cdot \sin \pi = y_a$$

$$- \text{ dla } t = \frac{5\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}}{4V_0} \quad \text{jest}$$

$$y_{225} = y_a \cdot \sin \frac{5\pi}{4} = -0,707 y_a$$

$$- \text{ dla } t = \frac{3\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}}{2V_0} \quad \text{jest}$$

$$y_{270} = y_a \cdot \sin \frac{3\pi}{2} = -y_a$$

$$- \text{ dla } t = \frac{7\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}}{4V_0} \quad \text{jest}$$

$$y_{315} = y_a \cdot \sin \frac{7\pi}{4} = -0,707 y_a$$

$$- \text{ dla } t = \frac{2\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}}{V_0} \quad \text{jest}$$

$$y_{360} = y_a \cdot \sin 2\pi = 0$$

16. Składowa prędkość poprzeczna środka zestawu kołowego podczas wężykowania w torze

Prędkość tę otrzymamy różniczkując równanie (84)

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{y_a}{\sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}} \cdot V_0 \cdot \cos \left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}} \cdot V_0 \cdot t \right) \quad (87)$$

Z wzoru (86) otrzymujemy

$$- \text{ dla } t = 0 \quad \text{jest} \quad V_y = (V_y)_0 = \frac{y_a}{\sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}} \cdot V_0$$

$$- \text{ dla } t = \frac{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}}{4V_0} \quad \text{jest}$$

$$(V_y)_{45} = (V_y)_0 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 0,707 \cdot (V_y)_0$$

$$- \text{ dla } t = \frac{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}}{2V_0} \quad \text{jest}$$

$$(V_y)_{90} = (V_y)_0 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$- \text{ dla } t = \frac{3\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}}{4V_0} \quad \text{jest}$$

$$(V_y)_{135} = (V_y)_0 \cdot \cos \frac{3\pi}{4} = -0,707 \cdot (V_y)_0$$

$$- \text{ dla } t = \frac{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}}{V_0} \quad \text{jest}$$

$$(V_y)_{180} = (V_y)_0 \cdot \cos \pi = -(V_y)_0$$

$$- \text{ dla } t = \frac{5\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}}{4V_0} \quad \text{jest}$$

$$(V_y)_{225} = (V_y)_0 \cdot \cos \frac{5\pi}{4} = -0,707 \cdot (V_y)_0$$

$$- \text{ dla } t = \frac{3\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}}{2V_0} \quad \text{jest}$$

$$(V_y)_{270} = (V_y)_0 \cdot \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$- \text{ dla } t = \frac{7\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}}{4V_0} \quad \text{jest}$$

$$(V_y)_{315} = 0,707 \cdot (V_y)_0$$

$$- \text{ dla } t = \frac{2\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}}{V_0} \quad \text{jest}$$

$$(V_y)_{360} = (V_y)_0$$

17. Przyspieszenie poprzeczne środka zestawu kołowego podczas wężykowania w torze

Zależność opisującą to przyspieszenie możemy uzyskać różniczkując równanie (87)

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{y_a}{R \cdot l_{\text{wah}}} \cdot v_0^2 \cdot \sin \left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}} \cdot v_0 \cdot t \right) \quad (88)$$

Z wzoru (88) otrzymujemy

$$- \text{ dla } t = 0 \quad \text{jest} \quad (a_y)_0 = 0$$

$$- \text{ dla } t = \frac{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{\text{wah}}}}{4V_0} \quad \text{jest}$$

$$(d_y)_{45} = -\frac{y_a}{R \cdot l_{\text{wah}}} \cdot v_0^2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -0,707 \cdot \frac{y_a}{R \cdot l_{\text{wah}}} \cdot v_0^2$$

$$- \text{ dla } t = \frac{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{2V_0} \text{ jest}$$

$$(d_y)_{90} = -\frac{y_a}{R \cdot l_{wah}} \cdot V_0^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{y_a}{R \cdot l_{wah}}$$

$$- \text{ dla } t = \frac{3\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4V_0} \text{ jest}$$

$$(a_y)_{135} = -\frac{y_a}{R \cdot l_{wah}} \cdot V_0^2 \cdot \sin \frac{3\pi}{4} = -0,707 \cdot \frac{y_a}{R \cdot l_{wah}} \cdot V_0^2$$

$$- \text{ dla } t = \frac{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{V_0} \text{ jest } (a_y)_{180} = 0$$

$$- \text{ dla } t = \frac{5\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4V_0} \text{ jest}$$

$$(a_y)_{225} = -\frac{y_a}{R \cdot l_{wah}} \cdot V_0^2 \cdot \sin \frac{5\pi}{4} = -0,707 \cdot \frac{y_a}{R \cdot l_{wah}} \cdot V_0^2$$

$$- \text{ dla } t = \frac{3\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{2V_0} \text{ jest}$$

$$(a_y)_{270} = -\frac{y_a}{R \cdot l_{wah}} \cdot V_0^2 \cdot \sin \frac{3\pi}{2} = \frac{y_a}{R \cdot l_{wah}} \cdot V_0^2$$

$$- \text{ dla } t = \frac{7\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4V_0} \text{ jest}$$

$$(a_y)_{315} = -\frac{y_a}{R \cdot l_{wah}} \cdot V_0^2 \cdot \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{y_a}{R \cdot l_{wah}} \cdot V_0^2$$

$$- \text{ dla } t = \frac{2\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{V_0} \text{ jest}$$

$$(a_y)_{360} = -\frac{y_a}{R \cdot l_{wah}} \cdot V_0^2 \cdot \sin 2\pi = 0$$

18. Składowy ruch pionowy środka zestawu kołowego podczas podskakiwania w torze

Równanie składowego ruchu pionowego środka zestawu kołowego wyznaczmy z wzoru (62), zakładając, że zestaw kołowy porusza się wzdłuż toru ruchem jednostajnym z prędkością v_0 ; zatem $x = V_0 \cdot t$, a wzór (62) przyjmie postać

$$z = \frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah}} \cdot \sin^2 \left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot t \right) \quad (89)$$

Nie jest to ruch harmoniczny, lecz zależny od kwadratu sinusa fazy. Okresem ruchu jest

$$T_z = \pi \cdot \frac{\sqrt{R \cdot l_{wah}}}{V_0} \quad (90)$$

a częstotliwością drgań jest

$$n_z = \frac{1}{T_z} = \frac{V_0}{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \quad (91)$$

Częstotliwość tego ruchu jest dwukrotnie większa niż częstotliwość drgań składowego ruchu poprzecznego środka zestawu kołowego podczas wężykowania (patrz wzór 86), czyli wynosi około 3,5 Hz, wobec czego:

$$n_z = \frac{1}{0,48} = 2,08333 \approx 2,08 \frac{1}{s} = 2,08 \text{ Hz}$$

Z wzoru (89) otrzymujemy

$$- \text{ dla } t = 0 \text{ jest } z_0 = 0$$

$$- \text{ dla } t = \frac{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4V_0} \text{ jest}$$

$$z_{45} = \frac{y_a^2}{2l_{wah}} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{y_a^2}{4l_{wah}}$$

$$- \text{ dla } t = \frac{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{2V_0} \text{ jest}$$

$$z_{90} = z_a = \frac{y_a^2}{2l_{wah}} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2} = \frac{y_a^2}{2l_{wah}}$$

$$- \text{ dla } t = \frac{3\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4V_0} \text{ jest}$$

$$z_{135} = \frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah}} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{4} = \frac{y_a^2}{4 \cdot l_{wah}}$$

$$- \text{ dla } t = \frac{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{V_0} \text{ jest}$$

$$z_{180} = \frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah}} \cdot \sin^2 \pi = 0$$

$$- \text{ dla } t = \frac{5\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4V_0} \text{ jest}$$

$$z_{225} = \frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah}} \cdot \sin^2 \frac{5\pi}{4} = \frac{y_a^2}{4 \cdot l_{wah}}$$

$$- \text{ dla } t = \frac{3\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{2V_0} \text{ jest}$$

$$z_{270} = \frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah}} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{2} = \frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah}}$$

$$\begin{aligned}
- \text{ dla } t &= \frac{7\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4V_0} \quad \text{jest} \\
z_{315} &= \frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah}} \cdot \sin^2 \frac{7\pi}{4} = \frac{y_a^2}{4 \cdot l_{wah}} \\
- \text{ dla } t &= \frac{2\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{V_0} \quad \text{jest} \\
z_{360} &= \frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah}} \cdot \sin^2 2\pi = 0
\end{aligned}$$

19. Składowa prędkość pionowa środka zestawu kołowego podczas podskakiwania w torze

Otrzymamy ją różniczkując równanie (89)

$$V_z = \frac{dz}{dt} = \frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot 2 \sin \left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot t \right) \cdot \cos \left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot t \right)$$

czyli

$$V_z = \frac{dz}{dt} = \frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot \sin 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot t \right) \quad (92)$$

Z wzoru (92) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
- \text{ dla } t &= 0 \quad \text{jest} \quad (v_z)_0 = 0 \\
- \text{ dla } t &= \frac{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4V_0} \quad \text{jest} \\
(V_z)_{45} &= \frac{y_a^2}{2L_{wah} \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot \sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{y_a^2}{2l_{wah} \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \\
- \text{ dla } t &= \frac{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{2V_0} \quad \text{jest} \\
(V_z)_{90} &= \frac{y_a^2}{2 \cdot L_{wah} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot \sin 2 \frac{\pi}{2} = 0 \\
- \text{ dla } t &= \frac{3\pi \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4 \cdot V_0} \quad \text{jest} \\
(V_z)_{135} &= \frac{y_a^2}{2 \cdot L_{wah} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot \sin 2 \frac{3\pi}{4} = -\frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \\
- \text{ dla } t &= \frac{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{V_0} \quad \text{jest} \\
(V_z)_{180} &= \frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot \sin 2\pi = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \text{ dla } t &= \frac{5\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4V_0} \quad \text{jest} \\
(V_z)_{225} &= \frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot \sin 2 \frac{5\pi}{4} = -\frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \\
- \text{ dla } t &= \frac{3\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{2V_0} \quad \text{jest} \\
(V_z)_{270} &= \frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot \sin 2 \frac{3\pi}{2} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \text{ dla } t &= \frac{7\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4V_0} \quad \text{jest} \\
(V_z)_{315} &= \frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot \sin 2 \frac{7\pi}{2} = -\frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \text{ dla } t &= \frac{2\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{V_0} \quad \text{jest} \\
(V_z)_{360} &= \frac{y_a^2}{2 \cdot l_{wah} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot \sin 2 \cdot 2\pi = 0
\end{aligned}$$

20. Przyspieszenie pionowe środka zestawu kołowego podczas podskakiwania w torze

Otrzymamy je, różniczkując równanie (92)

$$a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dV_z}{dt} = \frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot V_0^2 \cdot \cos 2 \left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot t \right) \quad (93)$$

Z wzoru (93) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
- \text{ dla } t &= 0 \quad \text{jest} \quad (a_z)_0 = \frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot V_0^2 \\
- \text{ dla } t &= \frac{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4V_0} \quad \text{jest} \\
(a_z)_{45} &= \frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot V_0^2 \cdot \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\
- \text{ dla } t &= \frac{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{2V_0} \quad \text{jest} \\
(a_z)_{90} &= \frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot V_0^2 \cdot \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot V_0^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \text{ dla } t &= \frac{3\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4V_0} \quad \text{jest} \\
(a_z)_{135} &= \frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot V_0^2 \cdot \cos 2 \frac{3\pi}{4} = 0 \\
- \text{ dla } t &= \frac{\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{V_0} \quad \text{jest} \\
(a_z)_{180} &= \frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot V_0^2 \cdot \cos 2\pi = \frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot V_0^2 \\
- \text{ dla } t &= \frac{5\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4V_0} \quad \text{jest} \\
(a_z)_{225} &= \frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot V_0^2 \cdot \cos 2 \cdot \frac{5\pi}{4} = 0 \\
- \text{ dla } t &= \frac{3\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{2V_0} \quad \text{jest} \\
(a_z)_{270} &= \frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot V_0^2 \cdot \cos 2 \cdot \frac{3\pi}{2} = -\frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot V_0^2 \\
- \text{ dla } t &= \frac{7\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4V_0} \quad \text{jest} \\
(a_z)_{315} &= \frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot V_0^2 \cdot \cos 2 \cdot \frac{7\pi}{4} = 0 \\
- \text{ dla } t &= \frac{2\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{V_0} \quad \text{jest} \\
(a_z)_{360} &= \frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot V_0^2 \cdot \cos 2 \cdot 2\pi = \frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot V_0^2
\end{aligned}$$

21. Kąt nachylenia osi zestawu kołowego do poziomu w płaszczyźnie prostopadłej do podłużnej płaszczyzny symetrii toru podczas kołysania

Kąt ten został przedstawiony w postaci zależności (52)

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \delta_{ekw}}{b} \cdot y$$

Podstawiając tu (49) otrzymamy

$$\varepsilon = \frac{y}{l_{wah}}$$

Podstawiając następnie zależność (58) otrzymamy

$$\varepsilon = \frac{y_a}{l_{wah}} \cdot \sin \left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot x \right) \quad (94)$$

Dla stałej prędkości zestawu kołowego wzdłuż toru, równej v_0 , mamy $x = V_0 \cdot t$. Zatem

$$\varepsilon = \frac{y_a}{l_{wah}} \cdot \sin \left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot t \right) \quad (95)$$

Nie jest to ruch harmoniczny, gdyż jest on krzywoliniowy. Odbywa się on po łuku koła o promieniu l_{wah} . Okresem tego ruchu jest

$$T_{koł} = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{R \cdot l_{wah}}}{V_0}$$

a częstotliwość drgań wynosi

$$n_{koł} = \frac{1}{T_{koł}} = \frac{V_0}{2\pi \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}}$$

Jest to częstotliwość identyczna z częstotliwością harmonicznego ruchu wężykowania.

Z wzoru (94) mamy:

$$\begin{aligned}
- \text{ dla } t &= 0 \quad \text{jest} \quad \varepsilon = 0 \\
- \text{ dla } t &= \frac{\pi \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4V_0} \quad \text{jest} \\
\varepsilon_{90} &= \frac{y_a}{l_{wah}} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 0,707 \frac{y_a}{l_{wah}} \\
- \text{ dla } t &= \frac{\pi \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{2V_0} \quad \text{jest} \\
\varepsilon_{90} &= \varepsilon_a = \frac{y_a}{l_{wah}} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{y_a}{l_{wah}} \\
- \text{ dla } t &= \frac{3\pi \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4V_0} \quad \text{jest} \\
\varepsilon_{135} &= \frac{y_a}{l_{wah}} \cdot \sin \frac{3\pi}{4} = 0,707 \frac{y_a}{l_{wah}} \\
- \text{ dla } t &= \frac{\pi \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{V_0} \quad \text{jest} \\
\varepsilon_{180} &= \frac{y_a}{l_{wah}} \cdot \sin \pi = 0 \\
- \text{ dla } t &= \frac{5\pi \sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4V_0} \quad \text{jest} \\
\varepsilon_{225} &= \frac{y_a}{l_{wah}} \cdot \sin \frac{5\pi}{4} = -0,707 \frac{y_a}{l_{wah}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \text{ dla } t &= \frac{3\pi\sqrt{R \cdot l_{wah}}}{2} \quad \text{jest} \\
\varepsilon_{270} &= \frac{y_a}{l_{wah}} \cdot \sin \frac{3\pi}{2} = -\frac{y_a}{l_{wah}} \\
- \text{ dla } t &= \frac{7\pi\sqrt{R \cdot l_{wah}}}{4} \quad \text{jest} \\
\varepsilon_{315} &= \frac{y_a}{l_{wah}} \cdot \sin \frac{7\pi}{4} = -0,707 \frac{y_a}{l_{wah}} \\
- \text{ dla } t &= \frac{2\pi\sqrt{R \cdot l_{wah}}}{V_0} \quad \text{jest} \\
\varepsilon_{360} &= \frac{y_a}{l_{wah}} \cdot \sin 2\pi = 0
\end{aligned}$$

22. Prędkość kątowna środka zestawu kołowego podczas kołysania w torze

Prędkość tę możemy otrzymać po zróżniczkowaniu równania (94). Przyjmie ona następującą postać:

$$\omega = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{y_a}{l_{wah} \cdot \sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot t\right) \quad (96)$$

23. Prędkość obwodowa środka zestawu kołowego podczas kołysania w torze

Prędkość obwodowa środka zestawu kołowego ma postać:

$$V_y = \omega \cdot l_{wah}$$

Podstawiając tu równanie (95), otrzymamy

$$V_{obw} = \frac{y_a}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot t\right)$$

Jest to wzór identyczny z wzorem (87).

24. Przyspieszenie kątowne środka zestawu kołowego podczas kołysania w torze

Otrzymamy je, różniczkując równanie (95)

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{y_a}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot V_0^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot t\right) \quad (97)$$

25. Przyspieszenie obwodowe środka zestawu kołowego podczas kołysania w torze

$$a_{obw} = l_{wah} \cdot \frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$$

Podstawiając tu równanie (97), otrzymujemy

$$a_{obw} = -\frac{y_a}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot V_0^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot t\right)$$

Jest to równanie identyczne z wzorem (88).

26. Przyspieszenie dośrodkowe środka zestawu kołowego podczas kołysania w torze

Przyspieszenie to ma następującą postać:

$$a_{cp} = \frac{V_{obw}^2}{l_{wah}}$$

Podstawiając tu (96) otrzymamy

$$a_{cp} = \frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot V_0^2 \cdot \cos^2\left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot l_{wah}}} \cdot V_0 \cdot t\right) \quad (98)$$

Największe przyspieszenie dośrodkowe występuje dla $t = 0$ i wynosi ono:

$$a_{cp} = \frac{y_a^2}{R \cdot l_{wah}^2} \cdot V_0^2 \quad (99)$$

27. Podsumowanie

Wszystkie prędkości i przyspieszenia opisane w niniejszej części III pracy wynikają z faktu, że zestaw kołowy na torze podczas wężykowania podlega dwóm ruchom składowym, a mianowicie:

1. Obracania się wokół własnej, chwilowej osi obrotu. Jest to prosta łącząca ze sobą punkty styku obu kół z szynami. Ta oś obracania się przemieszcza się wzdłuż kierunku toczenia się zestawu kołowego.
2. Kołysania ruchem wahadła w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku toru wokół osi kołysania, usytuowanej poziomo w pionowej płaszczyźnie symetrii toru na pewnej dość dużej wysokości nad poziomem główek szyn. Ta oś kołysania nie zmienia swego położenia podczas jazdy na torze prostym.

Nie jest możliwe jakiekolwiek równoległe przesunięcie zestawu kołowego w poprzek toru ani w wyniku jego toczenia się po torze, ani nawet w wyniku ogromnej siły działającej na zestaw kołowy w kierunku poprzecznym do toru i pokonującej wszelkie tarcia.

Przechylenie zestawu kołowego wokół bieguna kołysania możliwe jest jedynie na skutek:

- działania ogromnej siły na nieruchomy zestaw kołowy skierowanej w poprzek toru i pokonującej wszelkie tarcia,
- toczenia się zestawu kołowego wytrąconego z położenia środkowego w torze (ten przypadek będzie rozpatrzony w następnej części pracy).

Literatura:

[1] Gąsowski W., Lang R.: *Kołysanie poprzeczne zestawu kołowego podczas wężykowania w torze. Część I. Mechanika wężykowania zestawu kołowego. Pojazdy Szynowe*, nr 2/1999.

[2] Gąsowski W., Lang R.: *Kołysanie poprzeczne zestawu kołowego podczas wężykowania w torze. Część II. Obliczenie krzywizn konturów bieżni koła i główki szyny kolejowej oraz wyznaczenie rzeczywistego położenia kręgów tocznych zestawu kołowego na torze. Pojazdy Szynowe*, nr 3/1999.

[3] Gąsowski W., Lang R.: *Kołysanie poprzeczne zestawu kołowego podczas wężykowania w torze. Część IV. Obliczenia kinematyczne zestawu kołowego przesuniętego prostopadle do osi podłużnej toru. Zestaw kołowy o wklęsłych bieżniach kół poruszający się po torze o wypukłych główkach szyn. Pojazdy Szynowe*, Nr 1/2000.

[4] Polska Norma PN-92/H-93440. *Stal. Szyny tramwajowe z rowkiem.*