

Prof. dr hab.inż. Włodzimierz Gąsowski
Politechnika Poznańska

Teoretyczne ustalenie aerodynamicznego oporu pociągu

Zwiększenie prędkości jazdy pociągów powoduje duży wzrost oporów ruchu spowodowanych opływem powietrza. Praca zawiera teoretyczne podstawy obliczeń aerodynamicznych, które wykonuje się w procesie projektowania współczesnych pojazdów i pociągów. Zasadniczą jej część stanowi przedstawienie obliczeń oporów tarcia powietrza i oporów ciśnienia oraz algorytm obliczeń oporów aerodynamicznych pojazdów szynowych. W pracy przedstawiono również inne problemy, które rozwiązuje się za pomocą aerodynamiki.

Część I

1. WPROWADZENIE

RYS HISTORYCZNY

Aerodynamika pociągów, początkowo empiryczna, ma już swoją historię. Pierwsze badania aerodynamiczne pojazdów szynowych miały miejsce na początku wieku. Były one związane z ukształtowaniem deflektorów (wiatrownic) montowanych na parowozach w celu ukierunkowania dymu z kominów ku górze, aby w ten sposób opóźnić opadanie iskier na dachy wagonów, które były wówczas wykonywane z drewna i zapobiegać tym samym przed pożarami. W późniejszych latach trzydziestych, w miarę wzrostu prędkości pociągów, konstruktorzy zaczęli coraz bardziej zwracać uwagę na znaczenie oporów aerodynamicznych w całkowitych

tych oporach pojazdów. Wtedy zaczęły się pierwsze badania tunelowe zmierzające do określenia i zmniejszenia oporów aerodynamicznych pociągów. W tym samym czasie pojawiły się pierwsze lokomotywy elektryczne. Duża moc zainstalowanych silników elektrycznych przy prędkościach z reguły mniejszych niż 140 km/h pozwalała łatwo skompensować niedoskonałości aerodynamiczne pociągów. Z tego względu gruntowniejsze badania aerodynamiczne zostały wówczas zaniechane.

Dopiero od połowy lat sześćdziesiątych, wraz z pojawieniem się szybkich pociągów we Francji i w Japonii, wznowione zostały badania aerodynamiczne pojazdów szynowych. Można to uznać za początek powstawania aerodynamiki kolejowej jako nowej nauki. Nie ograniczała się ona wyłącznie do techniki eksperymentalnej ale równocześnie zaczęła korzystać z symulacji obliczeniowej. Nazwa „aerodynamika” pochodzi od złożenia dwóch słów greckich: „αερος” (aeros) oznaczającego powietrze i „δυναμικός” - (dynamics) tłumaczony jako „posiadający”

się. Zatem aerodynamika jako nauka zajmuje się rozpatrywaniem zagadnień, w których powietrze posiada zdolność czynnego oddziaływania na rozpatrywany obiekt.

Oddziaływanie takie może mieć miejsce tylko wtedy, gdy następuje opływ obiektu strugą powietrza.

W latach siedemdziesiątych zbudowano w tych krajach tunele aerodynamiczne specjalnie dostosowane do badań kolejowych. Głównie wykorzystywano jednak do tych celów istniejące tunele lotnicze. Kraje te, które najwięcej osiągnęły w zwiększaniu prędkości jazdy dalej pracują nad polepszeniem aerodynamiki pociągów [3, 4, 11, 17, 20, 21, 24, 25, 26].

W Polsce aerodynamiką kolejową zaczęto się interesować w latach siedemdziesiątych [1, 13, 14].

W następnym dziesięcioleciu, m.in. na skutek ustabilizowania się prędkości pociągów eksploatowanych przez PKP na poziomie 100÷120 km/h, bez aerodynamiki można było się obejść. Na początku lat dziewięćdziesiątych, kiedy w Ośrodku Badawczo-Rozwojowym Pojazdów Szynowych w Poznaniu przystąpiono do projektowania wagonów i lokomotyw do jazdy z prędkością 200 km/h, zainteresowanie aerodynamiką kolejową ożywiło się [5, 6, 7, 8, 9, 10].

Rozwój Numerycznej Mechaniki Płynów (NMP) i dostęp do coraz potężniejszych komputerów spowodowały, że obok badań modeli fizycznych w tunelach aerodynamicznych zaczęto badać opływy pojazdów drogą symulacji numerycznej. Od końca lat osiemdziesiątych coraz częściej sięgano do metod symulacji numerycznej dla rozwiązania problemów aerodynamicznych pojazdów szynowych. Obie metody badań: numeryczna i eksperymentalna stały się od tego czasu komplementarne.

PROBLEMY ROZWIĄZYWANE ZA POMOCĄ AERODYNAMIKI

Konieczność sięgania do analiz i badań aerodynamicznych występuje na wielu etapach projektowania współczesnych pojazdów szynowych i wiąże się z rozwiązywaniem problemów energetycznych, ergonomicznych, ekologicznych i konstrukcyjnych. W szczególności dotyczy to takich zagadnień jak:

1. *Zmniejszenie zapotrzebowania energii na wykonanie pracy przewozowej.* W ślad za tym zmniejszenie mocy silników lokomotyw i jednostek trakcyjnych.
2. *Zapewnienie efektywnego chłodzenia silników trakcyjnych.* Można to osiągnąć poprzez usytuowanie wlotów i wylotów powietrza w miejscu korzystnego gradientu ciśnień na powierzchni pojazdu.
3. *Zapewnienie stabilnej pracy pantografów.* Wiąże się to z ich usytuowaniem w strefie ustabilizowanego przepływu i takim ukształtowaniem jego geometrii, żeby uzyskać stabilny docisk do przewodu jezdnego.
4. *Zmniejszenie poziomu hałasu wewnątrz jak i na zewnątrz pociągu.* Przy prędkościach przekraczających 200 km/h głównym źródłem hałasu oprócz układu koło-szyna, jest opływ powietrza. Jego intensywność zależy od geometrii pojazdu a szczególnie od powierzchni i kształtów jego przedniej i tylnej części.

5. *Zmniejszenie amplitudy fal ciśnieniowych podczas przejazdu pociągu przez tunel.* Ma to zasadniczy wpływ na odczucie bólu w uszach i samopoczucie pasażerów. Podobnie jak z hałasem główny wpływ na to ma geometria części czołowej i końcowej pociągu, stan powierzchni zewnętrznej całego składu oraz geometria tunelu.
6. *Określenie minimalnej odległości między osiami równoległych torów ze względu na wzajemne oddziaływanie aerodynamiczne mijających się pociągów.*
7. *Optymalne ukształtowanie geometrii przedniej szyby pociągu tak, aby zminimalizować ilość uderzających o nią owadów i tym samym poprawić widoczność.*
8. *Poprawa warunków klimatycznych pasażerów.* Wiąże się to z kontrolą i rozkładem pola prędkości i temperatury wewnątrz klimatyzowanych wagonów.

ROLA BADAŃ AERODYNAMICZNYCH W ROZWOJU POJAZDÓW SZYNOWYCH

W miarę wzrostu prędkości udział oporów aerodynamicznych w oporach całkowitych pojazdu wzrasta w sposób decydujący. Na rys.1 przedstawiono zależność mocy niezbędnej dla pokonania oporów tarcia mechanicznego i oporów aerodynamicznych od prędkości jazdy dla francuskiego pociągu, składającego się z lokomotywy elektrycznej i trzech wagonów pasażerskich, który osiągnął prędkość maksymalną 331 km/h [23].

Moc niezbędna na pokonanie oporów tego pociągu wyraża się następującą zależnością:

$$R(V) = 500 + 0.045 V^2 \text{ [kW]}$$

$$V = 0 \dots 400 \text{ [km/h]}$$

Moc na pokonanie samego tarcia:

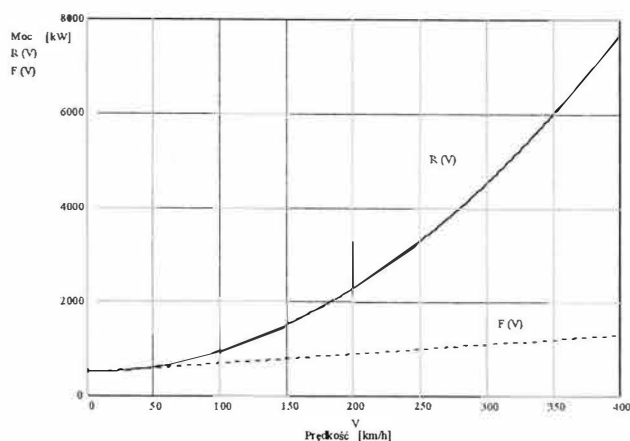
$$F(V) = 500 + 2 \cdot V \text{ [kW]}$$

O ile przy prędkości 50 km/h moc potrzebna dla pokonania oporów aerodynamicznych jest pomijalnie mała, to przy prędkości 100 km/godz stanowi już około 30 % mocy niezbędnej, a przy prędkości 300 km/h przeszło 80 %.

Z tego wyraźnie wynika, że z punktu widzenia energetycznego badania oporów aerodynamicznych pojazdu szynowego są już celowe przy prędkościach około 100 km/h a powyżej tej prędkości stają się konieczne.

Badania aerodynamiczne, zarówno teoretyczne jak eksperymentalne, pozwalają na poznanie wpływu poszczególnych parametrów geometrycznych pojazdu i jego elementów na charakter jego opływu i istniejące wokół niego pole prędkości i ciśnień, a co za tym idzie na jego opory ruchu. Stanowi to bazę rozwiązania wyżej wymienionych problemów i optymalizacji konstrukcji z punktu widzenia aerodynamicznego i energetycznego.

Obliczenia trakcyjne pojazdów szynowych wymagają znajomości oporów całkowitych pojazdów. Błędy popełnione w obliczeniach oporów prowadzą do błędnego założenia mocy silników trakcyjnych oraz do odchyłek pomiędzy obliczonymi a rzeczywistymi charakterystykami trakcyjnymi. Brak znajomości pola prędkości i ciśnień nie pozwala optymalnie usytuować wloty i wyloty powietrza chłodzącego do silników, korzystnie ukształtować przednią szybę pojazdu, usytuować pantografy w najkorzystniejszym miejscu itd.



Rys.1. Moc niezbędna w funkcji prędkości

Przy małych prędkościach, kiedy udział oporów aerodynamicznych w oporach całkowitych jest mały, nawet duże błędy w oszacowaniu oporów aerodynamicznych nie powodują dużych niedokładności obliczeniowych. Zupełnie inaczej rzecz się ma kiedy udział ten staje się dominujący.

Przedmiotem rozważań aerodynamiki teoretycznej są głównie ciała opływowe o gładkiej powierzchni poruszające się w niezakłóconym ośrodku i z dala od ziemi i innych obiektów. Sytuacja się zmieniła od momentu pojawienia się komputerów dużej mocy pozwalających rozwiązywać numerycznie różniczkowe równania opływu Naviera-Stoksa dla przepływu ściśliwego i lepkiego.

Zarówno dla pojazdów szynowych, jak i dla innych pojazdów i statków latających, zachodzi konieczność uwzględnienia nierówności powierzchni, wystających elementów, wpływu ziemi oraz, w niektórych przypadkach, zakłóceń przepływu od innych pojazdów czy blisko znajdujących się obiektów.

• Przed pojawieniem się NMP uwzględnienie oporów wywołanych tymi czynnikami było prawie niemożliwe. Metodami klasycznymi można było rozwiązywać zadania dla ciał opływowych i przepływu potencjalnego. Dla rozwiązywania praktycznych problemów uciekano się do aerodynamiki eksperymentalnej. Eksperymentalna aerodynamika, badając rzeczywiste zjawiska a nie ich uproszczone modele, pozwala uogólniać wyniki badań i uzupełniać luki teorii.

Często aerodynamikę eksperymentalną nazywa się nauką o współczynnikach doświadczalnych, jest ona bowiem ściśle związana z aerodynamiką teoretyczną, bez której wyniki badań nie mogłyby być w pełni wykorzystane. Dziś dzięki

- zmniejszenie ilości zespołów i elementów konstrukcyjnych wystających poza obrys pojazdu,
- unikanie nierówności i uskoków konstrukcyjnych zewnętrznych powierzchni.

Należy się liczyć z faktem, że wymienione kierunki zmniejszenia oporów aerodynamicznych pojazdów wiążą się ze skomplikowaniem konstrukcji i wzrostem kosztów ich produkcji. Dlatego też poprawa aerodynamiki pojazdów szynowych musi być rozpatrywana w kontekście kosztów globalnych tj. produkcyjnych i eksploatacyjnych.

Badania oporów aerodynamicznych pojazdów szynowych prowadzi się zarówno w tunelach aerodynamicznych jak i metodami numerycznymi. Metody numeryczne stosuje się w

możliwościom NMP, aerodynamika teoretyczna i eksperymentalna są naukami doskonale się uzupełniającymi.

W praktycznych obliczeniach aerodynamicznych operuje się wieloma współczynnikami doświadczalnymi, wziętymi bądź ze specjalnie przeprowadzonych w tym celu badań lub z publikowanych danych eksperymentalnych.

Umiejętność doboru współczynników w obliczeniach aerodynamicznych stanowi jeden z ważniejszych warunków poprawności uzyskanych wyników i skutecznej weryfikacji obliczeń wykonanych metodami NMP.

Szeroka znajomość literatury specjalistycznej, wyników badań różnego typu zjawisk i obiektów, przeprowadzonych na świecie przez dziesięciolecia, w połączeniu ze zrozumieniem sensu fizycznego teorii i umiejętnością wyszukiwania i korzystania z analogii zjawisk, determinują dokładność dobranych współczynników doświadczalnych.

Często uciekamy się do prowadzenia własnych badań specjalistycznych (pomimo, że podobne badania zostały już prawdopodobnie przeprowadzone i opublikowane) żeby uniknąć w ten sposób konieczności przeprowadzenia pracochłonnych i żmudnych badań literaturowych. Pozwala to jednak uzyskać wyniki bardziej wiarygodne i gromadzić rezultaty własnych doświadczeń.

Pomimo, że aerodynamika rozwiązuje różne problemy to nadal głównym jej zadaniem jest zmniejszenie energii potrzebnej do wykonania pracy przewozowej lub zwiększenie prędkości przy zadanej mocy (dla statków latających również zwiększenie siły nośnej). Cel ten można osiągnąć wyłącznie poprzez zmniejszenie oporów ruchu, w tym dla szybkich pojazdów i statków, głównie oporów aerodynamicznych.

Zmniejszenie oporów aerodynamicznych pojazdu szynowego można osiągnąć poprzez zastosowanie takich rozwiązań konstrukcyjnych jak:

- nadanie opływowych kształtów przedniej i tylnej części pociągu,
- zmniejszenie przekroju poprzecznego lokomotyw i wagonów,
- zastosowanie osłon przednich wózków i oprofilowanie pozostałych,
- zastosowanie osłon wyposażenia podwagonowego,
- zmniejszenie odległości między wagonami i oprofilowanie przejść,
- umieszczenie różnych elementów wyposażenia w oprofilowanych obudowach lub wewnątrz pojazdu,
- zastosowanie dobrze oprofilowanych wlotów i wylotów wentylacyjnych,
- zastosowanie dobrze oprofilowanych pantografów połów początkowej fazy projektowania kiedy trzeba wybierać i optymalizować rozwiązania konstrukcyjne. Badania tunelowe natomiast służą weryfikacji obliczeń i dopracowaniu konstrukcji oraz wyjaśnieniu tych zjawisk, których matematyczne modelowanie jest niecelowe.

W zakresie bezpieczeństwa ruchu szybkich pociągów istnieje szereg problemów wymagających rozwiązań na drodze badań aerodynamicznych. Należą do nich zagadnienia wzajemnego oddziaływania mijających się pociągów, wielkości amplitudy ciśnieniowej i jej propagacji podczas wjeżdżania pociągu w tunel, wpływu pędzącego pociągu na stojące w pobliżu obiekty i ludzi itp. Badania modelowe tych zjawisk w tunelach są trudne ze względu na niestacjonarny charakter przepływu i złożoność dotrzymania warunków brzegowych.

Jeszcze kilkanaście lat temu, jedynym realnym sposobem badania tych zjawisk były badania ruchowe pociągów. Dziś dzięki metodom numerycznym i mocom obliczeniowym komputerów problemy te rozwiązuje się przy pomocy modelowania matematycznego, które pozwala określić parametry przepływu, tj. pole prędkości i ciśnień na powierzchni obiektów i w każdym punkcie rozpatrywanej przestrzeni. Poszerza to znacznie możliwości uzyskania różnorodnych wyników badań przydatnych w procesie projektowania i eksploatacji pojazdów.

2. TEORETYCZNE PODSTAWY OBLICZEŃ AERODYNAMICZNYCH

2.1 Opory tarcia aerodynamicznego

Opory tarcia spowodowane są lepkością płynu opływającego ciała stałe i występują w tzw. warstwie przyściennej, tj. cienkiej warstwie płynu w bezpośredniej bliskości powierzchni ciała stałego, w której występuje gradient prędkości w kierunku normalnym do tej prędkości. Wielkość sił tarcia zależy od zjawisk występujących w tej warstwie. Złożony mechanizm powstawania warstwy przyściennej i kształtowania się przepływu w warstwie, można w sposób uproszczony przedstawić następująco.

Na skutek zjawiska adhezji elementy płynu bezpośrednio stykające się z powierzchnią ciała stałego przyczepiają się do tej powierzchni, tak że ich prędkość względem ciała jest równa zeru. Przejście od zerowej wartości prędkości względnej do prędkości przepływu istniejącej w pewnej odległości od ciała, odbywa się w sposób ciągły. Gradient prędkości

$\frac{\partial V}{\partial n}$ w warstwie przyściennej maleje ze wzrostem odległości

od powierzchni ciała. Grubością warstwy przyściennej nazywamy taką odległość od powierzchni ciała, dla której prędkość cząsteczek powietrza warstwy jest bliska prędkości

nabiegającego powietrza tj. dla której $\frac{\partial V}{\partial n} \approx 0$.

Zwykle przyjmuje się grubość warstwy przyściennej jako tę odległość, w której panuje prędkość równa 0,99 prędkości nabiegania powietrza. Jeżeli nie występuje zjawisko oderwania strug, przepływ poza warstwą przyścienną kształtuje się jak dla ruchu potencjalnego. Poza warstwą przyścienną przepływ płynów rzeczywistych odbywa się na ogół tak samo jak dla płynów doskonałych, tj. lepkich i nieściśliwych. Grubość warstwy przyściennej nie jest stała, a narasta stopniowo w miarę oddalania od punktu wejścia. Ruch w warstwie przyściennej może mieć charakter laminarny, turbulentny i częściowo laminarny, częściowo turbulentny (mieszany).

Ruch laminarny charakteryzuje się tym, że ruch elementów jest uporządkowany i warstwowy i nie ma wymiany elementów płynu między sąsiednimi warstwami.

W przypadku ruchu turbulentnego istnieje intensywna wymiana elementów płynu między sąsiednimi warstwami, stąd ruch ma charakter nieuporządkowany, zawirowany.

Najczęściej mamy do czynienia z ruchem mieszanym tj. z takim ruchem w warstwie przyściennej, kiedy na pewnym odcinku występuje ruch laminarny przechodzący następnie w ruch turbulentny. Przejście warstwy laminarnej w warstwę

turbulentną odbywa się stopniowo. W praktyce jednak wygodnie przyjąć, że zmiana odbywa się w określonym punkcie nagle.

Doświadczenie wykazuje, że położenie punktu przejścia z ruchu laminarnego w turbulentny zależy od prędkości przepływu i od kinematycznego współczynnika lepkości płynu, a w warunkach rzeczywistych zależy również od turbulentności ośrodka i nierówności powierzchni ciała.

Znajomość tego punktu jest istotna dla obliczenia oporów tarcia. Liczba Reynoldsa, przy której następuje przejście warstwy laminarnej w turbulentną, nazywa się krytyczną liczbą Reynoldsa:

$$Re_{kr} = \frac{V \cdot X_T}{\nu}$$

gdzie: V - prędkość przepływu [m/s],
 ν - lepkość kinematyczna [m²/s],

X_T - odległość od początku płyty do punktu przejścia w warstwę turbulentną [m]

Doświadczenia wykazały, że krytyczna liczba Reynoldsa jest wielkością stałą i wynosi dla spokojnej atmosfery i gładkiej płyty $Re_{kr} \approx 2 \cdot 10^6$, co przy prędkości $V = 100$ km/h $= 27,8$ m/s i $\nu = 1,45 \cdot 10^{-5}$ m²/s odpowiada długości $X_T = 1,04$ m.

OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKA OPORU TARCIA

Zgodnie z prawem Newtona naprężenie styczne występujące pomiędzy płytą a omywającym płynem lepkiem wyraża się następującą zależnością:

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (1)$$

gdzie:

μ - współczynnik lepkości [N · s/m²]

u - prędkość w warstwie przyściennej [m/s]

Elementarna siła działająca na płytę:

$$dQ = \tau \cdot dF = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot dF \quad (2)$$

gdzie: F - powierzchnia omywana płytą.

Dla płyty o długości l i szerokości jeden, omywanej dwustronnie:

$$dQ = 2\tau dx,$$

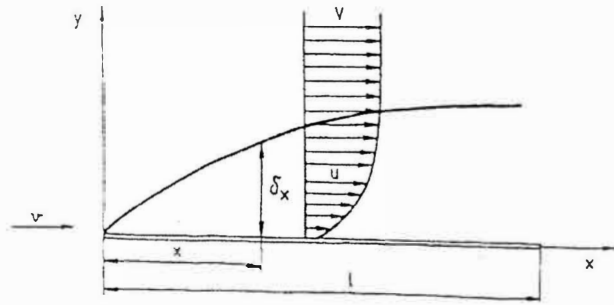
a zatem

$$Q = 2 \int_0^l \tau dx \quad (3)$$

Obliczenie oporu tarcia płyty polega na określeniu zależności prędkości w warstwie przyściennej od współrzędnych y i x , tj. na ustaleniu rozkładu prędkości prostopadłe i wzdłuż płyty (rys.2).

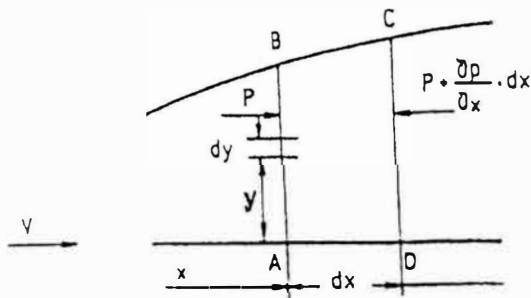
Przybliżoną metodę badania przepływu w warstwie przyściennej i określenie oporów tarcia powierzchniowego daje zastosowanie zasady ilości ruchu, wg. której zmiana ilości

ruchu w określonym kierunku równa jest sile działającej w tym samym kierunku.



Rys. 2. Warstwa przyścienna na płycie płaskiej

Rozpatrzmy nieskończenie szeroką płytę ustaloną pod zerowym kątem natarcia (rys.3)



Rys. 3. Siły działające na element płynu w warstwie przyściennej

W odległości x od początku płyty wydzielimy element warstwy przyściennej długości dx i szerokości równej jednostce.

Rozważmy powierzchnię kontrolną ograniczoną odcinkami AB, BC, CD i AD.

Rozpatrujemy przepływ płaski ustalony płynu nieściśliwego. Obliczymy zmianę pędu w obszarze ABCD w jednostce czasu.

W tym celu wprowadzimy następujące oznaczenia:

$d(mv)$ - elementarna zmiana pędu

$(mv)_{AB}$ - pęd płynu wpływającego przez ściankę AB

$(mv)_{BC}$ - pęd płynu wpływającego przez ściankę BC

$(mv)_{CD}$ - pęd płynu wpływającego przez ściankę CD

Zmiana pędu wyniesie:

$$d(mv) = (mv)_{CD} - (mv)_{AB} - (mv)_{BC} \quad (4)$$

$$(mv)_{AB} = \int_0^{\delta} \rho u dy \cdot u = \int_0^{\delta} \rho u^2 dy$$

$$(mv)_{CD} = \int_0^{\delta} \rho u^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u^2 dy \right] dx$$

gdzie:

u = prędkość w warstwie przyściennej

δ = grubość warstwy przyściennej

stąd:

$$(mv)_{CD} - (mv)_{AB} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u^2 dy \right] dx \quad (5)$$

Wielkość (mv) określamy wychodząc z warunku ciągłości (zakładając $\rho = \text{const.}$).

Spełnienie warunku stałości masy w obrębie obszaru ABCD wymaga, aby różnica wydatków przez ścianki CD i AB była zrównoważona wydatkiem przez ściankę BC.

Wydatek masy wpływający przez AB będzie:

$$\int_0^{\delta} \rho u dy,$$

Natomiast wydatek masy wypływający przez CD będzie:

$$\int_0^{\delta} \rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy,$$

stąd różnica wydatków wyniesie:

$$\int_0^{\delta} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u dy \right] dx,$$

Pęd masy wypływający przez ściankę BC wyniesie:

$$(mv)_{BC} = \rho V \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} u dy \right] dx \quad (6)$$

Wstawiając wyrażenia (5) i (6) w (4) otrzymamy:

$$d(mv) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u^2 dy \right] dx - \rho V \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} u dy \right] dx \quad (7)$$

Wyrażenie (4) przedstawia zmianę pędu wzdłuż osi x w jednostce czasu. Zmiana ta wywołana jest siłami zewnętrznymi: ciśnieniowymi na ściankach AB i CD oraz siłą styczną na ściance AD.

Siły styczne na ściance BC nie występują ponieważ jest to granica warstwy gdzie:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Ciśnienie na ściance AB wynosi p , natomiast ciśnienie na ściance CD wynosi:

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \quad (8)$$

Różnica ciśnień na ściankach CD i AB będzie:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx,$$

a różnica sił:

$$\Delta P = -\delta \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \quad (9)$$

Sila stycznosci na sciance AD wynosi:

$$dQ = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx \quad (10)$$

Porównujac zmianę pędu (7) z silami, które je wywołują (9) i (10) otrzymamy:

$$-\delta \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u^2 dy - \rho V \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u dy$$

Ponieważ przy opływie płyty pod zerowym kątem natarcia ciśnienie wzdłuż płyty jest stałe, a zatem $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, to ostatecznie otrzymamy:

$$-\tau = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u^2 dy - \rho V \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u dy \quad (11)$$

Dla wykorzystania zależności (11) trzeba znać rozkład prędkości w warstwie przyściennej, $u(y)$. Im bliższa jest założona funkcja rozkładu prędkości rzeczywistemu rozkładowi, tym uzyskane wyniki są ściślejsze.

WARSTWA PRZYŚCIENNA LAMINARNA

W ślad za wieloma badaczami, jako funkcje rozkładu prędkości dla warstwy przyściennej laminarnej, przyjęto wielomian, w którym współczynniki są tak dobrane aby zostały spełnione warunki brzegowe i które w ogólnym przypadku zależą od odległości x , tj.:

$$u = a(x)y + b(x)y^2 + c(x)y^3 + d(x)y^4 + \dots \quad (12)$$

Doświadczenie wykazało, że ograniczenie się do dwóch pierwszych członów daje dostatecznie dobrą korelację z eksperymentem. Przyjęto więc ostatecznie funkcję rozkładu prędkości postaci:

$$u = a(x)y + b(x)y^2 \quad (13)$$

Znaczenie współczynników $a(x)$ i $b(x)$ obliczymy wychodząc z warunków przy ścianie i na granicy warstwy tj.

- na ścianie przy $y = 0$ prędkość $u = 0$
- na granicy warstwy przy $y = \delta$ prędkość

$$u = V; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta} = 0$$

Różniczkując (13) i wstawiając $y = \delta$ otrzymamy:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta} = [a(x) + 2b(x)y]_{y=\delta} = a(x) + 2b(x)\delta = 0$$

a wstawiając w (13) $y = \delta$ otrzymamy:

$$V = a(x)\delta + b(x)\delta^2 \quad (15)$$

Z rozwiązania równań (14) i (15) otrzymamy:

$$a(x) = 2 \frac{V}{\delta}$$

$$b(x) = -\frac{V}{\delta^2}$$

Z powyższego wynika, że w danym przypadku współczynnik równania nie zależy od x .

Wstawiając znaczenie współczynników w (13) otrzymamy:

$$u = V \left(2 \frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \quad (16)$$

Grubość warstwy przyściennej wzrasta ze zwiększeniem odległości x tj. $\delta = f(x)$.

Chcąc ustalić tę zależność należy rozwiązać równanie całkowite (11) korzystając z zależności (16). Zadanie to rozwiązujemy w następującej kolejności:

1. Różniczkujemy (16) i mnożąc na μ określamy

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

2. Obliczamy całki wchodzące w równaniu (11) wstawiając znaczenie u wg. (16).

3. Różniczkujemy otrzymane zależności względem x otrzymując tym samym zależność, w której wchodzi δ i $\frac{\partial \delta}{\partial x}$

4. Porównując zależności otrzymane w punkcie 1 i 3 i rozwiązując względem δ otrzymamy ostatecznie

$$\delta = 5,477 \sqrt{\frac{V \cdot x}{\nu}} \quad (17)$$

Znając rozkład prędkości oraz zależność $\delta = f(x)$ możemy określić wielkość naprężenia stycznosci τ .

Różniczkujemy (16) względem y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2V}{\delta} - 2V \frac{y}{\delta^2}$$

dla $y = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2V}{\delta},$$

a zatem

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \frac{2V}{\delta} \quad (18)$$

Wstawiając w (18) zależność (17) otrzymamy:

$$\tau = \mu \frac{2V}{5,477 \sqrt{\frac{v \cdot x}{V}}} = \frac{2\mu V}{5,477} \cdot \sqrt{\frac{V}{v \cdot x}},$$

i ostatecznie:

$$\tau = 0,365 \sqrt{\frac{\mu \rho V^3}{x}} \quad (19)$$

Wstawiając (19) w (3) otrzymamy:

$$Q = 2 \cdot 0,365 \sqrt{\mu \rho V^3} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

stąd:

$$Q = 1,46 V^{1,5} \sqrt{l \cdot \mu \cdot \rho} \quad (20)$$

Jak więc widać siła tarcia w laminarnej warstwie przyściennej jest proporcjonalna do prędkości w potęgze 1,5 i powierzchni w potęgze 0,5.

W praktyce siłę tarcia Q wyraża się poprzez współczynnik tarcia C_t :

$$Q = C_t \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot F = C_t \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot 2L \cdot 1$$

gdzie:

F = powierzchnia omywana płyty

L = długość płyty

$$C_t = \frac{Q}{\frac{\rho V^2}{2} \cdot 2L} \quad (21)$$

Wstawiając (20) w (21) i odpowiednio przekształcając otrzymujemy wzór na współczynnik tarcia w następującej postaci:

$$C_t = \frac{1,46}{\sqrt{Re}} \quad (22)$$

Badania warstwy przyściennej laminarnej dają nieco odmienne zależności a mianowicie:

$$\delta = 5,83 \sqrt{\frac{v \cdot x}{V}} \quad (23)$$

$$\tau = 0,382 \sqrt{\frac{\mu \rho V^3}{x}} \quad (24)$$

$$C_t = \frac{1,33}{\sqrt{Re}} \quad (25)$$

WARSTWA PRZYŚCIENNA TURBULENTNA

W przepływie turbulentnym prędkość rzeczywista w dowolnym punkcie przepływu jest zmienna i ma charakter pulsujący, dlatego mówiąc o prędkości w danym punkcie przepływu turbulentnego rozumiemy pewną średnią prędkość przepływu.

W wyniku doświadczalnych badań przepływu w warstwie przyściennej turbulentnej stwierdzono, że rozkład prędkości kształtuje się wg. następującej zależności:

$$u = V \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \quad (26)$$

natomiast napężenie tarcia wynosi:

$$\tau = 0,0225 \rho V^2 \left(\frac{v}{V \cdot \delta} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (27)$$

Zgodnie z (11) napężenie tarcia wyraża się następującym równaniem:

$$-\tau = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u^2 dy - \rho \frac{V \partial}{\partial x} \int_0^\delta u dy \quad (28)$$

Obliczymy wchodzące w (28) całki

$$\int_0^\delta \rho u^2 dy = \int_0^\delta \rho V^2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{2}{7}} dy = \rho \frac{V^2}{\delta^{\frac{2}{7}}} \int_0^\delta y^{\frac{2}{7}} dy = \frac{7}{9} \rho V^2 \delta$$

$$\int_0^\delta \rho u dy = \int_0^\delta \rho V \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} dy = \rho \frac{V}{\delta^{\frac{1}{7}}} \int_0^\delta y^{\frac{1}{7}} dy = \frac{7}{8} \rho V \delta$$

Wstawiając powyższe znaczenie całek w wyrażenie (27) otrzymamy:

$$\tau = \frac{7}{72} \rho V^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \quad (29)$$

Porównując (27) i (29) będzie:

$$\frac{7}{72} \rho V^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} = 0,0225 \rho V^2 \left(\frac{v}{V \delta} \right)^{\frac{1}{4}},$$

a dalej całkując i przekształcając ostatecznie zależność będzie miała postać:

$$\delta = 0,37 \left(\frac{V}{\nu} \right)^{\frac{1}{5}} \cdot x^{\frac{4}{5}} \quad (30)$$

Obliczymy współczynnik tarcia dla warstwy turbulentnej wstawiając we wzorze (3) znaczenie τ (27), otrzymamy:

$$Q = 2 \int_0^l 0,0225 \rho V^{1,75} \left(\frac{V}{\delta} \right)^{0,25} dy$$

podstawiając znaczenie δ (30)

$$Q = 2 \int_0^l \frac{0,0225}{0,37^{0,25}} \rho V^{1,8} \nu^{0,2} l^{0,8} = 0,144 \frac{\rho}{2} V^{1,8} \nu^{0,2} l^{0,8} \quad (31)$$

Z wzoru (31) widać, że w warstwie turbulentnej opór tarcia jest proporcjonalny do prędkości w potęgę 1,8 i powierzchni w potęgę 0,8.

Tak jak poprzednio można wyrazić opór tarcia poprzez współczynnik tarcia:

$$Q = C_t \rho \frac{V^2}{2} F = C_t \rho \frac{V^2}{2} 2l \cdot 1 \quad (32)$$

Porównując (31) i (32) oraz przekształcając otrzymamy:

$$C_t = 0,072 Re^{-\frac{1}{5}} \quad (33)$$

Doświadczenie wykazało, że współczynnik 0,072 jest nieco za mały i że należy przyjąć:

$$C_t = 0,074 Re^{-\frac{1}{5}} \quad (34)$$

Dla liczb Reynoldsa przekraczających $Re > 10^7$ przyjmuje się zależność:

$$C_t = \frac{0,455}{(\lg Re)^{2,58}} \quad (35)$$

WARSTWA PRZYŚCIENNA MIESZANA

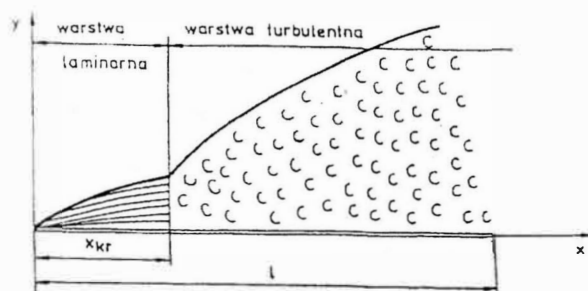
Najczęściej przy opływie ciała ma się do czynienia z warstwą przyścienną mieszaną rys. 4.

Jeżeli przez Re_{kr} oznaczyć wartość liczby Reynoldsa, dla której następuje przejście od ruchu laminarnego do ruchu turbulentnego w warstwie przyściennej to:

$$x_{kr} = \frac{Re_{kr} \cdot \nu}{V} \quad (36)$$

Opór tarcia płyty o długości l i szerokości równej jednostki składa się z oporu tarcia na części płyty x_{kr} wzdłuż której

warstwa przyścienna jest laminarna i oporu tarcia na części $(l - x_{kr})$ odpowiadającej turbulentnej warstwie przyściennej.



Rys. 4. Schemat warstwy przyściennej mieszanej

Oznaczając przez:

Q_l i C_l - opór i współczynnik oporu tarcia przy mieszanej warstwie przyściennej,

Q_{lT} i C_{lT} - opór i współczynnik oporu tarcia przy warstwie przyściennej turbulentnej,

Q_{ll} i C_{ll} - opór i współczynnik oporu tarcia przy warstwie przyściennej laminarnej,

można napisać:

$$Q_l = Q_{lT} - (Q_{lT} - Q_{ll}) x_{kr} \quad (37)$$

gdzie:

$$(Q_{lT} - Q_{ll}) x_{kr}$$

oznacza różnicę oporów pomiędzy warstwą przyścienną turbulentną i laminarną na odcinku x_{kr}

Wyrażając poszczególne składowe zależności (37) poprzez współczynniki tarcia otrzymamy:

$$Q_l = C_l \frac{\rho V^2}{2} \cdot l \cdot 1$$

$$Q_{lT} = C_{lT} \frac{\rho V^2}{2} \cdot l \cdot 1$$

$$(Q_{lT}) x_{kr} = C_{lT} \frac{\rho V^2}{2} \cdot x_{kr} \cdot 1$$

$$(Q_{ll}) x_{kr} = C_{ll} \frac{\rho V^2}{2} \cdot x_{kr} \cdot 1$$

Wstawiając powyższe wartości do wzoru (37) i odpowiednio przekształcając będzie:

$$C_l = C_{lT} - (C_{lT} - C_{ll}) \frac{x_{kr}}{l} \quad (38)$$

ponieważ

$$\frac{x_{kr}}{l} = \frac{Re_{kr}}{Re}, \text{ to}$$

$$C_l = C_{lT} - (C_{lT} - C_{ll}) \frac{Re_{kr}}{Re} \quad (39)$$

Podstawiając w (39) znaczenie współczynników C_{1T} i C_{1U} z (25) i (34) otrzymamy:

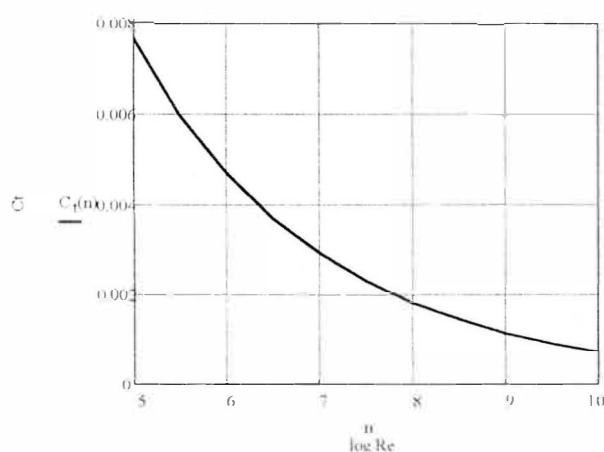
$$C_f = 0.074 Re^{-1/2} - \left(0.074 Re_{kr}^{-1/2} - 1.33 Re_{kr}^{-1/2} \right) \frac{Re_{kr}}{Re} \quad (40)$$

Dla obliczenia oporów tarcia potrzebna jest znajomość krytycznej liczby Reynoldsa.

Przy opływie pojazdów szynowych, z uwagi na ich kształty, można przyjąć, że warstwa przyścienna jest całkowicie turbulentna, a zatem, że $x_{kr} = 0$ i $Re_{kr} = 0$.

W praktyce przy obliczaniu oporów tarcia płyt zamiast wyżej podanych wzorów wygodniej jest korzystać z wykresów podających zależność współczynnika oporów tarcia od

liczby Reynoldsa dla różnych $\frac{x_{kr}}{l}$. Zależność tę - wg. [27] - przedstawia rys.5.



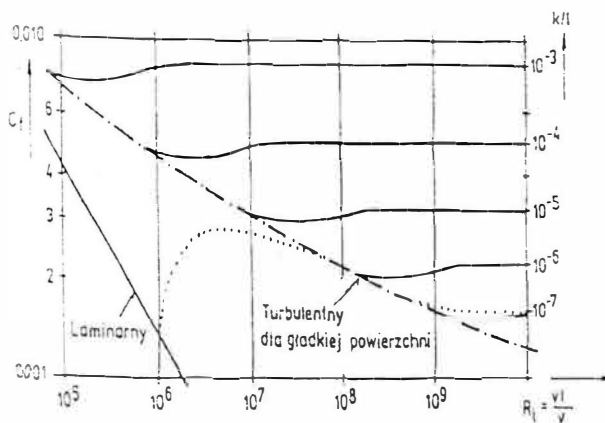
Rys.5. Zależność współczynnika tarcia od Re dla $x_{kr}/l = 0$

OPORY TARCIA SZORSTKICH I RZECZYWISTYCH POWIERZCHNI

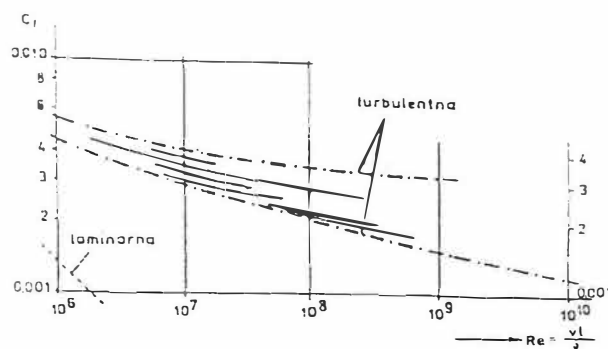
Powyższe rozważania teoretyczne dotyczą płyt gładkich, tj. takich, dla których szorstkość powierzchni mierzona względną grubością ziarna $h/l \leq 10^{-4}$. Przy większej grubości ziarna ma się do czynienia nie tylko z "czystym" tarciem spowodowanym lepkością płynu ale dodatkowo ze zjawiskiem lokalnych mikrooporów ciśnieniowych spowodowanych występującymi ziarnami. Chcąc rozróżnić te dwa rodzaje oporów w pracy [24] określa się pierwsze jako opory tarcia "frictional resistance" a drugie jako opory powierzchniowe spowodowane szorstkością "skin drag - due to roughness".

Mówiąc dalej o oporach tarcia będziemy wyłącznie mieli na uwadze opory spowodowane szorstkimi powierzchniami. Opory tarcia szorstkich powierzchni określa się na podstawie doświadczeń. W celu określenia zależności współczynnika tarcia od liczby Reynoldsa dla różnych szorstkości powierzchni korzysta się z płyt pokrytych równomiernie ziarnami piasku o różnej średnicy. Na rys.6. przedstawiono zależność współczynnika tarcia płyty od liczby Reynoldsa dla różnych względnych średnic ziaren piasku k/l uzyskaną drogą badań przez Nikuradse'go [24].

Powierzchnie realnych konstrukcji nie posiadają równomiernej szorstkości. Zarówno wysokość nierówności jak i gęstość ich rozłożenia na powierzchni są różne. Powoduje to odmienne warunki przepływu w warstwie przyścienną niż miało to miejsce w badaniach Nikuradse'go. Stąd zaistniała konieczność prowadzenia odrębnych pomiarów współczynnika tarcia dla różnych stanów powierzchni rzeczywistych konstrukcji. Na rys.7. przedstawiono wyniki badań oporów tarcia przeprowadzonych dla różnych stanów powierzchni rzeczywistych konstrukcji wg. [24]. Z nich będziemy korzystać w obliczeniach oporów pojazdów dla ustalenia współczynnika tarcia powierzchni pudeł wagonów.



Rys.6. Współczynnik tarcia szorstkiej płyty



Rys.7. Współczynnik tarcia rzeczywistych konstrukcji

2.2. Opory ciśnieniowe

Obliczenie oporów ciśnieniowych ciała poruszającego się w płynie, sprowadza się do określenia parametrów przepływu tj. prędkości, ciśnienia i masy w każdym punkcie otaczającym pola i w dowolnym czasie t .

W przypadku płynu nieściśliwego ($\rho = \text{const.}$) przepływ można uznać jako w pełni analitycznie określony, jeżeli znane są funkcje:

$$\begin{aligned} u &= f_1(x, y, z, t) \\ v &= f_2(x, y, z, t) \\ w &= f_3(x, y, z, t) \\ p &= f_4(x, y, z, t) \end{aligned}$$

gdzie:

u, v, w - składowe prędkości V wzdłuż osi x, y, z.
p - ciśnienie,
t - czas.

Dla obliczenia czterech niewiadomych u, v, w, p dysponujemy:

1) równaniem ciągłości:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (41)$$

2) trzema podstawowymi równaniami różniczkowymi ruchu płynu lepkiego i nieściśliwego Navier-Stokes'a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

W ogólnej postaci powyższy układ równań różniczkowych nie całkuje się. Całkowanie staje się możliwe tylko dla szczególnych przypadków przepływu. W celu dalszego wykorzystania układu równań (41) i (42) oraz dla umożliwienia analitycznego wyznaczenia oporów ciśnieniowych pojazdu szynowego niezbędne jest dokonanie założeń upraszczających.

ZAŁOŻENIA UPRASZCZAJĄCE

- 1) Rozpatruje się wyłącznie opory pudła pojazdu bez wózków i elementów wystających. Kształty przedniej i tylnej części pojazdu są dostatecznie opływowe i nie występuje zjawisko oderwania strug warstwy przyściennej.
- 2) Wpływ ściśliwości jest znikomym mały, ponieważ rozpatrywane prędkości są poniżej 0.5 Macha. Masa powietrza w każdym punkcie pola jest więc stała ($\rho = \text{const.}$).
- 3) Przepływ poza warstwą przyścienną kształtuje się jak dla ruchu potencjalnego, a zatem bezwirowego. Przyjmuje się, że poza warstwą przyścienną przepływ płynów rzeczywistych, lepkich odbywa się na ogół tak samo jak dla płynów doskonałych. Przyjęcie tego założenia oznacza, że uzyskane w wyniku obliczeń parametry przepływu na powierzchni ciała dotyczą w rzeczywistości parametrów na powierzchni warstwy przyściennej, gdzie prędkość odpowiada prędkości potencjalnej. Mając jednak na uwadze, że zmiany ciśnienia w kierunku normalnym do powierzchni w warstwie przyściennej są znikomym małe, to przyjęte założenie nie jest obciążone istotnym odchyleniem od rzeczywistości. Świadczy o tym fakt, że ciśnienia mierzone przez otworki w powierzchni opływającego ciała, a więc na spodzie warstwy przyściennej, są takie

same jak na jej końcu. Są więc one równe ciśnieniom odpowiadającym przepływowi potencjalnemu poza warstwą przyścienną.

- 4) Ponieważ rozpatruje się opory ruchu pojazdu szynowego, poruszającego się ze stałą określoną prędkością na przestrzeni otwartej, z dala od jakichkolwiek innych obiektów, to rozpatrywany przepływ będzie przepływem ustalonym, tj. nie wykazującym bezpośredniej zależności od czasu. Pochodna cząstkowa wszystkich wielkości charakteryzujących jest więc równa zero $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$.

Przy rozpatrywaniu ruchu nieustalonego można korzystać z tej samej analizy co dla ruchu ustalonego, stosując metodę elementów skończonych, polegającą w tym przypadku na podzieleniu czasu na dostatecznie małe odcinki tak, żeby w tym przedziale czasu ruch mógł być traktowany jako ustalony. Powyższe założenia upraszczają równanie ruchu i pozwalają obliczyć pole prędkości i pole ciśnień w każdym punkcie płynu.

POLE PRĘDKOŚCI

Polem skalarowym lub polem wektorowym nazywa się określony obszar przestrzeni, w którym każdemu punktowi w każdej chwili przypisany jest skalar lub wektor określony ciągle i różniczkowalną, jednowartościową w rozpatrywanym obszarze funkcją położenia i czasu np.:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= f(x, y, z, t) && \text{dla pola prędkości,} \\ p &= f(x, y, z, t) && \text{dla pola ciśnień.} \end{aligned}$$

Pola jednorodne są to takie pola, dla których we wszystkich punktach w danej chwili, wartość wektora lub skalara jest taka sama.

Aby pole prędkości $\vec{v}$ miało potencjał musi być spełniony warunek ruchu bezwirowego tj.

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0, \\ w_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \\ w_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned}$$

gdzie: w_x, w_y, w_z - rzuty wektora prędkości kątowej na osie x, y, z.

Z powyższych wyrażeń wynika, że:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}$$

co stanowi warunek konieczny i wystarczający, aby wyrażenie różniczkowe $u dx + v dy + w dz$ (lub formie wektorowej $\vec{v} \cdot d\vec{s}$) było różniczką pewnej funkcji $\varphi(x, y, z)$ zwanej potencjałem prędkości tj.

$$u dx + v dy + w dz = d\varphi(x, y, z) \quad (43)$$

Różniczkując prawą stronę (43) otrzymamy:

$$u dx + v dy + w dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

Porównując współczynniki przy dx , dy , dz otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Wstawiając te wartości w równanie (41), otrzymamy nową postać równania ciągłości, wyrażonego poprzez funkcję potencjału prędkości w postaci:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi = 0, \quad (45)$$

gdzie: $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ oznacza podwójną operację Nabla.

Z polem prędkości wiążą się pojęcia linii prądu, strugi i strumienia oraz wydatku.

Linie prądu mają tę właściwość, że we wszystkich swych punktach są styczne do wektorów prędkości. Podobnie można zdefiniować powierzchnię prądu jako styczną w każdym punkcie pola do wektora prędkości.

Zespół linii prądu wypełniających pewną powierzchnię prądu o przekroju zamkniętym zwaną rurką prądu nazywa się strugą, jeżeli przekrój poprzeczny jest na tyle mały, że rozkład prędkości w danym przekroju możemy traktować jak jednorodny. Jeżeli przekrój jest na tyle duży, że rozkład prędkości nie jest jednorodny, to zespół linii prądu nazywa się strumieniem. Z określenia linii prądu, z którego wynika styczność wektora

$\vec{v}(u, v, w)$ do odpowiedniego elementu linii prądu $d\vec{s}(dx, dy, dz)$ i znanego z geometrii analitycznej warunku równoległości dwu wektorów wynika, że:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (46)$$

Równanie to nosi nazwę równania linii prądu.

Wydatkiem objętościowym strugi nazywa się iloczyn prędkości przez pole przekroju strugi prostopadłe do wektora

prędkości. Dla dowolnego przekroju strugi dS elementarny wydatek objętościowy będzie wynosił:

$$dQ = \vec{V} \cdot d\vec{S} = V n \cdot dS = V \cdot dS \cdot \cos \alpha \quad (47)$$

gdzie: $\vec{n}$ oznacza wektor jednostkowy.

Wydatek strumienia określa się jako:

$$Q = \int_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_S (u dS_x + v dS_y + w dS_z) \quad (48)$$

gdzie: dS_x , dS_y , dS_z - odpowiednie rzuty pola dS na płaszczyzny prostopadłe do x , y , z .

Dalsze rozważania wymagają wprowadzenia pojęcia funkcji prądu Ψ dla potencjalnego i ustalonego ruchu nieściśliwego płynu. Celem uproszczenia można ograniczyć się do ruchu płaskiego.

Równanie ciągłości (41) redukuje się wówczas do postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (49)$$

a równanie linii prądu (46) będzie:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}, \quad (50)$$

albo:

$$u dy - v dx = 0 \quad (51)$$

Z równania ciągłości (49) mamy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial v}{\partial y} \quad (52)$$

Wynika stąd, że u i v mogą być wyrażone przy pomocy pewnej funkcji Ψ w sposób następujący:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad i \quad v = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (53)$$

Wstawiając (53) w (52) otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y},$$

a zatem funkcja $\Psi(x, y)$ jest ciągła wraz ze swymi pochodnymi do drugiego rzędu włącznie.

Podstawiając (53) w (51) otrzymujemy:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot dx = d\Psi = 0, \quad (54)$$

a po wykonaniu całkowania będzie:

$$\Psi(x, y) = \text{const.} \quad (55)$$

Jest to równanie rodziny linii prądu i nazywa się funkcją prądu.

Porównując (53) i (44) dochodzimy do bardzo istotnego dla analizy przepływów potencjalnych wniosku:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Z równań (47) oraz (53) łatwo wykazać, że wydatek przepływający między powierzchniami prądu Ψ_1 i Ψ_2 będzie równy:

$$Q = \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

Tak więc różnica wartości funkcji prądu, dla dwóch sąsiednich powierzchni (linii) prądu, jest miarą wydatku płynu przepływającego w warstwie o grubości jednostkowej ograniczonej tymi powierzchniami.

PRZYKŁADY OBLICZEŃ PROSTYCH PRZEPŁYWÓW

Przepływ płaski jednorodny liniowy

Załóżmy, że potencjał prędkości przedstawiony jest funkcją:

$$\varphi = ax + by \quad (57)$$

Zgodnie z wyżej podanymi zależnościami będzie:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a,$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = b,$$

a zatem: $v = \sqrt{a^2 + b^2}$

Obliczmy funkcje prądu. Ponieważ

$$d\varphi = udy - vdx,$$

to

$$d\psi = a dy - b dx,$$

stąd:

$$\psi = ay - bx,$$

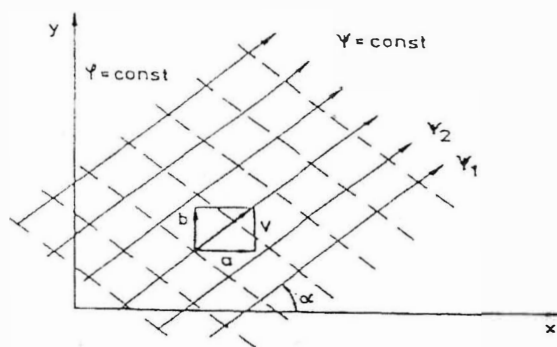
a więc linie prądu przedstawiają sobą rodzinę równoległych prostych

$$\varphi = ay - bx = \text{const},$$

nachylonych względem osi x o kąt α , dla którego

$$\text{tg} \alpha = \frac{v}{u} = \frac{b}{a},$$

co zostało przedstawione na rys. 8.



Rys.8. Przepływ jednorodny liniowy

Wydatek Q pomiędzy linią prądu Ψ_1 a linią Ψ_2 wynosi:

$$Q = \psi_2 - \psi_1$$

Jeżeli przepływ jest równoległy do osi x to funkcje φ przedstawiają się następująco:

$$\varphi = ax, \quad \psi = ay.$$

Źródło płaskie

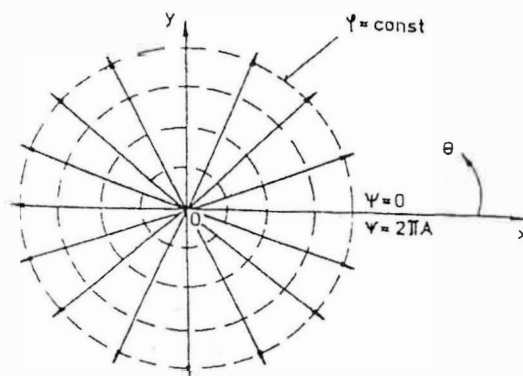
Potencjał prędkości można wyrazić następująco:

$$\varphi = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

a stosując współrzędne biegunowe:

$$\varphi = \ln r$$

Załóżmy, że wydatek sekundy wypływający ze źródła (rys. 9.) wynosi Q .



Rys.9. Linie prądu źródła

Ustalimy zależność pomiędzy wydatkiem źródła Q a funkcjami φ i ψ .

Wydatek płynu Q , wypływający przez koło o promieniu r , wynosi:

$$Q = 2\pi \cdot r V_r$$

ponieważ

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{d\varphi}{dr}$$

to

$$Q = \frac{d\varphi}{dr} \cdot 2\pi \cdot r$$

stąd:

$$d\varphi = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{dr}{r}$$

a całkując

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad (59)$$

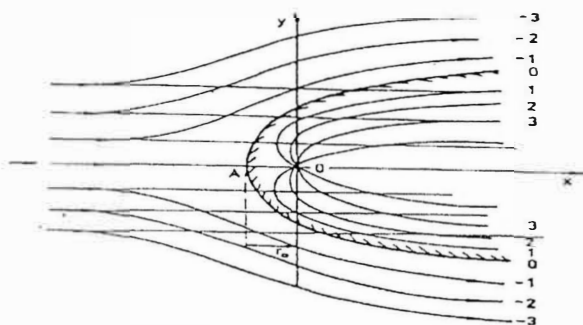
Łatwo również wykazać, że:

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \cdot \theta \quad (60)$$

a zatem intensywność źródła wyznaczona jest wydatkiem Q.

Źródło płaskie nałożone na przepływ równoległy

Formowanie przepływów bardziej złożonych można uzyskać poprzez superpozycję prostych postaci ruchu. W szczególności nałożenie źródła lub układów źródeł na przepływ równoległy pozwala na znalezienie szczególnych powierzchni prądu, które mogą być zastąpione przez powierzchnię ciała stałego. Otrzymujemy wtedy na zewnątrz takiej powierzchni analitycznie określony przepływ taki, jaki miałby miejsce przy wprowadzeniu do przepływu równoległego przeszkody o określonym kształcie. Najprostszy przypadek nałożenia źródła dodatniego o wydatku Q na przepływ równoległy, jednostajny o prędkości V daje obraz podany na rys. 10.



Rys. 10. Linie prądu wynikające przy nałożeniu źródła na przepływ równoległy

Punkt A linii prądu oznaczonej cyfrą "0" określa się z warunku, że prędkość w tym miejscu musi być równa zero, a zatem suma prędkości przepływu równoległego V i prędkości przepływu źródłowego V_r - przeciwnie skierowanej - musi być równa zero:

$$V + V_r = 0$$

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r_0}$$

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r_0}$$

$$V + \frac{Q}{2\pi r_0} = 0$$

stąd:

$$r_0 = -\frac{Q}{2\pi V}$$

Gdyby do przepływu równoległego wprowadzić przeszkodę stałą o takim samym kształcie jak określa linia prądu $\Psi' = 0$ ruchu złożonego, wówczas rysunek linii -1, -2, -3, pozostałby niezmienny. Tak więc połączenie źródła płaskiego z przepływem równoległym pozwala na odtworzenie analitycznie opływu kształtującego się dookoła powierzchni walcowej ciała stałego o określonym kształcie geometrycznym.

POLE CIŚNIEŃ

Dla płynów nielepkich równania Naviera-Stokesa (42) upraszczają się do postaci Eulera tj.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Powyższe równania ruchu pozwalają na ustalenie relacji dynamicznej pomiędzy prędkością V (lub składowych u, v, w) a ciśnieniem p.

W ogólnej postaci, równania różniczkowe ruchu Eulera (61) nie całkują się. Tylko dla szczególnych przypadków kiedy ruch jest potencjalny i ustalony równania te mogą być całkowane. Dla potencjalnego i ustalonego ruchu płynu nieściśliwego w polu grawitacyjnym całka równań różniczkowych Eulera stanowi równanie Bernoulliego.

$$\left. \begin{aligned} \frac{V^2}{2} + g \cdot z + \frac{p}{\rho} &= \text{const}, \\ \text{lub} \\ \frac{V^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} &= \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

gdzie:

g - z - potencjał sił ciężenia w polu grawitacyjnym,

g - przyspieszenie ziemskie,

z - kierunek pionowy ze zwrotem od środka kuli ziemskiej.

Równanie Bernoulliego stanowi równanie bilansu energii mechanicznej i wyraża prawo niezniszczalności energii.

Składnik $\frac{V^2}{2g}$ reprezentuje energię kinetyczną, składnik z -

energię potencjalną położenia, składnik $\frac{p}{\gamma}$ - energię potencjalną ciśnienia.

Sily ciążenia możemy nie brać pod uwagę ponieważ są one małe w stosunku do sil ciśnieniowych. W związku z tym równanie (62) przybiera postać:

$$\rho \frac{V^2}{2} + p = \text{const.} \quad (63)$$

Posiłkując się więc powyższym równaniem, znając prędkość w dowolnym punkcie przepływu, możemy obliczyć ciśnienie (po ustaleniu wartości stałej równania wychodząc z warunków brzegowych).

LITERATURA

[1] Baron A., Gąsowski W.: Krytyczna ocena metod obliczeń oporów ruchu pojazdów szynowych. *Pojazdy Szynowe*, nr 2/1976.

[2] Bernard M.: L'aerodynamique des trains, *Revue Generale des Chemins de Fer*, nr 2/1971.

[3] Bernard M., Guiheu M.C.: Mesures recentes de la resistance a l'avancement du materiels roulants, *Revue Generale des Chemins de Fer*, Avril 1976.

[4] Gawthorpe R.G.: Aerodynamics of trains in the open air. *Aerodynamics In Railway Engineering*.

[5] Gąsowski W., Krettek O.: Określenie oporów aerodynamicznych pojazdów szynowych *Trakcja i Wagony*, nr 10/1990.

[6] Gąsowski W.: Calculation of Motion Aerodynamic Drag of Rail Vehicles Incorporated in Draft of Cars. *Archives of Transport*, vol 5, iss.1-4. Warsaw 1993.

[7] Gąsowski W.: Podstawy teoretyczne badań aerodynamicznych pojazdów szynowych. *Zeszyty Naukowe PP, Maszyny Robocze i Pojazdy*, nr 39/1993.

[8] Gąsowski W., Ruthendorf-Przewoski K., Witt A.: Wpływ obciążeń wywołanych silami aerodynamicznymi na układ zawieszenia pojazdów szynowych. *Przegląd Mechaniczny*, nr 5-6/1993 i 10/1993.

[9] Gąsowski W., Baron A.: Podstawy teoretyczne i metody określania oporu aerodynamicznego pociągu. *Problemy Kolejnictwa. Zeszyt 126/1997*.

[10] Gąsowski W.: Aerodynamika - podstawowy problem

pociągów dużej prędkości. *Materiały Międzynarodowej Konferencji „TRANSPORT'97”*, Ostrawa-Katowice 1997.

[11] Guiheu C.: La resistance a l'avancement des rames TGV-PSE. *Bilan des etudes et des resultats des mesures. Revue Generale des Chemins de Fer*, Janvier 1982

[12] Hoerner S.F.: *Fluid-Dynamic Drag*, New Jersey, USA 1958.

[13] Kubski K.: Badania rozkładu prędkości strumienia powietrza w podmuchach wywołanych jazdą pociągu i wzajemnego wpływu mijających się pociągów na zmiany ciśnienia statycznego działającego na ściany wagonów i na powierzchnię czołową lokomotyw. *Prace COBiRTK Warszawa*, styczeń 1974.

[14] Kubski K.: Aerodynamika szybkich pociągów. *Studium i wnioski wykorzystania badań obcych oraz uzupełnienie własnymi. Część 1 i 2. Prace COBiRTK W-wa*, grudzień 1974.

[15] Marty P., Autruffe H.: Etudes aerodynamiques instantonnees liees a la circulation des trains a grandes vitesses. *Revue Generale des Chemins de Fer*, Juin 1973

[16] Neppert H., Sanderson R.: Untersuchungen zur Schnellbahn-Aerodynamik. *Z.Flugwiss* nr 22/1974.

[17] Peters J.L.: Mesure de la trainee aerodynamique de l'ICE. *Revue Generale des Chemins de Fer*, Janvier 1990

[18] Rebuffet P.: Aerodynamique experimentale, *Wyd.Librairie Polytechnique Ch.Beranger, Paris et Liege*, 1958.

[19] Roumeguere Ph.: L'aspect economique des grandes vitesses ferroviaires, *Travaux* 1974.

[20] Reduction in the aerodynamic drag of wagons. *ORE*, 1992 nr 841.

[21] Sauvage G., Fortin J.P.: La trainee de roulement des vehicules de chemin de fer. *Revue Generale des Chemins de Fer*, Aout 1982.

[22] Stromskij P.P.: Soprotivlenie dvizheniu elektropojezdov ER1 i ER10 i dizel pojezdov DR1 i D1, *Viestnik Vsjesojuznogo Naučno-Issledovatielskogo Instituta Zeleznodorożnogo Transporta*, nr 8. Moskwa 1966.

[23] Tadanao Miki: Rolling stock for higt speed operation. *Quarterly Report* 625.2-185.4

[24] Thibedore T., Willaime A.: L'aerodinamisme au materiel et a la traction, *Revue Generale des Cemins de Fer*, Dec.1995.

[25] Tests foreshadow higher speeds an Tokaido Schinkansen. *Railway Gaz.Int.*, nr 6/1996.

[26] TGV nowej generacji czyli wysoka prędkość po niskiej cenie. *Technika Transportu Szynowego*, nr 2/1996.

[27] Zaks N.A.: *Osnovy eksperimentalnoj aerodinamiki*. Wyd.Oborongiz. Moskwa 1953.