Dr hab. inż. Stanisław Dżuła
Politechnika Krakowska

Dynamika i stateczność układów w ruchu złożonym z uwzględnieniem elementów wirujących

Praca zawiera analizę dynamiczną trójwymiarowych ciągłych modeli wirującego koła i zestawu kołowego z odkształcalnymi kołami. Rozwiązanie problemu brzegowo-początkowego układu równań drgań wirującego koła pozwoliło na wyznaczenie form, częstotliwości i amplitud drgań własnych koła. Uzyskano analityczne rozwiązanie zagadnienia fal biegnących w wieńcu. Stwierdzono występowanie w kole efektu dudnienia i bifurkacji drgań. Drgania wymuszone koła analizowano z uwzględnieniem tarcia wewnętrznego. Badania stabilności wykazały, że w zakresie wysokich częstotliwości drgań istnieją duże obszary prędkości niestatecznego ruchu zestawu kołowego. Przedstawiono także fizyczny i analityczny model współpracy koło-szyna uwzględniający poślizgi w punkcie kontaktu. Analizę dynamiczną przeprowadzono w liniowym zakresie równań ruchu.

Część I

Wprowadzenie

W latach 1994 ÷ 1996 w Instytucie Pojazdów Szynowych Politechniki Krakowskiej realizowany był projekt badawczy KBN PB 0737/P4/94/06 pt. „Dynamiczne zagadnienia z tarciem suchym i tocznym", który obejmował trzy zadania:
- działanie ruchomych obciążeń na układy belkowe,
- badanie drgań wywołanych tarciem suchym,
- dynamika i stateczność układów w ruchu złożonym z uwzględnieniem elementów wirujących.

Prowadzone badania pozwoliły na uzyskanie wyników, które w bardzo wielkim skrócie można scharakteryzować następująco.

Badania dotyczące układów dynamicznych modelowanych bezinercyjnym ciągłym obciążeniem poruszającym się wzdłuż belki prowadzono w szczególności dla potrzeb szybkiego i bardzo szybkiego transportu szynowego. Uwzględnienie w rozważaniach nieliniowości podłoża, na którym oparta jest belka w formie łamanej charakterystyki sprężystości lub charakterystyki sprężysto-plastycznej, pozwala na istotne zbliżenie modeli do ich realnych odpowiedników w istniejących lub projektowanych układach fizycznych. Opracowanie odpowiedniej metody analityczno-numerycznej pozwoliło na rozwiązanie nieliniowego układu równań ruchu oraz zbadanie wpływu wybranych parametrów modelu na jego charakterystyki dynamiczne. Podstawowym założeniem była stacjonarność rozwiązań falowych w układzie współrzędnych związanym z ruchomym obciążeniem. Ponadto wykonano analizę dynamiczną struktury periodycznej na przykładzie pojazdu unoszonego magnetycznie. Wykorzystując teorię Floquet'a rozwiązano problem drgań swobodnych i wymuszonych toru. Ruch siły harmonicznej wzdłuż struktury periodycznej związany został z propagacją nieskończonej liczby fal.

Zjawisko korrugacji szyn jest jednym z głównych problemów nurtujących współczesne kolejnictwo, a także miejski transport szynowy. Problem ten, którego źródłem są zjawiska zachodzące w strefie kontaktu koło-szyna nie znalazł jak do tej pory zadowalającego wyjaśnienia. Nie ma zgodności nawet co do wiodącego procesu wywołującego charakterystyczne pofalowania powierzchni tocznej kół i szyn. Jeden z poglądów zakłada, że procesem wiodącym jest zużycie ścierne wywołane poślizgami podłużnymi. W wyniku przeprowadzonej analizy dynamicznej układu koło-szyna postawiono hipotezę, że czynnikiem decydującym o powstaniu korrugacji jest nierównomierny rozkład naprężeń własnych spowodowany odkształceniami plastycznymi powstałymi w wyniku przeciążeń wysokoczęstotliwościowymi siłami kontaktowymi.

Wprowadzenie szybkiego transportu szynowego wymaga badania pełnego układu pojazd-tor, a w tym także zagadnień związanych z oddziaływaniem hamulców wiroprądowych i szynowych na tor np. dynamiczne ugięcia szyny kolejowej i płozy hamulca wywołane siłą uciągu magnetycznego. W związku z tym wykonano analizę zjawisk elektrodynamicznych, w wyniku której wyznaczono siły magnetyczne (ponderomotoryczne) działające między torem a płozą. Badania przeprowadzono dla różnych fizycznych modeli hamulców.

Wiele układów fizycznych wykorzystuje siły tarcia do przekazywania mocy (sił stycznych). Prawidłowa praca takich układów zależy od poprawności rozwiązań konstrukcyjnych i doboru par ciernych. Istniejące modele tarcia są albo zbyt proste, albo tak złożone, że wykorzystanie ich w badaniach teoretycznych jest bardzo trudne. Zaproponowano nowy model tarcia i zbadano wpływ poszczególnych jego elementów na kształt trajektorii w płaszczyźnie fazowej. Badania teoretyczne zostały zweryfikowane doświadczeniem na specjalnie zbudowanym - w tym celu - stanowisku do badań zjawisk dynamicznych wielomasowych układów z tarciem suchym. W badaniach uwzględniono podstawowe hipotezy takie jak: zależność współczynnika tarcia statycznego od czasu wzajemnego kontaktu ciał i nacisku, zależność tarcia dynamicznego od prędkości względnej a także znaku przyśpieszenia.

Typowe prognozowanie zachowania się kół i zestawów kołowych pojazdów polega na analizie drgań własnych i wymuszonych. Sprowadza się to do poszukiwania wartości własnych zagadnienia brzegowego lub wyznaczenia charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych. Badania prowadzone są z reguły na modelach, w których wykorzystuje się MES przy pominięciu rotacji koła. W celu istotnego poprawienia dokładności modelowania, efektywności i stabilności numerycznej dotychczas stosowanych metod w analizie dynamicznej wykorzystano opracowane analityczne modele koła i zestawu kołowego. Modele te opisane zostały różniczkowo-całkowymi równaniami ruchu o charakterze falowym. Uzyskano analityczne rozwiązania w postaci sprężystych fal biegnących w wieńcu przestrzennego modelu wirującego koła co umożliwiło analizę ruchu tocznego (bez poślizgów) modelu zestawu kołowego. Uwzględnienie sprężystości kół pozwoliło wykazać, że w obszarze wysokich częstości drgań istnieją zakresy prędkości, w których ruch jest niestabilny. Ruch toczny zestawu kołowego w obszarze niestabilnym został zinterpretowany fizycznie w zależności od form drgań zestawu kołowego. Zaawansowano badania, mające na celu uwzględnienie poślizgów w strefie styku koła z szynami, czego wyrazem jest opracowany model analityczny. Współpracę koła z szyną w płaszczyźnie kontaktu (w kierunku wzdłużnym, poprzecznym oraz ruch wiertny) zamodelowano modelem ciała lepko-sprężystego Maxwella (sprężyna i tłumik połączone szeregowo) wykorzystując przy tym liniową teorię Kalkera. Uzyskane wyniki badań stanowią przyczynek do wyjaśnienia niekorzystnych zjawisk występujących w układach transportowych takich jak: korrugacje szyn i kół, poligonizacja kół i wężykowanie zestawów kołowych. Postawiono hipotezę o przyczynach poligonizacji kół.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie w sposób syntetyczny wyników badań uzyskanych w ramach realizacji trzeciego zadania projektu badawczego. W następnych artykułach będą przedstawione wyniki badań otrzymane w ramach zadania pierwszego i drugiego.

1. Wstęp

Obserwowany w transporcie szynowym wzrost prędkości pojazdów w przewozach pasażerskich i wzrost ładowności w ruchu towarowym jest związany ze wzrostem dynamicznego obciążenia koło-szyna. Obserwuje się przy tym tendencję do wykorzystania optymalnych parametrów tego układu. Stany rezonansowe i dynamiczne stany krytyczne wiążą się z dużym prawdopodobieństwem wystąpienia przeciążeń. Jednym ze zjawisk tego typu jest samowzbudne narastanie zaburzeń, co jest bezpośrednio związane z problemem stateczności oddziaływania i ruchu tocznego zestawów kołowych. Zjawiska te w ruchu pojazdów szynowych muszą być bezwzględnie eliminowane.

W badaniach wielu zjawisk dynamicznego oddziaływania koła i szyny, w których interesują nas głównie wysokoczęstotliwościowe drgania kontaktowe, jako model pojazdu przyjmuje się koło lub zestaw kołowy, na który działa zadane obciążenie statyczne. Jest to uzasadnione tym, że zespoły pojazdu znajdujące się nad usprężynowaniem mają małe wartości częstotliwości drgań własnych (z reguły nie przekraczające kilku *Hz*) i wzbudzenie ich przez mające wysoką częstotliwość siły kontaktowe koła i szyny jest trudne. Stwierdzenie to jest słuszne przy założeniu, że zespoły te traktuje się jako bryły sztywne. W rzeczywistości rama wózka i nadwozie jako zespoły o rozłożonej masie i sztywności mają nieskończoną liczbę stopni swobody, a zatem teoretycznie istnieje możliwość wzbudzenia wysokoczęstotliwościowych drgań elementów usprężynowanych. Częstotliwość pierwszej formy drgań giętnych wózka wagonu towarowego wynosi w zależności od stopnia załadowania wagonu kilkanaście do kilkudziesięciu *Hz*, a drugiej i trzeciej formy drgań kilkaset *Hz*. W związku z tym model podukładu, złożonego z koła lub zestawu kołowego współpracującego z szynami, może być wykorzystany w analizie dynamicznej, polegającej na wyznaczeniu widma częstości siły kontaktowej lub widma przemieszczeń. Uzyskane w ten sposób widmo wymuszenia dynamicznego lub kinematycznego jest podstawą do zbudowania bardziej złożonego modelu pojazdu poprzez jego częściową dyskretyzację.

W badaniach dynamiki układu koło-szyna, z wykorzystaniem modelu w postaci koła obciążonego pionową siłą statyczną, zwykle zakłada się, że koło jest idealnie sztywne z ewentualnym elementem sprężystym tzw. sprężyną Hertza o charakterystyce liniowej lub nieliniowej, modelującej lokalne odkształcenia sprężyste w obszarze styku. Takie podejście do zagadnienia dynamicznego oddziaływania koła z szyną spotyka się w wielu pracach dotyczących dynamicznej współpracy układu koło-szyna. W zakresie niskich częstotliwości drgań (poniżej *30 Hz*), a nawet do ok. *100 Hz*, koło może być modelowane jako ciało idealnie sztywne, zaś powyżej tej granicy należy uzupełnić model "sprężyną Hertza". Częstotliwość *100 Hz*, przyjmowana również jako umowna granica między drganiami niskiej i wysokiej częstotliwości, wydaje się być zbyt wysoka dla modelu sztywnego koła. Wyznaczona w badaniach eksperymentalnych najniższa częstotliwość drgań własnych koła pojazdów kolei brytyjskich wynosi ok. *70 Hz*.

Model sztywnego koła upraszcza w znaczny sposób analizę dynamiczną, jednakże może być wykorzystany w ograniczonym zakresie, np. do badania wpływu drgań na organizm ludzki. Zakres częstotliwości analizowany pod względem komfortu jazdy zawiera się w paśmie do *20 Hz*.

Jest oczywiste, że przy dostatecznie wysokich częstotliwościach drgań również model ze "sprężyną Hertza" nie umożliwia opisu z wystarczającą dokładnością zjawisk zachodzących w strefie kontaktu koła z szyną. Granica stosowalności tego modelu jest określona przez najniższą wartość częstotliwości drgań własnych. Częstotliwość ta jest związana z drganiami giętnymi nie leżącymi w płaszczyźnie koła i jej wartość zależy od konstrukcji koła, a przede wszystkim od grubości tarczy i wieńca oraz średnicy koła. Dolną wartość częstotliwości drgań giętnych dla kół kolejowych można przyjąć w granicach *70÷80 Hz*, jakkolwiek dla konkretnej konstrukcji koła wartość tej częstotliwości może być dwa lub trzy razy wyższa.

Granice stosowalności modelu "sztywnego koła" stały się impulsem do podjęcia prac nad dynamicznym modelem koła, który uwzględniałby jego odkształcenia sprężyste oraz umożliwiał badanie stateczności ruchu w zakresie wysokich częstotliwości. Jednym ze sposobów analizy tego zagadnienia jest wykorzystanie metody elementów skończonych (MES). W zagadnieniach dynamiki koła może to być związane z trudnościami natury technicznej oraz z trudnościami związanymi z interpretacją otrzymanych wyników numerycznych. Szczególnie dotyczy to ciągłych układów mechanicznych, w których wartości częstotliwości drgań własnych różnią się nieznacznie między sobą. Problem taki występuje przy badaniu stateczności ruchu oraz analizie bifurkacji drgań. Stąd też stosowanie MES w zagadnieniach dynamicznych wymaga dużej dokładności numerycznej, co wiąże się z wydłużeniem procesu obliczeń. Niemniej jednak z uwagi na znaczne założenia upraszczające w istniejących analitycznych modelach sprężystego koła kolejowego, MES jest szeroko wykorzystywana w problemach wysokoczęstotliwościowych drgań kontaktowych. Metoda ta stwarza możliwość uwzględnienia specyficznych parametrów geometrycznych koła jak, np. zmienną grubość tarczy i jej krzywizny, które analitycznie są trudne do modelowania. MES stosowana jest głównie do wyznaczania częstotliwości drgań własnych kół lub zestawów, wyznaczenia charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych oraz w badaniach emisji hałasu wywołanego przez toczące się koła.

Celem zadania 3 w projekcie badawczym była budowa analitycznych modeli koła i zestawu kołowego oraz analiza dynamiczna przeprowadzona przy wykorzystaniu tych modeli.

Wirujące koło kolejowe zamodelowano układem przestrzennym składającym się z wieńca (obręczy) jako zakrzywionej pryzmatycznej belki oraz z tarczy modelowanej masowym podłożem sprężystym. Matematyczny opis modelu stanowi układ czterech cząstkowych sprzężonych równań różniczkowych opisujących drgania wieńca. Model matematyczny uwzględnia dodatkowo wymuszenia kinematyczne, jakim może podlegać środek masy koła.

Analiza dynamiczna modelu polegała na poszukiwaniu analitycznego rozwiązania układu równań w postaci fal stojących (rozwiązanie problemu brzegowego i początkowego) oraz w formie fal biegnących. Rozwiązania te uzyskano dla koła wirującego ze stałą prędkością kątową. Wyniki obliczeń numerycznych porównano z wynikami badań doświadczalnych. Uwzględnienie w budowie modelu sił bezwładności związanych z przyśpieszeniem Coriolisa pozwoliło na potwierdzenie występowania w wirującym kole takich zjawisk, jak rozdwojenie drgań i dudnienie.

Model wirującego koła został następnie rozbudowany poprzez wprowadzenie składników powodujących dyssypację energii w układzie. Lepko-sprężyste właściwości materiałów koła opisano modelem Kelvina-Voigta. Dla wymuszeń harmonicznych w postaci sił i momentu skupionego poszukiwano analitycznego rozwiązania drgań wymuszonych wirującego koła. Uzyskane rozwiązanie umożliwiło wyznaczenie charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych dowolnego punktu poprzecznego przekroju wieńca przy złożonej postaci wymuszenia.

Trójwymiarowy model sprężystego koła stanowił podstawę do budowy analitycznego modelu zestawu kołowego poruszającego się po torze prostym.

Zestaw kołowy był modelowany układem dwóch sprężystych kół połączonych sztywną osią. Pełny opis matematyczny modelu stanowi układ 14 nieliniowych sprzężonych równań różniczkowo-całkowych. Współdziałanie z torem, na tym etapie badań, modelowano liniowymi sprężynami Hertza, przenoszącymi siły kontaktowe w trzech kierunkach oraz moment wiertny kół na szynach.

Rozwiązanie układu równań matematycznego modelu zestawu kołowego, z uwagi na jego złożoność, ograniczono do zakresu liniowego. Przy założeniu stałej prędkości obrotowej zestawu kołowego uzyskano analityczne rozwiązanie zagadnienia brzegowego. Rozwiązanie problemu brzegowego stanowiło podstawę do teoretycznej analizy stabilności (według pierwszego przybliżenia) ruchu zestawu kołowego w torze. Analizę stateczności przeprowadzono w układzie: sztywność sprężyny Hertza - prędkość liniowa ruchu tocznego. Wykazano, że w zakresie wysokich częstotliwości drgań istnieją duże obszary ruchu niestatecznego. Położenie obszarów niestateczności na płaszczyźnie sztywność-prędkość jest zależne od formy drgań zestawu. Podano także fizyczną interpretację niestabilnego ruchu tocznego zestawu kołowego.

Bardzo ważnym zagadnieniem związanym z transportem szynowym jest dynamiczne zagadnienie kontaktu tocznego z uwzględnieniem tarcia (poślizgów: wzdłużnego, poprzecznego i wiertnego). Do modelowania współpracy każdego koła zestawu kołowego z szyną wykorzystano dwa proste modele ciała sprężystego i ciała lepkosprężystego. Oddziaływanie koła i szyny w kierunku pionowym (prostopadłym do płaszczyzny toru) modelowano liniową sprężyną Hertza, której sztywność zależy od nominalnego obciążenia zestawu kołowego. Natomiast współpracę koła z szyną w płaszczyźnie kontaktu w kierunku wzdłużnym, poprzecznym oraz ruch wiertny koła na szynie zamodelowano modelem ciała lepko-sprężystego Maxwella (sprężyna i tłumik połączone szeregowo). Do określenia stycznych sił kontaktowych wykorzystano liniową teorię Kalkera .

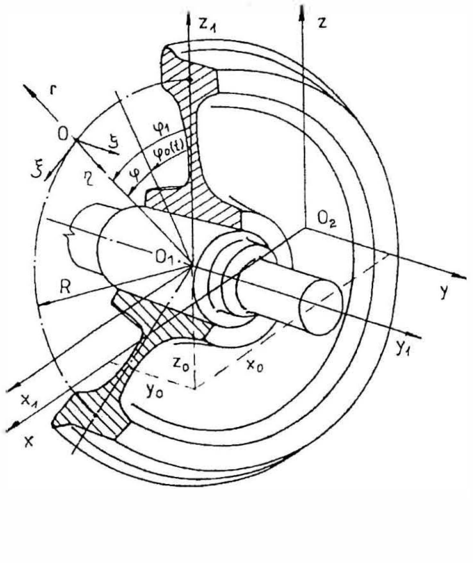
Równania drgań wirującego koła, a także zestawu kołowego zostały wyprowadzone metodą d'Alemberta. Wybór podyktowany był tym, iż w metodzie d'Alemberta jest rozwinięta fizyczna interpretacja sił działających na układ. W metodzie energetycznej (metoda równań Lagrange'a II rodzaju) występują zależności między skalarami. W odniesieniu do rozpatrywanych układów uwzględnienie w metodzie Lagrange'a np. rozkładu naprężeń w połączeniu tarczy koła z wieńcem jest bardzo trudne, co w metodzie d'Alemberta nie sprawia większych trudności.

Wyniki obliczeń numerycznych otrzymano, wykorzystując opracowane programy komputerowe. Programy te napisano w języku FORTRAN, wykorzystując szereg procedur obliczeniowych z biblioteki CERN. Z uwagi na to, że w analizie dynamicznej pojawiły się algebraiczne układy równań źle uwarunkowanych, zmienne w programach komputerowych są typu DOUBLE PRECISION.

W następnych punktach podano w sposób syntetyczny metody modelowania wirującego koła i zestawu kołowego oraz uzyskane wyniki obliczeń numerycznych.

2. Fizyczny model wirującego koła

Wieniec koła kolejowego jest modelowany jako sprężysta zakrzywiona belka Rayleigha połączona z osią ciągłym inercyjnym podłożem sprężystym typu Winklera o charakterystyce liniowej. Tarcza koła stanowi podłoże sprężyste dla wieńca. Do rozważań przyjęto koło kolejowe wirujące wokół osi y_1, którego środek O_1 może dodatkowo przemieszczać się względem osi x,y,z odpowiednio o wartość x_o, y_o, z_o. Prędkość kątowa koła i przemieszczenia x_o, y_o, z_o są funkcjami czasu t. Środek koła O_1 pokrywa się ze środkiem krzywizny osi obręczy. Na rys.1 pokazano układy współrzędnych wykorzystywanych do matematycznego opisu modelu:



Rys.1. Układy współrzędnych

- biegunowy układ współrzędnych r, φ o biegunie w środku koła O_1 sztywno związany z wirującym kołem; w układzie tym opisuje się nieodkształconą geometryczną oś wieńca koła,
- biegunowy układ współrzędnych r, φ_1 o biegunie w środku koła; wykorzystywany do opisu ruchu obrotowego koła,
- prostokątny prawoskrętny układ ξ, η, ζ, którego początek O leży na geometrycznej osi wieńca, a jego początek określony jest zmienną przestrzenną φ lub φ_1; osie ξ, η, ζ są lokalnie styczne, normalne i binormalne do osi wieńca; wykorzystywany do opisu przemieszczeń, sił wewnętrznych i kształtu przekroju poprzecznego wieńca,
- prostokątny prawoskrętny układ x,y,z o początku O_2 służący do opisu ruchu środka koła O_1. Oś x skierowana jest wzdłuż osi toru; z - prostopadle do płaszczyzny toru; y - prostopadle do płaszczyzny x,y,
- prostokątny prawoskrętny układ x_1,y_1,z_1 o początku O_1 powstały w wyniku translacji układu x,y,z. Płaszczyzna x_1,z_1 jest płaszczyzną osi wieńca,

x_o, y_o, z_o - współrzędne środka koła O_1 w układzie x,y,z.

Przez geometryczną oś wieńca rozumie się miejsce geometryczne środków ciężkości przekrojów poprzecznych nieodkształconego wieńca koła.

3. Matematyczny model koła

Układ sprzężonych równań różniczkowych opisujących w układzie r, φ drgania swobodne wieńca koła wirującego wokół osi y_1 z prędkością kątową $\dot{\varphi}_o$ został wyprowadzony metodą d'Alemberta [1] ma postać :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-m_1\frac{\partial u}{\partial\varphi}+m_2\frac{\partial w}{\partial\varphi}+m_3\right)-2\dot{\varphi}_o\frac{\partial}{\partial t}\left(m_4 v+s_1\vartheta\right)-k_1\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(k_2 v-k_3 w\right)+k_4 u=$$

$$= Rq_\xi + m_\zeta - s_7\ddot{\varphi}_o - m_{19}\left(\ddot{x}_o\cos\varphi_1 - \ddot{z}_o\sin\varphi_1\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi^2}\left(m_5 v+m_6 w\right)-m_7\frac{\partial u}{\partial\varphi}-m_8 v+s_2\vartheta\right]+2\dot{\varphi}_o\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(m_9 v-m_{10}w-s_3\vartheta\right)-m_{11}u\right]-$$

$$-k_5\left(\frac{\partial^4 v}{\partial\varphi^4}+2\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+v\right)-k_6\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(k_7 v+k_8 w+t_1\vartheta\right)+k_2\frac{\partial u}{\partial\varphi}-k_9 v+t_2\vartheta=$$

$$=-Rq_\eta+\frac{\partial m_\zeta}{\partial\varphi}+s_8\dot{\varphi}_o^2-m_{20}\left(\ddot{x}_o\sin\varphi_1+\ddot{z}_o\cos\varphi_1\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi^2}\left(m_{12}v+m_{13}w\right)+m_{14}\frac{\partial u}{\partial\varphi}-m_{15}w-s_2\vartheta\right]+2\dot{\varphi}_o\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial t}\left(m_{16}v+s_5\vartheta\right)-\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}\left(k_6 v+k_{10}w\right)+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(k_8 v+k_{11}w+t_3\vartheta\right)-k_3\frac{\partial u}{\partial\varphi}-k_{12}w-t_4\vartheta=-Rq_\zeta-\frac{\partial m_\eta}{\partial\varphi}+m_{21}\ddot{y}_o+m_{22}\left(\ddot{x}_o\sin\varphi_1+\ddot{z}_o\cos\varphi_1\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(m_{17}v+m_{18}w+s_6\vartheta\right)+2\dot{\varphi}_o\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(m_{12}v+m_{13}w\right)+m_{14}u\right]-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(k_6 v+k_{13}w+t_5\vartheta\right)-k_{14}v+$$

$$+k_{15}w+t_6\vartheta=m_\xi-s_9\dot{\varphi}_o^2-m_{23}\ddot{y}_o+m_{24}\left(\ddot{x}_o\sin\varphi_1+\ddot{y}_o\cos\varphi\right),$$

gdzie:

u, v, w - przemieszczenie punktu O odpowiednio wzdłuż osi ξ, η, ζ,

ϑ - kąt obrotu przekroju poprzecznego wieńca względem osi ξ,

m_i, s_i - zredukowane masy i momenty masowe wieńca i tarczy koła,

k_i, t_i - zredukowane sztywności wieńca i tarczy koła,

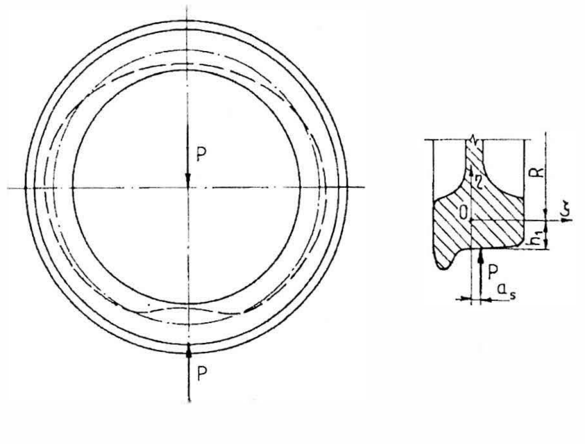
q_ξ, q_η, q_ζ, m_ξ, m_η, m_ζ - zewnętrzne ciągłe liniowe obciążenie osi wieńca.

Pierwsze równanie układu (1) opisuje drgania podłużne (obwodowe) osi wieńca; drugie drgania giętne w płaszczyźnie koła (radialne); trzecie-drgania giętne nie leżące w płaszczyźnie geometrycznej osi wieńca koła; czwarte-drgania skrętne wieńca. Równania te są sprzężone siłami sprężystości i siłami bezwładności. Siły bezwładności powodujące sprzężenie drgań wynikają z asymetrycznego przekroju poprzecznego wieńca oraz przyśpieszenia Coriolisa. Pierwsze dwa równania opisują drgania w płaszczyźnie koła, drugie dwa drgania z płaszczyzny koła.

4. Częstotliwości i amplitudy drgań własnych

Drgania swobodne geometrycznej osi wieńca opisuje jednorodny układ równań różniczkowych (1). W ogólnym przypadku zmiennego obrotowego ruchu koła układ równań (1) jest układem o zmiennych współczynnikach. Jedynie dla ruchu jednostajnego $\dot{\varphi}_0$ = const układ równań (1) staje się układem o stałych współczynnikach. W związku z tym, dla $\dot{\varphi}_0$ = const, rozwiązania problemu brzegowo-początkowego jednorodnego układu (1) poszukiwano w postaci funkcji o rozdzielonych zmiennych. Stosując metodę Fouriera uzyskano ścisłe rozwiązanie zagadnienia brzegowo-początkowego układu równań (1). Przykładowo, w tabeli 1, dla sześciu pierwszych form drgań podano wyniki obliczeń numerycznych częstotliwości drgań własnych koła o średnicy nominalnej *0.95 m* i grubości wieńca *0.05 m*. Obliczenia wykonano dla prędkości kątowych koła, którym w ruchu tocznym odpowiadają prędkości liniowe *0, 100, 200, 300, 400 km/h*.

W tabeli 2 podano wartości amplitud drgań harmonicznych dla prędkości *200 km/h*. Warunki początkowe przyjęte w obliczeniach odpowiadają odkształceniom koła pod działaniem skupionej siły radialnej $P=1$ N działającej w chwili $t=0$ na tocznym okręgu koła (rys.2).



Rys.2. Odkształcenie koła pod działaniem siły radialnej

Z tabeli 1 wynika, że dla $\dot{\varphi}_0 = 0$ każdej formie drgań odpowiadają cztery wartości częstotliwości. Występowanie czterech częstotliwości dla danej formy związane jest z istnieniem czterech niezależnych współrzędnych: przemieszczenia stycznego u, radialnego v, binormalnego w i kąta obrotu przekroju poprzecznego ϑ. Dla formy drgań z zerową liczbą średnic węzłowych występuje rozprzężenie drgań obwodowych z pozostałymi rodzajami drgań. Drgania podłużne wieńca są niezależne od drgań giętnych i skrętnych.

Ruch obrotowy koła powoduje podwojenie się dla każdej formy drgań, z wyjątkiem formy "zerowej", liczby częstotliwości drgań własnych. Jak wynika z tabel 1 i 2 bifurkacja drgań dotyczy częstotliwości i amplitudy drgań. Bifurkacja w kole związana jest z rozchodzeniem się fal sprężystych zgodnie i przeciwnie do kierunku obrotów koła. Źródłem rozszczepienia drgań są siły bezwładności wynikające z przyśpieszenia Coriolisa.

5. Porównanie wyników obliczeń teoretycznych z wynikami badań doświadczalnych

W tabeli 3 porównano wartości częstotliwości drgań własnych koła, otrzymane w wyniku badań doświadczalnych z wynikami obliczeń teoretycznych. Zamieszczone częstotliwości odpowiadają formom drgań koła charakteryzujących się zerową liczbą okręgów węzłowych. Numer formy (kolumna 1) określa równocześnie liczbę średnic węzłowych.

Wyniki badań eksperymentalnych i teoretycznych

Tabela 3

Nr formy n	Częstotliwość z badań doświad. [Hz] wg [2]	Częstotliwość z obliczeń teoretycznych [Hz]			
		MES		Metoda analityczna	
		wg [2]	wg [3]	$f_s=1$	$f_s=0.75$
0	-	1287	1329	330	330
	-	-	3520	373	373
	-	-	-	7810	6896
	-	-	-	14733	14733
1	416	953	982	415	413
	-	-	-	6623	6623
	-	-	7827	8072	7268
	-	-	-	15907	15907
2	1668	1656	1625	1702	1585
	-	-	-	9062	8470
	-	-	-	10015	10010
	-	-	-	20910	20908
3	4595	4571	4502	5068	4576
	-	-	-	10697	10270
	-	-	-	10977	10932
	-	-	-	28689	28684
4	8543	8488	8378	10804	9318
	-	-	-	11559	11397
	-	-	-	11979	12032
	-	-	-	37259	37249

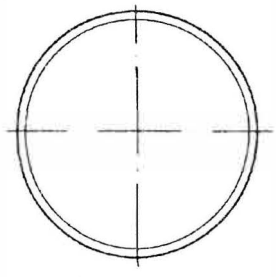
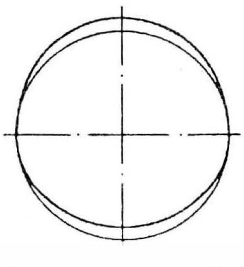
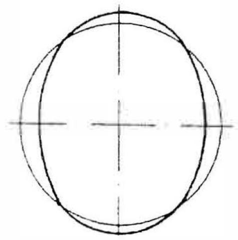
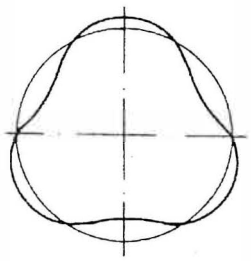
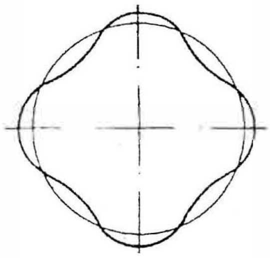
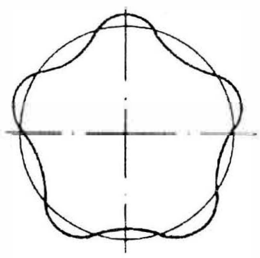
Wyniki badań doświadczalnych i obliczeń numerycznych, wykonanych metodą elementów skończonych (MES), uzyskane przez różnych autorów dla tego samego modelu koła zostały zaczerpnięte z literatury. Dla $n=1$ zwraca uwagę bardzo duża różnica wyników badań doświadczalnych w odniesieniu do wyników otrzymanych z MES.

Dwie ostatnie kolumny tabeli 3 zawierają wyniki analizy numerycznej modelu koła omawianego w ramach niniejszego artykułu. Do częstotliwości ok. *1700 Hz* obserwuje się dużą zgodność doświadczenia z teorią. Różnica między teorią a eksperymentem dla wyższych częstotliwości drgań spowodowana jest wpływem ścinania w kole. Działanie ścinania uwzględnia się przez wprowadzenie stałego współczynnika f_S, którego wartość wyznaczona empirycznie dla koła kolejowego wynosi *0.75*. Skutkiem przyjęcia stałej wartości f_S występuje zbyt duża korekta ścinania przy częstotliwościach niższych i zbyt mała przy częstotliwościach wyższych.

Wyniki przedstawione w tabeli 3 wskazują, że opracowany model koła może być wykorzystany do analizy dynamicznej wysokoczęstotliwościowych drgań koła w zakresie do ok. *5 kHz*. Można oszacować, że w zakresie *0 ÷ 2 kHz* model ten pozwala na dokładną prognozę dynamicznego zachowania koła, natomiast powyżej *2 kHz*

Formy i częstotliwości drgań własnych koła

Tabela 1

Nr formy n	Forma drgań własnych	Częstotliwość [Hz] przy prędkości V[km/h]				
		0	100	200	300	400
0		90.06 586.21 1520.17 2748.69	90.06 586.20 1520.17 2748.75	90.06 586.15 1520.18 2748.94	90.06 586.08 1520.20 2749.25	90.06 585.98 1520.23 2749.69
1		94.78 1282.29 1679.59 2959.74	94.66 94.91 1276.17 1288.40 1678.98 1680.20 2953.59 2965.98	94.54 95.03 1270.04 1294.50 1678.38 1680.83 2947.52 2972.31	94.41 95.16 1263.91 1300.59 1677.80 1681.47 2941.54 2979.72	94.29 95.29 1257.77 1306.66 1677.22 1682.11 2935.65 2985.21
2		307.98 1709.48 2102.49 3892.43	307.29 308.67 1705.32 1713.56 2097.52 2107.59 3883.89 3901.00	306.60 309.36 1701.07 1717.54 2092.69 2112.82 3875.37 3909.58	305.91 310.05 1696.73 1721.44 2088.00 2118.19 3866.87 3918.19	305.23 310.74 1692.31 1725.25 2083.43 2123.70 3858.39 3926.83
3		893.70 1996.72 2421.50 5337.81	892.15 895.25 1990.85 2002.53 2420.04 2423.04 5330.81 5344.84	890.6[illegible] 896.80 1984.94 2008.30 2418.64 2424.67 5323.83 5351.90	889.05 898.36 1978.99 2014.01 2417.33 2426.37 5316.89 5359.00	887.51 899.91 1972.99 2019.66 2416.08 2428.16 5309.98 5366.12
4		1722.88 2191.49 2909.95 6922.61	1720.11 1725.66 2184.68 2198.32 2908.91 2911.01 6916.48 6928.76	1717.33 1728.43 2177.86 2205.15 2907.89 2912.09 6910.39 6934.93	1714.56 1731.21 2171.06 2211.99 2906.89 2913.18 6904.18 6941.13	1711.79 1733.99 2164.26 2218.83 2905.90 2914.29 6898.27 6947.36
5		2355.49 2707.09 3611.22 8556.58	2348.64 2362.35 2702.86 2711.34 3608.74 3613.70 8550.86 8562.33	2341.79 2369.21 2698.64 2715.61 3606.26 3616.18 8545.15 8568.10	2334.96 2376.08 2694.44 2719.90 3603.77 3618.66 8539.47 8573.89	2328.13 2382.96 2690.25 2724.21 3601.29 3621.14 8533.80 8579.69

należy mieć na uwadze różnice spowodowane ścinaniem w kole.

6. Fale sprężyste w wieńcu koła

Metoda Fouriera w zastosowaniu do układów ciągłych pozwala zwykle uzyskać rozwiązanie w postaci fal stojących. Wykorzystując zależności wynikające z wyznacznika charakterystycznego układu równań (1), z drganiowej formy rozwiązania tego układu, otrzymano rozwiązanie w postaci fal biegnących. Przykładowe rozwiązanie fal podłużnych propagujących się w wieńcu wirującego koła ma następującą postać:

$$u(\varphi,t)=\sum_{i=1}^{4}Q_{0i}\sin\left(\omega_{0i}t+\psi_{ni}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{8}Q_{ni}\sin\left[\omega_{ni}t+\psi_{ni}+\mathrm{sgn}\left(HB_{ni}\right)n\varphi\right], \quad (2)$$

gdzie:

Q_{ni} - amplituda fali biegnącej o częstości ω_{ni}.

ψ_{ni} - przesunięcie fazowe fali,

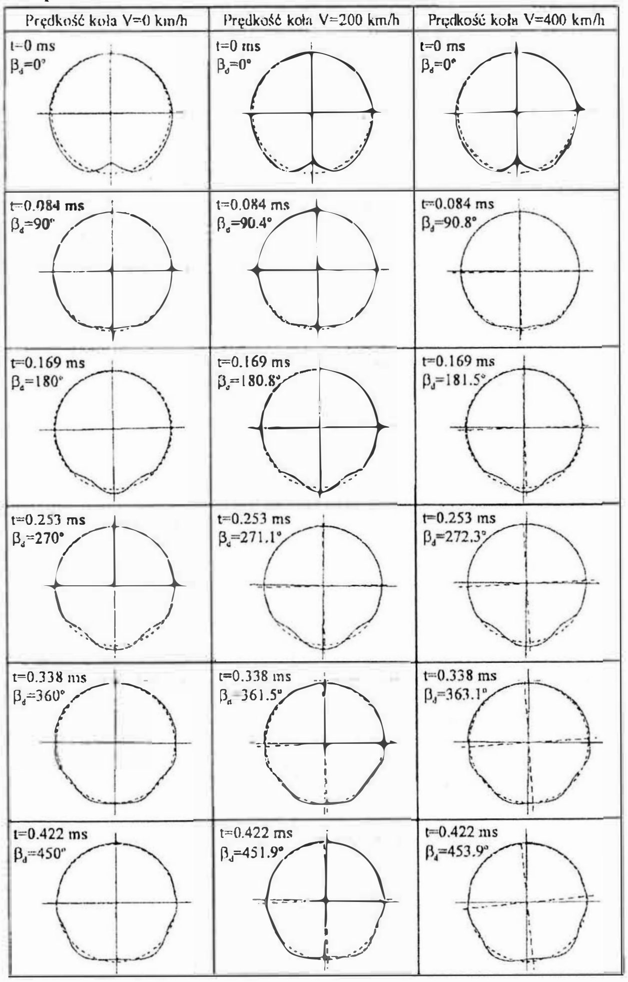
$sgn(HB_{ni})=1$ dla fali o zwrocie kątowej prędkości fazowej zgodnym ze zwrotem kątowej prędkości koła,

$sgn(HB_{ni})=-1$ dla fali o zwrocie kątowej prędkości fazowej przeciwnym do zwrotu kątowej prędkości koła.

Każdy z wyrazów szeregu (2) (oprócz $n=0$) reprezentuje sprężystą falę harmoniczną. Każda fala monochromatyczna charakteryzuje się ośmioma różnymi co do wartości bezwzględnej amplitudami i prędkościami fazowymi. Amplitudy, których wartości podano w dB przy poziomie odniesienia 10^{-11} m i prędkości fazowe są zależne od kątowej prędkości koła.

W tabeli 4 podano wyniki obliczeń propagacji sprężystych fal harmonicznych w wieńcu koła zestawu kolowego. Fale wzbudzane są warunkami początkowymi jak na rys.2. Każda fala monochromatyczna ma osiem prędkości fazowych, cztery o zwrocie zgodnym i cztery o zwrocie przeciwnym do zwrotu kątowej prędkości koła. Oznacza to, że propagacja fal następuje w kierunkach o przeciwnych zwrotach, przy czym dla $\dot{\varphi}_0=0$ występuje pełna symetria co do wartości prędkości fazowych, a w przypadku symetrycznych warunków początkowych również co do wartości amplitud. Ruch obrotowy koła powoduje naruszenie symetrii propagacji fal sprężystych w wyniku pojawienia się sił bezwładności związanych z przyśpieszeniem Coriolisa. Prędkości fazowe fal o przeciwnych zwrotach są różne i zależne od prędkości wirowania koła. Wynika stąd, że w kole wirującym nie mogą powstać fale stojące. Szczegółowo problem fal sprężystych w wieńcu koła kolejowego był omawiany w pracach [1] i [4].

Na rys.3, dla prędkości *0, 200 i 400 km/h*, przedstawiono rozchodzenie się paczki fal giętnych składającej się z fal monochromatycznych o liczbach falowych od *1* do *50*. Czas *t* po którym przedstawiono na kolejnych rysunkach bieżące położenie paczki fal wyliczono z warunku, iż przy prędkości koła $\dot{\varphi}_0=0$ fala harmoniczna o największej prędkości fazowej przebyła drogę $\beta_d=0^o, 90^o, 180^o, 270^o, 360^o$ i 450^o. Przerywane osie symetrii obrazują obrót koła po czasie *t*.



Rys.3. Propagacja paczek fal

7. Bifurkacja i efekt dudnienia w kole

Bifurkacja drgań w wirującym kole powoduje podwojenie się liczby częstotliwości dla każdej formy drgań z wyjątkiem formy zerowej. Jedna z częstotliwości ma wartość niższą, a druga wyższą w porównaniu do częstotliwości dla koła nieruchomego. Może zatem istnieć taka prędkość koła, przy której dwie częstotliwości tej samej formy drgań mają identyczną wartość. Z fizycznego punktu widzenia oznacza to, że może nastąpić utrata stateczności drgającego układu. Prędkość, dla której występuje to zjawisko jest krytyczną prędkością koła zestawu.

Na rys.4 przykładowo zilustrowano dla formy drgań $n=3$ (trzy średnice węzłowe) bifurkację częstotliwości w kole. Obliczenia wykonano dla koła o średnicy nominalnej *0.95 m* oraz grubości wieńca *0.05 m* (wykres lewy) i *0.03 m* (wykres prawy).

Wyniki obliczeń wskazują, że utrata stateczności koła może wystąpić w zakresie bardzo dużych prędkości, których osiągnięcie w praktyce jest niemożliwe. Należy jednak zwrócić uwagę, że na wartości częstotliwości mają wpływ materiały konstrukcyjne i sama konstrukcja koła. Stąd też dla każdego koła a w szczególności dla kół,

Amplitudy drgań własnych koła

Tabela 2

Nr formy n	Prędkość koła V=200 km/h									
	Często-tliwość [Hz]	Amplituda drgań								Kąt fazowy Ψni
		x10^{-11} [m/N]						x10^{-10} [rad/N]		
		Q_{ni}	$HB_{ni}Q_{ni}$	$H1^1_{ni}Q_{ni}$	$H2^1_{ni}Q_{ni}$	$H1^2_{ni}Q_{ni}$	$H2^2_{ni}Q_{ni}$	$H1^3_{ni}Q_{ni}$	$H2^3_{ni}Q_{ni}$	
	90.06	0.000	-	0.000	-	0.408	-	-0.001	-	0
0	586.15	0.627	-	-0.002	-	0.000	-	-0.002	-	π
	1520.18	0.003	-	0.124	-	-0.068	-	1.409	-	0
	2748.94	0.132	-	8.986	-	0.155	-	-3.190	-	0
	94.54	0.420	-0.420	-0.417	-0.417	19.765	19.765	-4.150	-4.150	0
	95.03	0.412	0.412	0.409	-0.409	-19.464	19.464	4.077	-4.077	π
	1270.04	6.261	-6.261	-3.160	-3.160	-0.147	-0.147	-7.081	-7.081	0
1	1294.50	5.924	5.924	2.954	-2.954	0.115	-0.115	7.018	-7.018	π
	1678.38	0.984	-0.984	-0.046	-0.046	-0.045	-0.045	5.106	5.106	0
	1680.83	1.039	1.039	0.052	-0.052	0.052	-0.052	-5.065	5.065	π
	2947.52	1.483	1.483	-3.329	3.329	-0.035	0.035	0.907	-0.907	0
	2972.31	1.534	-1.534	3.240	3.240	0.032	0.032	-0.851	-0.851	π
	306.60	0.172	-0.172	-0.337	-0.337	5.655	5.655	-3.316	-3.316	π
	309.36	0.166	0.166	0.326	-0.326	-5.509	5.509	3.219	-3.219	0
	1701.07	2.184	-2.184	-3.250	-3.250	-0.981	-0.981	-8.837	-8.837	π
2	1717.54	1.935	1.935	2.928	-2.928	0.904	-0.904	8.599	-8.599	0
	2092.69	2.066	-2.066	-2.470	-2.470	0.465	0.465	8.119	8.119	π
	2112.82	2.219	2.219	2.703	-2.703	-0.420	0.420	-7.904	7.904	0
	3875.37	1.070	1.070	-0.856	0.856	-0.006	0.006	0.051	-0.051	π
	3909.58	1.068	-1.068	0.858	0.858	0.006	0.006	-0.048	-0.048	0
	890.60	0.052	-0.052	-0.149	-0.149	1.506	1.506	-1.372	-1.372	0
	896.80	0.049	0.049	0.142	-0.142	-1.452	1.452	1.313	-1.313	π
	1984.94	2.013	-2.013	-5.026	-5.026	-1.688	-1.688	-5.587	-5.587	0
3	2008.30	1.894	1.894	4.797	-4.797	1.654	-1.654	5.791	-5.791	π
	2418.64	0.469	-0.469	-1.050	-1.050	0.916	0.916	5.777	5.777	0
	2424.67	0.527	0.527	1.210	-1.210	-0.918	0.918	-5.967	5.967	π
	5323.83	0.409	0.409	-0.222	0.222	-0.003	0.003	-0.011	0.011	0
	5351.90	0.416	-0.416	0.229	0.229	0.003	0.003	0.011	0.011	π
	1717.33	0.091	-0.091	-0.340	-0.340	1.723	1.723	-2.211	-2.211	π
	1728.43	0.084	0.084	0.315	-0.315	-1.640	1.640	2.083	-2.083	0
	2177.86	1.482	-1.482	-5.201	-5.201	-2.328	-2.328	-0.227	-0.227	π
4	2205.15	1.445	1.445	5.135	-5.135	2.268	-2.268	0.424	-0.424	0
	2907.89	0.061	0.061	0.201	0.201	-0.736	0.736	-2.248	2.248	0
	2912.09	0.056	-0.056	-0.177	-0.177	0.716	0.716	2.162	2.162	π
	6910.39	0.188	0.188	-0.089	0.089	-0.002	0.002	-0.008	0.008	π
	6934.93	0.192	-0.192	0.093	0.093	0.002	0.002	0.009	0.009	0
	2341.79	1.017	-1.017	-4.595	-4.595	1.246	1.246	-3.592	-3.592	0
	2369.21	0.988	0.988	4.513	-4.513	-1.287	1.287	3.663	-3.663	π
	2698.64	0.037	-0.037	-0.151	-0.151	-1.748	-1.748	3.231	3.231	0
5	2715.61	0.042	0.042	0.175	-0.175	1.805	-1.805	-3.302	3.302	π
	3606.26	0.011	0.011	0.049	-0.049	-0.492	0.492	-0.532	0.532	π
	3616.18	0.010	-0.010	-0.045	-0.045	0.476	0.476	0.526	0.526	0
	8545.15	0.102	0.102	-0.047	0.047	-0.001	0.001	-0.005	0.005	0
	8568.10	0.105	-0.105	0.049	0.049	0.001	0.001	0.006	0.006	π

Prędkości fazowe i amplitudy fal sprężystych w wieńcu koła

Tabela 4

Dłu- gość fali [rad]	Prędkość koła V=0 km/h			Prędkość koła V=200 km/h			Prędkość koła V=400 km/h		
	Prędkość fazowa fali [1/s]	Amplituda fali [dB]	Faza fali [deg]	Prędkość fazowa fali [1/s]	Amplituda fali [dB]	Faza fali [deg]	Prędkość fazowa fali [1/s]	Amplituda fali [dB]	Faza fali [deg]
2π	+596	-7.69	180	+594	-7.61	0	+592	-7.52	0
	-596	-7.69	0	-597	-7.71	180	-599	-7.86	180
	+8057	9.71	180	+7980	9.99	0	+7903	10.27	0
	-8057	9.71	0	-8134	9.41	180	-8210	9.10	180
	+10553	-26.17	180	+10546	-26.70	0	+10538	-27.26	0
	-10553	-26.17	0	-10561	-25.66	180	-10569	-25.18	180
	-18597	10.33	0	-18520	10.44	0	-18445	10.56	0
	+18597	10.33	180	+18676	10.21	180	+18757	10.10	180
π	+968	-9.60	0	+963	-9.46	180	+959	-9.32	180
	-968	-9.60	180	-972	-9.74	0	-976	-9.88	0
	+5370	9.71	0	+5344	10.24	180	+5317	10.66	180
	-5370	9.71	180	-5396	9.33	0	-5420	8.85	0
	+6605	8.26	0	+6574	7.85	180	+6545	7.43	180
	-6605	8.26	180	-6638	8.64	0	-6672	8.99	0
	-12228	-1.34	180	-12175	-1.35	180	-12121	-1.37	180
	+12228	-1.34	0	+12282	-1.33	0	+12336	-1.32	0
2π/3	+1872	-16.73	180	+1865	-16.52	0	+1859	-16.31	0
	-1872	-16.73	0	-1878	-16.94	180	-1885	-17.15	180
	+4182	13.83	180	+4157	14.02	0	+4132	14.21	0
	-4182	13.83	0	-4206	13.62	180	-4230	13.39	180
	+5072	1.04	180	+5066	0.43	0	+5060	-0.19	0
	-5072	1.04	0	-5078	1.65	180	-5086	2.26	180
	-11179	-12.95	0	-11150	-13.09	0	-11121	-13.23	0
	+11179	-12.95	180	+11209	-12.81	180	+11239	-12.68	180
π/2	+2706	-9.70	0	+2698	-9.37	180	+2689	-9.04	180
	-2706	-9.70	180	-2715	-10.03	0	-2724	-10.35	0
	+3442	14.27	0	+3421	14.32	180	+3400	14.37	180
	-3442	14.27	180	-3464	14.21	0	-3485	14.15	0
	-4571	-14.49	0	-4568	-13.94	0	-4565	-13.40	0
	+4571	-14.49	180	+4574	-15.02	180	+4578	-15.55	180
	-10874	-20.81	180	-10855	-20.97	180	-10836	-21.14	180
	+10874	-20.81	0	+10893	-20.66	0	+10913	-20.50	0
2π/5	+2960	13.17	180	+2943	13.25	0	+2926	13.32	0
	-2960	13.17	0	-2977	13.09	180	-2995	13.01	180
	+3402	-15.78	180	+3391	-16.45	0	+3381	-17.14	0
	-3402	-15.78	0	-3413	-15.12	180	-3423	-14.47	180
	-4538	-26.55	180	-4532	-26.20	180	-4526	-25.83	180
	+4538	-26.55	0	+4544	-26.91	0	+4550	-27.26	0
	-10753	-26.38	0	-10738	-26.53	0	-10724	-26.69	0
	+10753	-26.38	180	+10767	-26.23	180	+10782	-26.08	180

Częstotliwości i amplitudy dudnienia

Tabela 5

Nr formy drgań n	Często-tliwość dudnienia [Hz]	Amplituda dudnienia							
		$AU^1_{ni}10^{-11}$[m/N]		$AU^2_{ni}10^{-11}$[m/N]		$AU^3_{ni}10^{-11}$[m/N]		$AU^4_{ni}10^{-10}$[rd/N]	
		max	min	max	min	max	min	max	min
Prędkość koła V=200 km/h									
1	0.50	0.832	0.009	0.825	0.008	39.228	0.301	8.227	0.072
	24.46	12.185	0.337	6.114	0.205	0.262	0.032	14.100	0.063
	2.45	2.023	0.055	0.098	0.006	0.096	0.007	10.171	0.042
	24.79	3.018	0.051	6.569	0.088	0.068	0.003	1.758	0.056
2	2.76	0.337	0.006	0.663	0.011	11.164	0.146	6.535	0.097
	16.47	4.119	0.249	6.178	0.322	1.886	0.077	17.436	0.237
	20.13	4.284	0.153	5.173	0.233	0.884	0.045	16.023	0.215
	34.22	2.138	0.002	1.714	0.003	0.012	0.000	0.099	0.003
3	6.20	0.101	0.003	0.292	0.007	2.959	0.054	2.685	0.059
	23.36	3.907	0.118	9.823	0.229	3.342	0.034	11.378	0.205
	6.02	0.996	0.059	2.260	0.159	1.833	0.002	11.743	0.190
	28.07	0.825	0.007	0.450	0.007	0.006	0.000	0.023	0.000
4	11.10	0.175	0.007	0.655	0.025	3.364	0.083	4.294	0.129
	27.29	2.927	0.037	10.336	0.066	4.596	0.060	0.651	0.197
	4.20	0.117	0.006	0.378	0.023	1.452	0.020	4.410	0.086
	24.54	0.379	0.004	0.182	0.003	0.003	0.000	0.017	0.000
5	27.42	2.004	0.029	9.108	0.082	2.533	0.042	7.255	0.071
	16.97	0.079	0.005	0.326	0.025	3.552	0.057	6.533	0.070
	9.92	0.021	0.001	0.094	0.004	0.968	0.016	1.058	0.007
	22.95	0.207	0.003	0.096	0.002	0.002	0.000	0.011	0.000
Prędkość koła V=400 km/h									
1	1.00	0.832	0.017	0.825	0.016	39.230	0.602	8.227	0.144
	48.90	12.176	0.674	6.112	0.411	0.264	0.064	14.091	0.127
	4.89	2.026	0.110	0.098	0.012	0.096	0.014	10.161	0.[illegible]84
	49.56	3.011	0.102	6.571	0.176	0.068	0.006	1.760	0.112
2	5.52	0.337	0.012	0.663	0.021	11.165	0.292	6.536	0.194
	32.94	4.126	0.496	6.183	0.642	1.885	0.154	17.380	0.473
	40.26	4.277	0.305	5.169	0.463	0.882	0.090	15.969	0.429
	68.43	2.137	0.005	1.713	0.005	0.012	0.001	0.099	0.005
3	12.40	0.101	0.006	0.292	0.014	2.960	0.109	2.686	0.117
	46.67	3.902	0.237	9.807	0.458	3.339	0.069	11.366	0.407
	12.08	1.001	0.117	2.276	0.318	1.829	0.003	11.733	0.378
	56.14	0.825	0.014	0.450	0.014	0.006	0.000	0.023	0.001
4	22.20	0.175	0.015	0.657	0.049	3.367	0.166	4.299	0.257
	54.57	2.926	0.073	10.332	0.132	4.600	0.120	0.651	0.394
	8.39	0.118	0.012	0.381	0.047	1.453	0.040	4.415	0.172
	49.09	0.379	0.009	0.182	0.007	0.003	0.000	0.017	0.001
5	54.83	2.004	0.058	9.106	0.164	2.535	0.083	7.257	0.141
	33.95	0.079	0.010	0.328	0.050	3.555	0.114	6.535	0.140
	19.84	0.021	0.001	0.094	0.008	0.969	0.031	1.058	0.013
	45.89	0.206	0.005	0.096	0.003	0.002	0.000	0.011	0.000

Częstotliwości drgań i dudnienia punktu styku koła z szyną

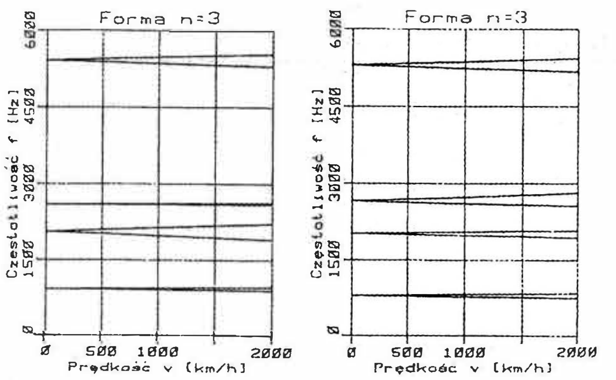
Tabela 6

Nr formy drgań n	Częstotliwość drgań [Hz]			Częstot. dudnienia [Hz]			Droga l_d [m]			$2\pi R_1/l_d$
	Prędkość koła [km/h]									
	100	200	400	100	200	400	100	200	400	
	Grubość wieńca koła 0.05 m									
1	94.78	94.78	94.79	18.36	36.73	73.46	1.513	1.513	1.513	1.97
	1282.28	1282.27	1282.22	6.38	12.77	25.56	4.352	4.351	4.347	0.69
	1679.59	1679.61	1679.67	17.39	34.78	69.56	1.597	1.597	1.597	1.87
	2959.78	2959.91	2960.43	31.01	62.02	124.02	0.896	0.896	0.896	3.33
2	307.98	307.98	307.99	35.85	71.70	143.40	0.775	0.775	0.775	3.85
	1709.44	1709.31	1708.78	28.99	57.98	115.98	0.958	0.958	0.958	3.12
	2102.55	2102.76	2103.57	27.17	54.33	108.65	1.023	1.023	1.023	2.92
	3892.44	3892.48	3892.61	54.34	108.68	217.35	0.511	0.511	0.511	5.84
3	893.70	893.70	893.71	52.74	105.49	210.97	0.527	0.527	0.527	5.67
	1996.69	1996.62	1996.32	44.16	88.33	176.70	0.629	0.629	0.629	4.75
	2421.54	2421.65	2422.12	52.84	105.67	211.29	0.526	0.526	0.526	5.68
	5337.82	5337.87	5338.05	69.88	139.76	279.52	0.398	0.398	0.398	7.51
4	1722.88	1722.88	1722.89	68.91	137.82	275.64	0.403	0.403	0.403	7.40
	2191.50	2191.51	2191.55	60.81	121.63	243.26	0.457	0.457	0.457	6.53
	2909.96	2909.99	2910.10	76.56	153.12	306.22	0.363	0.363	0.363	8.23
	6922.62	6922.66	6922.81	86.73	173.46	346.92	0.320	0.320	0.320	9.32
5	2355.49	2355.50	2355.55	79.36	158.73	317.46	0.350	0.350	0.350	8.53
	2707.10	2707.12	2707.23	84.59	169.17	338.34	0.328	0.328	0.328	9.09
	3611.22	3611.22	3611.21	98.03	196.07	392.14	0.283	0.283	0.283	10.53
	8556.59	8556.63	8556.75	104.55	209.09	418.18	0.266	0.266	0.266	11.23
	Grubość wieńca 0.03 m									
1	116.93	116.93	116.93	19.18	38.37	76.73	1.448	1.448	1.448	1.97
	1324.32	1324.30	1324.22	8.99	17.99	35.99	3.089	3.089	3.087	0.93
	1808.83	1808.82	1808.75	18.91	37.82	75.65	1.469	1.469	1.469	1.95
	3191.89	3192.05	3192.71	28.95	57.90	115.78	0.959	0.959	0.960	2.98
2	281.53	281.53	281.54	37.15	74.31	148.62	0.748	0.748	0.748	3.82
	1600.80	1600.75	1600.56	34.29	68.58	137.15	0.810	0.810	0.810	3.53
	2339.76	2339.88	2340.38	23.76	47.52	95.04	1.169	1.169	1.169	2.45
	3910.97	3811.00	3911.12	56.93	113.85	227.71	0.488	0.488	0.488	5.86
3	766.82	766.82	766.85	53.82	107.64	215.28	0.516	0.516	0.516	5.54
	1851.11	1851.06	1850.84	56.26	112.53	225.04	0.494	0.494	0.494	5.79
	2545.68	2545.79	2546.22	43.92	87.85	175.72	0.632	0.632	0.632	4.52
	5244.42	5244.46	5244.61	74.30	148.61	297.21	0.374	0.374	0.374	7.65
4	1422.80	1422.82	1422.89	70.11	140.22	280.44	0.396	0.396	0.396	7.22
	2267.85	2267.66	2266.88	72.91	145.82	291.64	0.381	0.381	0.381	7.50
	2691.01	2691.24	2692.17	69.47	138.94	277.88	0.400	0.400	0.400	7.15
	6769.88	6769.92	6770.05	92.14	184.27	368.55	0.301	0.301	0.301	9.48
5	1974.33	1974.33	1974.32	89.11	178.22	356.44	0.312	0.312	0.312	9.17
	2631.53	2631.58	2631.76	80.13	160.27	320.54	0.347	0.347	0.347	8.25
	3299.26	3299.27	3299.31	100.85	201.70	403.40	0.275	0.275	0.275	10.38
	8360.67	8360.69	8360.80	110.99	221.99	443.98	0.250	0.250	0.250	11.42

których konstrukcja odbiega od kół aktualnie stosowanych warunek stateczności powinien być sprawdzony.

Jak wynika z rys.4 bifurkacja drgań powoduje, że w układzie pojawiają się częstotliwości, których różnice wartości dla realnych prędkości jazdy są nieznaczne. Sumując parami fale monochromatyczne o częstościach różniących się nieznacznie między sobą uzyskano zależności opisujące efekt dudnienia w wirującym kole [5].

Grubość wieńca *0.05 m* Grubość wieńca *0.03 m*



Rys.4. Bifurkacja częstotliwości w wirującym kole

W tabeli 5 dla danej prędkości i formy drgań podano częstotliwości oraz minimalną i maksymalną amplitudę dudnienia. Suma wartości amplitud pary drgań harmonicznych powodujących dudnienie równa jest amplitudzie dudnienia, a ta z kolei równa jest co do wartości amplitudy stosownej postaci drgań koła dla, którego $\dot{\varphi}_o = 0$. W zakresie realnych prędkości jazdy częstotliwość dudnienia jest proporcjonalna do prędkości koła.

W ruchu tocznym koła po szynie istotnym zagadnieniem jest zbadanie zachowania się punktu geometrycznej osi wieńca, który leży nad punktem kontaktu koła z szyną. Poniżej przykładowo podano wzór na drgania (dudnienie) tego punktu w kierunku obwodowym [5]:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4} AU_{ni}\sin(\nu_{ni}t+\gamma_{ni})\cos\left\{\left[\frac{\Delta\omega_{ni}}{2} - \mathrm{sgn}(HB_{n,2i})n\dot{\varphi}_o\right]t+\alpha_{ni}+\mathrm{sgn}(HB_{n,2i})n\pi\right\} \quad (3)$$

gdzie:
AU_{ni} - amplituda dudnienia,
$\nu_{ni} = 0.5(\omega_{n,2i-1}+\omega_{n,2i})$, $\Delta\omega_{ni}=\omega_{n,2i}-\omega_{n,2i-1}$,
$\omega_{n,2i-1}$, $\omega_{n,2i}$ - częstości fal powodujących dudnienie,
α_{ni}, γ_{ni} - przesunięcia fazowe.

Z analizy wzoru (3) wynika, że częstotliwość drgań punktu leżącego na osi wieńca nad punktem kontaktu z szyną jest niezależna od prędkości kątowej koła. Natomiast wprost proporcjonalnie od prędkości zależna jest częstotliwość dudnienia drgań harmonicznych:

$$f_d = \frac{1}{2\pi}\left|\Delta\omega_{ni} - 2\,\mathrm{sgn}(HB_{n,2i})n\dot{\varphi}_o\right| \quad (4)$$

W tabeli 6 podano w zależności od prędkości koła częstotliwość drgań i dudnienia punktu leżącego na osi wieńca nad punktem styku z szyną, a także drogę l_d jaką koło przebywa w czasie jednego okresu dudnienia. W ostatniej kolumnie podano stosunek obwodu tocznego okręgu koła do drogi l_d.

Z tabeli 6 wynika, że dla danej formy drgań droga jaką przebywa koło w czasie jednego okresu dudnienia nie zależy od prędkości. Podczas eksploatacji pojazdów szynowych występują takie grubości wieńca, przy których droga przebyta przez koło w czasie jednego okresu dudnienia jest dokładnie wielokrotnością obwodu koła. Powoduje to, że w układzie dynamicznym koło-szyna powstają potencjalne warunki poligonizacji kół, a w tym również owalizacji. Postawiono zatem hipotezę [5]:

Jednym z czynników sprzyjających poligonizacji kół kolejowych jest efekt dudnienia w wirującym kole.

Hipotezę tą należy traktować jako hipotezę roboczą wymagającą dalszych szczegółowych badań teoretycznych ze szczególnym uwzględnieniem w tych badaniach modelowania procesów zużycia w kontakcie tocznym. Wynika to stąd, że drgania wirującego koła rozpatrywane były z pominięciem dynamicznych zjawisk kontaktowych występujących we współpracy z szyną. Ponadto w rzeczywistości koło porusza się ruchem złożonym z ruchu obrotowego i ruchu postępowego. Niemniej jednak zjawisko dudnienia, wywołane propagacją fal sprężystych, występuje również w kole poruszającym się ruchem tocznym po szynie.

8. Drgania wymuszone koła

Ścisłe rozwiązanie drgań wymuszonych wirującego koła uzyskano dla wymuszeń harmonicznych działających w punkcie kontaktu koła z szyną przy uwzględnieniu tłumienia drgań wywołanego tarciem wewnętrznym.

Lepkie właściwości koła zamodelowano pięcioma różnymi współczynnikami tłumienia wewnętrznego. Dwa z nich odnoszą się do materiału wieńca, a pozostałe do materiału tarczy. Lepko-sprężyste właściwości materiału koła zostały opisane modelem Kelvina-Voigta o następujących zależnościach:

$$\sigma = E\varepsilon + b_1\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}, \qquad \tau = G\gamma + b_2\frac{\partial\gamma}{\partial t},$$

$$q_u = -\left(k_u u_o + c_1\frac{\partial u_o}{\partial t}\right),$$

$$q_v = -\left(k_v v_o + c_2\frac{\partial v_o}{\partial t}\right), \quad (5)$$

$$q_w = -\left(k_w w_o + c_3\frac{\partial w_o}{\partial t}\right),$$

gdzie:

σ, τ - naprężenia normalne i styczne w wieńcu koła,

ε, γ - odkształcenia wieńca koła,

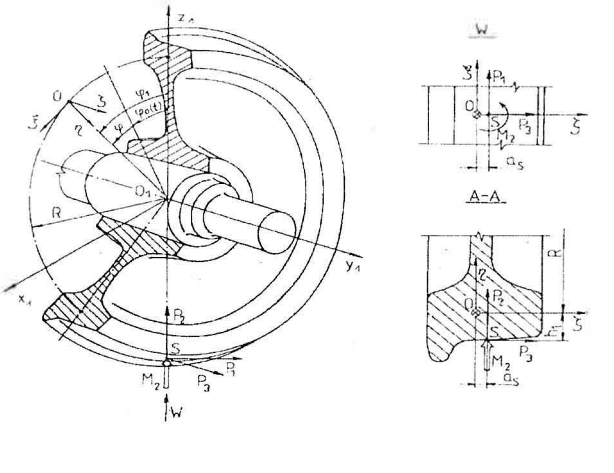
q_u, q_v, q_w - reakcja tarczy koła jako podłoża sprężystego odpowiednio w kierunku obwodowym, radialnym i binormalnym,

k_u, k_v, k_w - sztywność tarczy koła odpowiednio w kierunku obwodowym, radialnym i binormalnym,

u_o, v_o, w_o - przemieszczenie tarczy koła odpowiednio w kierunku obwodowym radialnym i binormalnym,

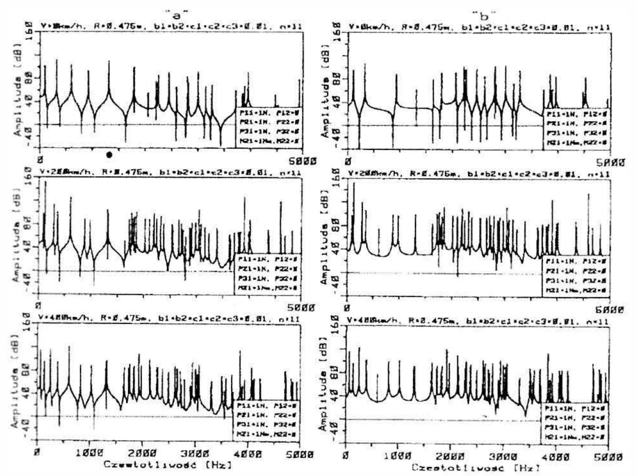
b_1, b_2 - współczynniki tłumienia materiału wieńca,

c_1, c_2, c_3 - współczynniki tłumienia materiału tarczy koła.

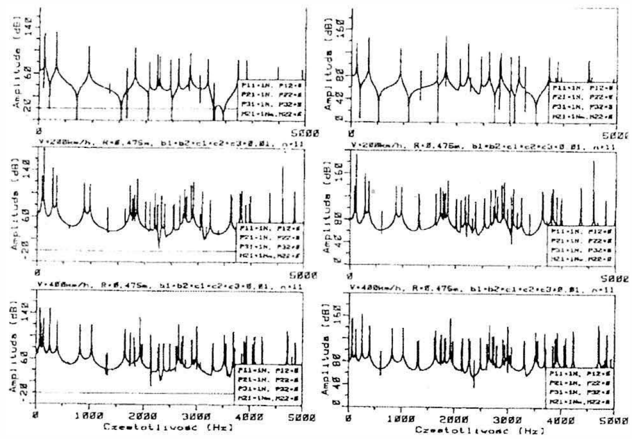


Rys.5. Drgania wymuszone wirującego koła kolejowego

Analiza numeryczna drgań wymuszonych prowadzona metodą MES jest wykonywana zwykle dla przypadku koła nieruchomego i wymuszenia pojedynczą siłą harmoniczną działającą w punkcie styku z szyną. Najczęściej jest to jednostkowa siła radialna lub poprzeczna. Występująca w ruchu tocznym po szynie zmienność oddziaływań w strefie kontaktu sprawia, że wymuszenie drgań kół



Rys.6. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe koła dla drgań obwodowych „a" i radialnych „b"



Rys. 7. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe koła dla drgań giętnych nie leżących w płaszczyźnie koła „c" i skrętnych „d"

ma bardziej złożoną postać. W rzeczywistym układzie drgania wymuszone są skutkiem równoczesnego działania siły obwodowej, radialnej, poprzecznej, a także momentu wynikającego z ruchu wiertnego koła (rys.5). Stąd też w rozważaniach przyjęto model koła, w którym wymuszenie drgań może być zadane jako równoczesne działanie siły obwodowej, radialnej, poprzecznej i momentu wiertnego, a ponadto siły wymuszające mogą występować z różną fazą, a mianowicie:

$$P_i = \mathrm{Re}\left[\left(P_{i1} + jP_{i2}\right)e^{-j\nu t}\right], \quad M_2 = \mathrm{Re}\left[\left(M_{21} + jM_{22}\right)e^{-j\nu t}\right] \qquad (6)$$

dla $i = 1,2,3$.

Dla wymuszeń harmonicznych (6) i dla $\dot{\varphi}_0$ = const uzyskano ścisłe rozwiązanie niejednorodnego układu równań (1) [6].

Na rys. 6 i 7 podano przykładowe wyniki obliczeń drgań wymuszonych w formie charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych: "a" - drgania obwodowe, "b" - drgania radialne, "c" - drgania giętne nie leżące w płaszczyźnie koła, "d" - drgania skrętne. Charakterystyki wykonano przy wymuszeniu w postaci równoczesnego działania momentu spinu i sił w trzech kierunkach dla punktu O o współrzędnej $\varphi = \pi$. Fazy początkowe sił wymuszających są takie same. Amplitudy drgań przedstawione na rys.6 są sumą jedenastu ($n=11$) pierwszych form drgań, a ich wartości podano w dB przy poziomie odniesienia 10^{-11} m.

Na powyższych wykresach widoczny jest wyraźny wpływ prędkości obrotowej koła wyrażający się dwukrotnym wzrostem liczby częstotliwości rezonansowych. Jest to efekt rozchodzenia się fal sprężystych z różnymi prędkościami fazowymi w lewo i prawo od miejsca działania sił wymuszających. Należy również zwrócić uwagę na fakt, że dla $\dot{\varphi}_0 \neq 0$ i wymuszeń o wysokiej częstotliwości ($4\ kHz \div 5\ kHz$) niektóre częstotliwości rezonansowe charakteryzują się dużymi amplitudami. Jest to skutek sprzężenia drgań siłami bezwładności, a w tym siłami związanymi z przyśpieszeniem Coriolisa. Drgania o tak wysokiej częstotliwości mogą być wzbudzane przez chropowatość szyny i koła.

Literatura

[1] *Dżuła S.: „Dynamika wirującego koła i zestawu kołowego modelowanych układami ciągłymi". Politechnika Krakowska, Monografia nr 186, seria Mechanika, Kraków, 1995, praca habilitacyjna*

[2] *Schneider E., Popp K., Irretier H.: „Noise generation in raiway wheels due to rail-wheel contact forces". Journal of Sound and Vibration, nr 120, 1988, s. 227-244*

[3] *Genasan N., Ramesh T.C.: „Free vibration analysis of composite railway wheels". Journal of Sound and Vibration, nr 153, 1992, s. 113-124*

[4] *Dżuła S.: „Propagacja sprężystych fal podłużnych, giętnych i skrętnych w wieńcu wirującego koła". X Konferencja „Pojazdy Szynowe", Wrocław, 1994, t. III, s. 97-110.*

[5] *Dżuła S.: „Wiggle effect in a raiway wheel". Czasopismo Techniczne PK, Mechanika, Z. 5-M, Kraków, 1995, s. 25-38.*

[6] *Dżuła S.: „Forced vibrations of the rotating railway wheel". Cracow University of Technology, „Selected Problems of Structural Mechanics, Machine Design, Production Engineering, Motor and Railway Vehicles, Organic Chemistry, 1995, Vol. 3, s. 307-323.*

[7] *Bogacz R., Dżuła S.: „Dynamics and stability of a wheelset in rolling contact motion on rails". International Symposium on Technological Innovation in Guided Transport, Lille – Francja, 1993, s. 871-883.*

[8] *Dżuła S.: „Contact vibrations of a wheelset in rolling motion". XVIth Symposium „Vibrations in Physical Systems", Poznań-Błażejewko, 1994, s. 105-106.*

[9] *Bogacz R., Dżuła S.: „Dynamics and stability of a wheelset/track interaction modelled as continuous system". International Symposium „Dynamics of Continua", Bad Honnef, 1996, s. 263-272.*

[10] *Dżuła S.: „Formy niestatecznego ruchu zestawu kołowego". XI Konferencja „Pojazdy Szynowe", Kraków, 1995, t. I, s. 191-202.*

[11] *Grassie S.L, Kalousek J.: „Rail corrugation: characteristics, causes and treatments". Journal of Rail and Rapid Transit, Part F, Vol 207, nr F1, pp. 57-68.*

[12] *Dżuła S.: „O niestatecznym ruchu zestawu kołowego po torze prostym". XII Konferencja „Pojazdy Szynowe", Poznań, 1996, t. I, s. 69-75.*

[13] *Bogacz R.: „Corrugations and residual stresses in dynamic contact problems of the wheel-rail system". IPPT PAN Dynamical Problems in Mechanical Systems, Warszawa, 1996, s. 19-21.*

[14] *Piec P.: „Simulation investigations of stick-slip friction contact phenomena". Czasopismo Techniczne PK, Mechanika, Z. 5-M, Kraków, 1995, s. 126-144.*

[15] *Dżuła S.: „Analityczny model zestawu kołowego z uwzględnieniem poślizgów w kontakcie koło-szyna". Politechnika Śląska, Międzynarodowa Konferencja i Specjalistyczna Wystawa TRANSPORT'97,Katowice, 1997, s. 127-134.*

Dr inż. Antoni JOHN,
Mgr inż. Bogna MRÓWCZYŃSKA,
Dr hab. inż., prof. Politechniki Śl. Marek SITARZ
Politechnika Śląska

Zastosowanie pakietu programów metody elementów skończonych KOŁO_PC do komputerowego wspomagania projektowania

W procesie projektowania kolejowych zestawów kołowych niezbędna jest znajomość rozkładu naprężeń i przemieszczeń w elementach układu. Wyznaczenie tych wielkości metodą analityczną jest niemożliwe, dlatego stosuje się metody komputerowe, w szczególności metodę elementów skończonych. Pakiet programów KOŁO_PC pozwala rozwiązywać zagadnienia osiowo-symetryczne metodą elementów skończonych z uwzględnieniem takich zagadnień, jak naprężenia pochodzące od wcisku, naprężenia eksploatacyjne oraz naprężenia cieplne wywołane hamowaniem. Dodatkowo pozwala przeprowadzić analizę zmęczeniową zestawu kołowego.

1. WPROWADZENIE

Jednym z ważniejszych elementów układu biegowego pojazdu szynowego jest zestaw kołowy. Jest to element konstrukcyjny mający bezpośredni wpływ na bezpieczeństwo ruchu kolejowego. Z tego powodu oś koła oraz zestaw kołowy jako całość muszą mieć zapewnioną dostateczną wytrzymałość w wymaganym okresie eksploatacyjnym.