

Elektroniczny model analogowy drgań układu napędowego lokomotywy spalinowej podczas pełnego poślizgu kół

Przedstawiona praca dotyczy próby zastosowania elektronicznej techniki analogowej do analizy drgań układu napędowego lokomotywy spalinowej przy poślizgu kół. We wstępie omówiono skrótowo podstawowe pojęcia dotyczące współpracy koła i szyny, a w szczególności przebiegu współczynnika τ przy poślizgu, przyczyny zerwania przyczepności, sformułowano cel pracy oraz określono warunki wystąpienia drgań układu. Następnie określono fizyczny model ciągły układu, jego model dyskretny oraz sposób dyskretyzacji. Model matematyczny (równania ruchu) wyprowadzono w kolejnym rozdziale. Dla opisu drgań skrętnych otrzymano układ 6 równań różniczkowych zwyczajnych, nieliniowych. Określono zasady wykorzystania EMA do analizy drgań i wartości współczynników równań oraz maksymalnych wartości współrzędnych, relację między czasem rzeczywistym i czasem maszynowym. Ustalono też schemat połączeń wzmacniaczy liniowych i wzmacniaczy funkcyjnych w postaci ogólnej i dla obliczonych współczynników.

WSTĘP

Moment obrotowy działający na zestaw kół powoduje powstanie dodatkowej siły stycznej na powierzchni styku koła i szyny.

Warunkiem koniecznym istnienia tej siły stycznej jest poślizg, który może występować na części lub na wszystkich elementarnych powierzchniach styku w obszarze styku. Im większa siła styczna, tym część obszaru styku objęta jest poślizgiem.

Jeżeli poślizg obejmuje część elementarnych powierzchni styku to można mówić o małym poślizgu, albo mikropoślizgu. Gdy zaś poślizg obejmuje wszystkie elementarne powierzchnie styku, to ma miejsce poślizg duży albo pełny, albo mikropoślizg.

Iloraz siły stycznej i normalnego nacisku na szynę toczącego się koła, czyli współczynnik τ przy poślizgu, dany jest zwykle w funkcji poślizgu względnego σ . Poślizg względny σ jest ilorazem różnicy drogi rzeczywistej przebytej przez punkty na obwodzie koła i drogi, którą koło przebyłoby przy czystym toczeniu się (bez poślizgów) — do drogi, którą koło przebyłoby przy czystym ruchu tocznym. Poślizg względny σ można też określić — co wynika z prostego przekształcenia — jako iloraz różnicy prędkości V_s punktów na obwodzie koła i prędkości V środka koła (prędkości jazdy), do prędkości jazdy V :

$$\sigma = \frac{V_s - V}{V} \quad (1)$$

Przebieg $\tau(\sigma)$ jest jakościowo różny dla mikropoślizgu i dla poślizgu pełnego. W zakresie poślizgów mikropoślizgu ten określają wyniki badań m. in. Labrijna i nowsze Charteta [14]: przebieg $\tau(\sigma)$ jest funkcją rosnącą, jednak

z ciągle malejącą pochodną $\frac{d\tau}{d\sigma}$ przy rosnącym σ . Gdy po-

ślizg względny σ osiągnie tak dużą wartość, że na wszystkich elementarnych powierzchniach styku wystąpi poślizg bezwzględny, to współczynnik $\tau(\sigma)$ zachowuje początkowo wartość prawie stałą, a następnie zaczyna maleć przy dalszym wzroście σ . Można określić graniczny przedział poślizgu względnego σ , przy którym zmienia się jakościowo przebieg $\tau(\sigma)$.

Zakres poślizgu względnego σ , w którym przebieg $\tau(\sigma)$ jest niemalejący przy wzroście σ , można traktować jako obszar mikropoślizgu, natomiast zakres opadającego przebiegu $\tau(\sigma)$ będzie obszarem poślizgu pełnego. Definicja ta nie jest ścisła w sensie fizycznym, jednak wygodna dla określenia stanu przyczepności koła i szyny.

Największa możliwa do uzyskania wartość siły stycznej na styku koła i szyny, wytworzona wskutek działania momentu napędowego lub hamującego, przy danym nacisku

statycznym koła na szynę, jest siłą przyczepną. Iloraz siły przyczepnej i nacisku statycznego jest współczynnikiem przyczepności. Jeżeli czynny moment obrotowy na zestawie kół ma wartość większą niż granica przyczepności, to wystąpi pełny poślizg i od pewnej chwili siła styczna zacznie spadać przy rosnącym jednocześnie poślizgu, a współczynnik $\tau(\sigma)$ będzie miał wartość odpowiadającą tarcia ślizgowemu.

Przekroczenie granicy przyczepności może nastąpić wskutek przyłożenia zbyt dużego momentu napędowego do zestawu kół, bądź też przy stałym momencie wskutek chwilowego obniżenia się granicy przyczepności (np. przy dynamicznym ociążeniu zestawu kół, wjechaniu koła na zaoliwione lub zawiłgocone miejsca na szynie).

Opadający przebieg $\tau(\sigma)$ dla pełnego poślizgu stwarza warunki do wystąpienia w układzie napędowym drgań samowzbudnych. Podczas pełnego poślizgu powstanie nadwyżka energii doprowadzanej do układu napędowego, nad oporami. Nadmiar energii nie zostanie zużyty na wzrost prędkości jazdy, bo wskutek rosnącego poślizgu spada siła styczna (siła pociągowa), natomiast wystąpi przyrost energii ruchu obrotowego zestawu kół w poślizgu, co z kolei może doprowadzić do powstania samowzbudnych drgań skrętnych kół, przenoszonych następnie na cały układ napędowy. Drgania tego typu zaobserwowano podczas badań granicy przyczepności w doświadczalnej lokomotywie z napędem indywidualnym, przeprowadzonych przez ORE [3]. Teoretyczną analizę tych drgań przeprowadził J. Osiecki w załączniku [11] do sprawozdania ORE [3]. W oparciu m. in. o prace [3], [11] opracowano analizę teoretyczną drgań podczas pełnego poślizgu pojedynczego zestawu kół [8] oraz w wózku dwuosiowym [9] dla lokomotywy spalinowej z napędem za pomocą wałów przegubowych i stożkowych przekładni przyosiowych.

Niniejsza praca ma na celu przygotowanie danych do analizy przebiegu drgań zestawów kół wózka dwuosiowego podczas pełnego poślizgu na elektronicznej maszynie analogowej.

W układach samowzbudnych wyróżnia się następujące podstawowe elementy [1]: — źródło energii o stałym lub zmiennym nieokresowym oddziaływaniu, — układ drgający, — sprzężenie zwrotne, regulujące dopływ energii zużywanej na drgania. W analizowanym układzie źródłem energii jest moment obrotowy od turbiny przekładni hydrokinetycznej, układem drgającym są zestawy kół i układ napędowy, rolę sprzężenia zwrotnego spełnia opadający przebieg $\tau(\sigma)$. Warunki umożliwiające powstanie drgań samowzbudnych można tu sformułować następująco. Warunkiem koniecznym jest nadmiar momentu napędowego M_n nad sumą momentów oporów tarcia M_s podczas poślizgu kół:

$$M_n(t) > M_s^*(t).$$

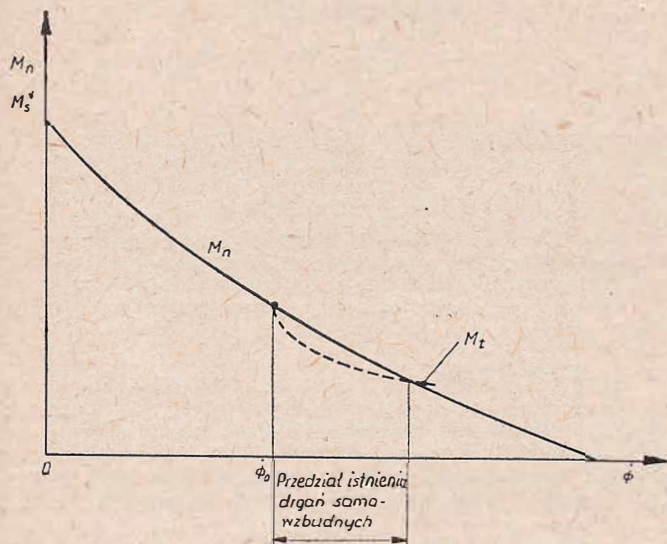
Drgania powstaną i będą narastać, gdy będzie jednocześnie

$$M_n(t) > M_s^*(t) \quad \text{i} \quad \frac{dM_n(t)}{d\dot{\phi}_0(t)} > \frac{dM_s^*(t)}{d\dot{\phi}_0(t)}, \quad (2)$$

natomiast będą wygasać w otoczeniu punktu, w którym jednocześnie będą spełnione warunki

$$M_n(t) = M_s^*(t) \quad \text{i} \quad \frac{dM_n(t)}{d\dot{\phi}_0(t)} < \frac{dM_s^*(t)}{d\dot{\phi}_0(t)}, \quad (3)$$

gdzie $\dot{\phi}_0(t)$ jest prędkością obrotową zestawów kół tuż przed wystąpieniem pełnego poślizgu, odpowiadającą stałej prędkości jazdy. Omawiany przedział, w którym mogą istnieć drgania samowzbudne, przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Przebieg momentu oporu tarcia MMT i momentu napędowego M_s^* podczas pełnego poślizgu kół.

MODEL FIZYCZNY UKŁADU

Układ ciągły

Rozważany układ obejmuje (rys. 2) dwa zestawy kół, dwie przekładnie osiowe oraz wał przegubowy łączący zestawy. Moment napędowy $M_n(t)$ przekazywany jest od przekładni hydrokinetycznej na przekładnię osiową pierwszego zestawu kół, a stąd również na przekładnię osiową drugiego zestawu kół poprzez wał przegubowy. Układ przedstawiony na rys. 2 jest układem o rozłożonych masach (układem ciągłym). Jego ruch można opisać za pomocą równań różniczkowych cząstkowych. W przypadku skoncentrowania dużych mas lub masowych momentów bezwładności w otoczeniu określonych punktów lub płaszczyzn układu przeprowadza się zwykle dyskretyzację mas. Pozwala to, przy zachowaniu właściwości układu, na prostszy opis jego ruchu za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych.

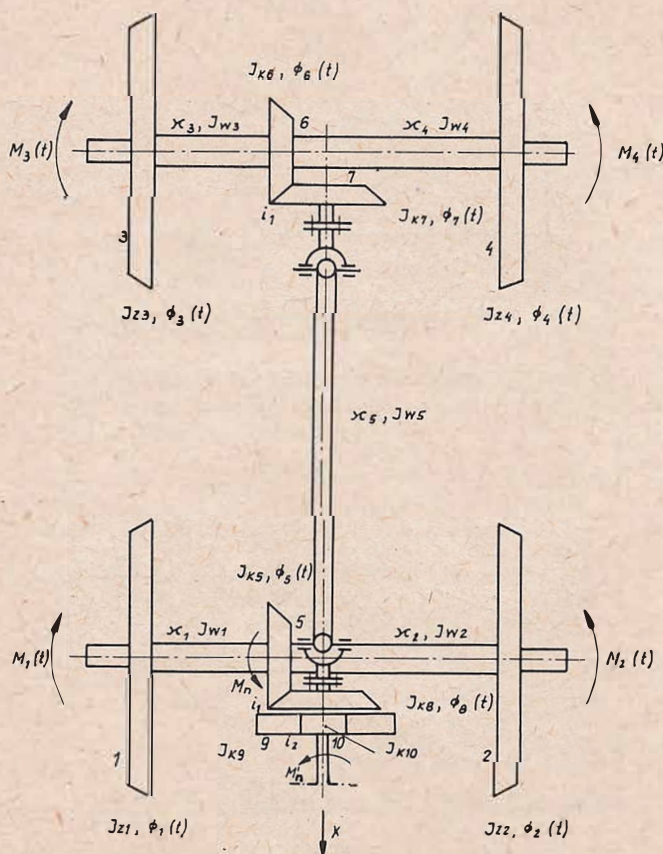
Układ dyskretny

Układ dyskretny, który stanowi pewne przybliżenie układu ciągłego, składa się zazwyczaj z brył sztywnych połączonych bezmasowymi członami o kształtach lub nieodkształcalnymi. Zakres uproszczenia układu ciągłego zależy głównie od wymaganej dokładności analizy.

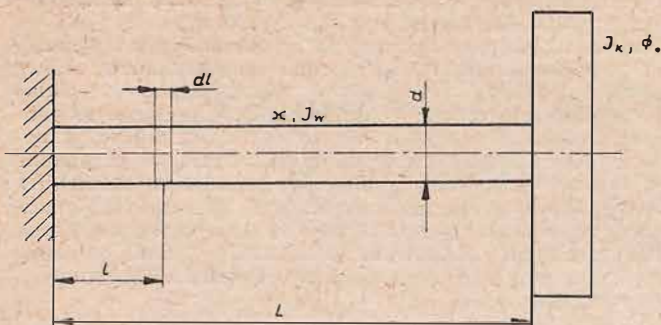
Jedną z metod wyznaczenia układu dyskretnego jest energetyczna metoda Rayleigha, która opiera się na założeniu równości energii kinetycznej i potencjalnej obu układów. Wg Ziembę [19] metoda ta daje wyniki bardzo zbliżone do rozwiązania ścisłego.

Stosując metodę Rayleigha zastąpiono układ ciągły (rys. 2) sześciomasywnym układem dyskretnym o liniowych charakterystykach sprężystych (rys. 3). Otrzymało go redukując odpowiednio do płaszczyzn kół napędowych, płaszczyzn średnic średnic stożkowych kół zębatach osadzonych na wałach osiowych oraz do osi wałów masowe momenty bezwładności poszczególnych kół, współpracujących elementów napędu oraz odpowiednich odcinków wałów osiowych. Sposób redukcji przedstawiono poniżej.

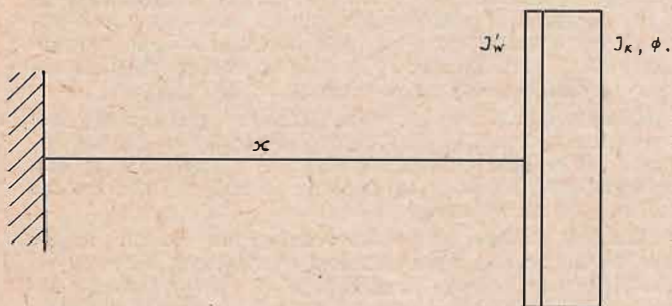
Rozpatrzono przykładowo, wychylone o kąt ϕ koło jezdne wraz z odcinkiem wału osiowego do węzła drgań. Ponieważ w węźle tym wychylenie wału jest równe zeru można przyjąć, że wał w tym miejscu jest zamocowany (rys. 4).



W układzie dyskretnym przyjęto zerowy masowy moment bezwładności wału osiowego, natomiast masowy moment bezwładności koła zestawu powiększono o Iw' (rys. 5).



Rys. 4. Odcinek wału osiowego wraz z kołem zestawu kołowego.



Rys. 5. Odcinek wału osiowego wraz z kołem zestawu kołowego po dyskretyzacji.

Zakładając liniowy przebieg kąta skręcania wału otrzymamy następujące wyrażenie na energię kinetyczną układu ciągłego:

$$T = \frac{1}{2} I_k \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\pi d^4 \delta}{32} \dot{\phi} \frac{l^2}{L^2} dl \quad (4)$$

Po wykonaniu całkowania otrzymamy:

$$T = \frac{1}{2} \left(I_k + \frac{1}{3} I_w \right) \dot{\phi}^2 \quad (5)$$

Energia kinetyczna układu dyskretnego (rys. 5) wynosi

$$T_1 = \frac{1}{2} (I_k + I_w') \dot{\phi}^2 \quad (6)$$

Z porównania wyrażeń (5) i (6) wynika, że aby układ dyskretny był równoważny układowi ciągłemu, należy w nim masowe momenty bezwładności kół napędnych (jak również stożkowych kół zębatach) zwiększyć o $\frac{1}{3}$ masowego

momentu bezwładności odpowiednich odcinków wałów osiowych. Ostateczne wyrażenia na zredukowane masowe momenty bezwładności kół napędnych mają postać:

$$I_1 = I_{z1} + \frac{1}{3} I_{w11},$$

$$I_2 = I_{z2} + \frac{1}{3} I_{w22},$$

$$I_3 = I_{z3} + \frac{1}{3} I_{w33},$$

$$I_4 = I_{z4} + \frac{1}{3} I_{w44},$$

gdzie:

$I_{z1}, I_{z2}, I_{z3}, I_{z4}$ — masowe momenty bezwładności kół napędnych w układzie ciągłym

$I_{w11} (I_{w22}, I_{w33}, I_{w44})$ — masowy moment bezwładności odpowiedniego odcinka 1 (2, 3, 4) wału osiowego zredukowanego do koła napędowego 1 (2, 3, 4).

W podobny sposób określono zredukowane masowe momenty bezwładności stożkowych kół zębatach w układzie dyskretnym:

$$I_5 = I_{k5} + \frac{1}{3} I_{w15} + \frac{1}{3} I_{w25} + i_1^2 \left[I_{k8} + \frac{1}{3} I_{w58} + i_2^2 (I_{k9} + I_{k10}) \right] \quad (8)$$

$$I_6 = I_{k6} + \frac{1}{3} I_{w36} + \frac{1}{3} I_{w46} + i_1^2 \left(I_{k7} + \frac{1}{3} I_{w57} \right) \quad (9)$$

gdzie:

$I_{k5}, I_{k6}, I_{k7}, I_{k8}, I_{k9}$ — masowe momenty bezwładności odpowiednich kół zębatach,

I_{wrs} — masowy moment bezwładności odpowiedniego odcinka wału r zredukowanego do koła zębatego s , $r = 1, \dots, 5$, $s = 5, 6$,

i_1 — przełożenie zębatej przekładni stożkowej,

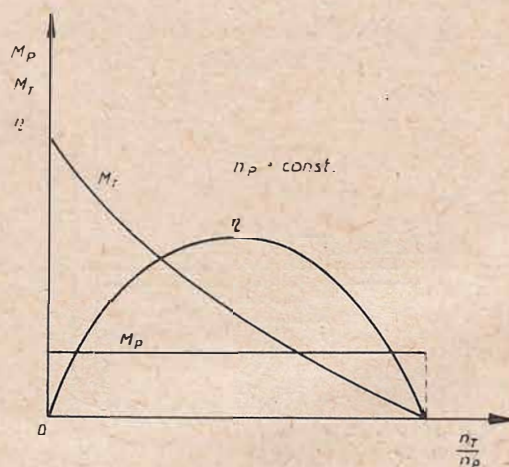
i_2 — przełożenie zębatej przekładni walcowej.

Aby określić występujące w powyższych wyrażeniach odpowiednie odcinki wałów osiowych niezbędna jest znajomość położenia węzłów drgań, a więc i postaci drgań układu. Dla układów wielomasowych nie można z góry przewidzieć, która postać drgań wystąpi.

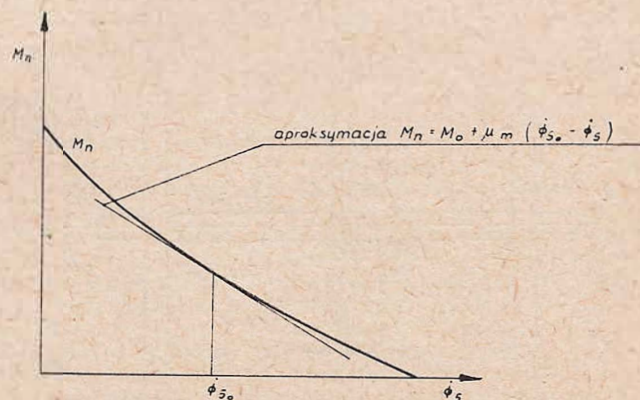
Ponieważ z analizy wartości liczbowych wynika, że masowe momenty bezwładności wałów są dużo mniejsze od masowych momentów bezwładności kół napędnych i zębatach kół stożkowych, dlatego przy redukcji układu można je pominąć.

Obciążenia zewnętrzne

Przebieg momentu napędowego $M_n(t)$ zależy od charakterystyki obciążeniowej przekładni hydrokinetycznej. Przyjeto, że moment napędowy zmienia się w funkcji prędkości kątowej napędzanego zestawu kół tak, jak przy dowolnej zmianie prędkości kątowej wału turbiny przekład-



Rys. 6. Charakterystyka przekładni hydrokinetycznej



Rys. 7. Przebieg momentu napędowego przyłożonego do stożkowej przekładni zębatej.

ni. Jest to uproszczenie konieczne ze względu na brak badań przy szybkich zmianach obrotów. Charakterystyka przekładnika na rys. 6 przedstawia taki przebieg. Oznaczono przez M_p moment na wale pompy, M_T — moment na wale turbiny, η — sprawność, $\frac{n_T}{n_p}$ — przełożenie

kinematyczne przekładnika, proporcjonalne (przy $n_p = \text{const}$) do prędkości obrotowej turbiny. Przebieg $M_T(n_T)$ można przetransponować na przebieg $M_n(\dot{\Phi}_5)$, otrzymując wykres pokazany na rys. 7. Przebieg $M_n(\dot{\Phi}_5)$ można w otoczeniu punktu $\dot{\Phi}_5(t) = \dot{\Phi}_{50}$ zlinearyzować w sposób prosty otrzymując zamiast przebiegu nieliniowego — aproksymację w postaci [18]:

$$M_n(\dot{\Phi}_5) = M_0(\dot{\Phi}_{50}) + \mu m (\dot{\Phi}_{50} - \dot{\Phi}_5), \quad (10)$$

gdzie:

$M_0(\dot{\Phi}_{50}) = \text{const}$ — moment obrotowy tuż przed rozpoczęciem pełnego poślizgu,

$$\mu m = \left. \frac{dM_n}{d\dot{\Phi}_5} \right|_{\dot{\Phi}_5 = \dot{\Phi}_{50}}$$

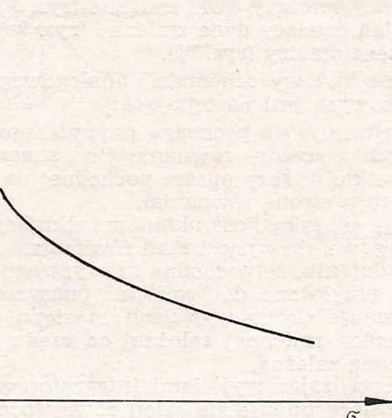
Przebiegi momentów oporów tarcia $M_l(t)$, ($l = 1, \dots, 4$), podczas poślizgu są wprost proporcjonalne do nacisków kół na szyny N_l i współczynnika tarcia τ_l . Eksperymentalnie [3] określone wartości $\tau(\sigma)$ gdzie σ jest poślizgiem względnym określonym zależnością (1), zostały dla pewnych przypadków aproksymowane funkcją analityczną o postaci [11]:

$$\tau = \frac{a_1}{\sigma} + a_2 \quad (11)$$

gdzie:

a_1 i a_2 — stałe.

Aproksymacja jest określona dla tego zakresu poślizgu względnego σ , w którym możliwe jest wystąpienie drgań samowzbudnych, tzn. dla przebiegu opadającego $\tau(\sigma)$. Przebieg określony wzorem (11) przedstawia rysunek 8. Przyjmując jednakowe, niezmiennie w czasie naciski kół na szyny N i promienie kręgów toczenia R , momenty tarcia można przedstawić w postaci



Rys. 8. Przebieg współczynnika tarcia w zależności od poślizgu względnego.

$M_l(t) = NR\tau_l(t)$, $l = 1, \dots, 4$, (12)

a uwzględniając zależności (11), (1) oraz związek

$$V_{sl} = \dot{\Phi}_l R,$$

otrzymano ostatecznie

$$M_l = \frac{C}{\dot{\Phi}_l - \frac{V}{R}} + D, \quad (13)$$

gdzie:

$$C = a_1 NV, \quad D = a_2 NR \quad (14)$$

MODEL MATEMATYCZNY DRGAŃ UKŁADU

Model matematyczny otrzymano w postaci równań Lagrange'a drugiego rodzaju, wyprowadzonych dla układu dyskretnego przedstawionego na rys. 3.

Jako współrzędne uogólnione przyjęto:

$$q_1(t) = \Phi_1(t), \quad q_2(t) = \Phi_2(t), \quad q_3(t) = \Phi_3(t), \quad q_4(t) = \Phi_4(t), \\ q_5(t) = \Phi_5(t), \quad q_6(t) = \Phi_6(t), \quad q_7(t) = x(t). \quad (15)$$

Energję kinetyczną T i energję potencjalną U badanego układu można zapisać następująco we współrzędnych (15):

$$T = \frac{1}{2} [I_1 \dot{\Phi}_1^2(t) + I_2 \dot{\Phi}_2^2(t) + I_3 \dot{\Phi}_3^2(t) + I_4 \dot{\Phi}_4^2(t) + I_5 \dot{\Phi}_5^2(t) + \\ + I_6 \dot{\Phi}_6^2(t) + m \dot{x}^2] \quad (16)$$

gdzie:

m — całkowita masa rozważanego układu

$$U = \frac{1}{2} \kappa_1 [\Phi_1(t) - \Phi_5(t)]^2 + \frac{1}{2} \kappa_2 [\Phi_2(t) - \Phi_5(t)]^2 + \\ + \frac{1}{2} \kappa_3 [\Phi_3(t) - \Phi_6(t)]^2 + \frac{1}{2} \kappa_4 [\Phi_4(t) - \Phi_6(t)]^2 + \\ + \frac{1}{2} i_1^2 \kappa_5 [\Phi_5(t) - \Phi_6(t)]^2 \quad (17)$$

Praca sił uogólnionych $Q_i(t)$ odpowiadających współrzędnym uogólnionym $q_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, 7$, na przemieszczeniach przygotowanych zgodnych z więzami wynosi

$$\delta W = Q_1(t) \delta q_1(t) + Q_2(t) \delta q_2(t) + Q_3(t) \delta q_3(t) + Q_4(t) \delta q_4(t) + \\ + Q_5(t) \delta q_5(t) + Q_6(t) \delta q_6(t) + Q_7(t) \delta q_7(t),$$

a jednocześnie

$$\delta W = -M_1(t) \delta \Phi_1(t) - M_2(t) \delta \Phi_2(t) - M_3(t) \delta \Phi_3(t) - M_4(t) \delta \Phi_4(t) + \\ + M_n(t) \delta \Phi_5(t).$$

Siły uogólnione są więc następujące:

$$Q_1(t) = -M_1(t), \quad Q_2(t) = -M_2(t), \quad Q_3(t) = -M_3(t), \quad Q_4(t) = \\ = -M_4(t), \quad Q_5(t) = M_n(t), \quad Q_6(t) = Q_7(t) = 0. \quad (18)$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

dla układu analizowanego mają postać następującą:

$$\ddot{\Phi}_1 + \frac{\kappa_1}{I_1} (\Phi_1 - \Phi_5) = -\frac{M_1}{I_1}, \\ \ddot{\Phi}_2 + \frac{\kappa_2}{I_2} (\Phi_2 - \Phi_5) = -\frac{M_2}{I_2}, \\ \ddot{\Phi}_3 + \frac{\kappa_3}{I_3} (\Phi_3 - \Phi_6) = -\frac{M_3}{I_3}, \\ \ddot{\Phi}_4 + \frac{\kappa_4}{I_4} (\Phi_4 - \Phi_6) = -\frac{M_4}{I_4}, \quad (19)$$

$$\ddot{\Phi}_5 - \frac{\kappa_1}{I_5} (\Phi_1 - \Phi_5) + \frac{\kappa_2}{I_5} (\Phi_2 - \Phi_5) + \frac{i_1^2 \kappa_5}{I_5} (\Phi_5 - \Phi_6) = \frac{M_n}{I_5},$$

$$\ddot{\Phi}_6 - \frac{\kappa_3}{I_6} (\Phi_3 - \Phi_6) - \frac{\kappa_4}{I_6} (\Phi_4 - \Phi_6) - \frac{i_1^2 \kappa_5}{I_5} (\Phi_5 - \Phi_6) = 0,$$

$$m \ddot{x} = 0.$$

Ostatnie równanie układu, niezależnie od pozostałych, opisuje ustalony ruch translacyjny układu.

Ruch obrotowy opisywany sześcioma pierwszymi równaniami układu (19) można rozpatrywać w tym przypadku (przy $\dot{x} = V = \text{const.}$) niezależnie od translacji. Dokonując prostych przekształceń w celu wyodrębnienia drgań sprężystych [5] układu, oraz podstawiając zależności (10) i (13) na moment obrotowy i momenty oporów tarcia otrzymano ostatecznie układ równań różniczkowych ruchu układu w postaci:

$$\ddot{\Phi}_1 + \kappa_1 \frac{I_1 + I_5}{I_1 I_5} \varphi_1 + \frac{\kappa_2}{I_5} \varphi_2 - \frac{i_1^2 \kappa_5}{I_5} \varphi_5 + \frac{1}{I_1} \left(\frac{C}{\dot{\Phi}_5 + \dot{\Phi}_1 - \frac{V}{R}} + D \right) + \\ + \frac{1}{I_5} [M_0 + \mu m (\dot{\Phi}_{50} - \dot{\Phi}_5)] = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\varphi}_2 + \frac{\kappa_1}{I_5} \varphi_1 + \frac{\kappa_2}{I_5} \varphi_2 - \frac{i_1^2 \kappa_3}{I_5} \varphi_5 + \frac{1}{I_2} \left(\frac{C}{\dot{\varphi}_5 + \dot{\varphi}_2 - \frac{V}{R}} + D \right) + \\
& + \frac{1}{I_5} [M_0 + \mu_m (\dot{\varphi}_{50} - \dot{\varphi}_5)] = 0, \\
& \ddot{\varphi}_3 + \frac{\kappa_3}{I_3} \varphi_3 + \frac{\kappa_4}{I_6} \varphi_4 + \frac{i_1^2 \kappa_5}{I_6} \varphi_5 + \\
& + \frac{1}{I_3} \left(\frac{C}{\dot{\varphi}_5 - \dot{\varphi}_5 + \dot{\varphi}_3 - \frac{V}{R}} + D \right) = 0, \\
& \ddot{\varphi}_4 + \frac{\kappa_3}{I_6} \varphi_3 + \frac{\kappa_4}{I_4} \varphi_4 + \frac{i_1^2 \kappa_5}{I_6} \varphi_5 + \\
& + \frac{1}{I_4} \left(\frac{C}{\dot{\varphi}_5 - \dot{\varphi}_5 + \dot{\varphi}_4 - \frac{V}{R}} + D \right) = 0, \\
& \ddot{\varphi}_5 - \frac{\kappa_1}{I_5} \varphi_1 - \frac{\kappa_2}{I_5} \varphi_2 + \frac{\kappa_3}{I_6} \varphi_3 + \frac{\kappa_4}{I_6} \varphi_4 + \frac{i_1^2 \kappa_5}{I_5 I_6} \varphi_5 - \\
& - \frac{1}{I_5} [M_0 + \mu_m (\dot{\varphi}_{50} - \dot{\varphi}_5)] = 0, \\
& \ddot{\varphi}_5 - \frac{\kappa_1}{I_5} \varphi_1 - \frac{\kappa_2}{I_5} \varphi_2 + \frac{i_1^2 \kappa_5}{I_5} \varphi_5 - \frac{1}{I_5} [M_0 + \mu_m (\dot{\varphi}_{50} - \dot{\varphi}_5)] = 0,
\end{aligned} \tag{20}$$

gdzie:

$$\varphi_1 = \varphi_1 - \varphi_5, \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_5, \varphi_3 = \varphi_3 - \varphi_6, \varphi_4 = \varphi_4 - \varphi_6, \varphi_5 = \varphi_5 - \varphi_6.$$

Pierwszych pięć równań z układu równań (20) opisuje drgania sprzężone układu wokół ruchu $\varphi_5(t)$ całego układu jako bryły sztywnej.

Układu (20) równań różniczkowych zwyczajnych nieliniowych sprzężonych nie da się rozwiązać w postaci zamkniętej.

Można znaleźć jedynie rozwiązania przybliżone, przy czym nie zawsze nawet rozwiązania przybliżone dane są w postaci jawnej. Na przykład przy wykorzystaniu metody Galerkin'a otrzymano równania w postaci wielomianów, w tym wielomianów 8-go stopnia zupełnych, nierozwiązalnych analitycznie [9]. Przy wykorzystaniu techniki analogowej nieliniowości występujące w układzie (20) nie stanowią problemu, a przybliżenie rozwiązań jest rzędu błędu odczytu; błąd ten przy stosowaniu czytników cyfrowych jest pomijalnie mały.

MODEL ANALOGOWY

Zasada badań na EMA

W celu zbadania zachowania się dowolnego układu fizycznego konieczna jest znajomość praw fizycznych, na podstawie których układ ten działa. Dzięki temu można ułożyć równania stanowiące opis matematyczny tego układu. Rozwiązanie równań pozwala uzyskać poszukiwane informacje o układzie i jego zachowaniu się w określonych warunkach.

Jeśli równania opisujące różne układy mają identyczną lub podobną postać, a różnią się tylko wymiarami poszczególnych wielkości fizycznych, to układy te są analogiczne przez opis matematyczny.

Przykładem analogii matematycznej jest podobieństwo zachowania się pewnych układów mechanicznych i elektrycznych, które nie wykazują żadnych cech podobieństwa fizycznego. Układy te wykazują identyczne zachowanie się, jeśli pewne wielkości działające na wejściu tych układów (np. siła, napięcie) mają taki sam przebieg.

Analogia matematyczna znalazła zastosowanie w maszynach analogowych. Są one pewnym modelem matematycznym, w którym zmiany wielkości fizycznych są odwzorowywane jako zmiany napięć. Współczesna uniwersalna maszyna analogowa zawiera zbiór członów operacyjnych, które odpowiednio połączone mogą wykonywać nakazane działania matematyczne wykorzystując napięcia prądu sta-

łego. Napięcia te odwzorowują zmienne zależne. Zmienna niezależną jest zawsze czas. Chwilowe wartości napięć na wyjściach członów operacyjnych są wprost proporcjonalne do poszukiwanych wielkości w rozpatrywanym zagadnieniu.

Maszyna analogowa może wykonać następujące podstawowe operacje matematyczne:

- mnożenie wielkości zmiennej przez liczbę stałą dodatnią lub ujemną,
- sumowanie algebraiczne pewnej liczby zmiennych,
- całkowanie wielkości zmiennych względem czasu,
- mnożenie lub dzielenie jednej wielkości zmiennej przez drugą,
- wytwarzanie dowolnej funkcji zmiennej,
- realizowanie nieciągłości.

Dla wykorzystania tych działań maszyna analogowa posiada następujące człony operacyjne:

- całkujące,
- sumujące,
- mnożące przez stały współczynnik,
- mnożące dwie zmienne,
- wzmacniacze funkcyjne.

Maszyny analogowe najczęściej wykorzystuje się do rozwiązywania zagadnień, które mogą być opisane za pomocą równań różniczkowych. Używając członów całkujących, sumujących lub ewentualnie jeszcze innych, można zamodelować równanie matematyczne w maszynie. Wyniki otrzymuje się w postaci wykresów lub odczytów liczbowych. Można przy tym otrzymać ostateczne rozwiązanie jak również wszystkie kolejne pochodne funkcji do rzędu najwyższej pochodnej równania włącznie.

W celu zrealizowania na maszynie analogowej układu równań (20) należy zastosować następujące człony operacyjne.

- a) układ całkujący (rys. 9a)
- b) układ sumujący (rys. 9b)
- c) układ mnożący przez stałą (rys. 9c)
- d) układ mnożący dwie zmienne (rys. 9d)
- e) układ dzielący dwie zmienne (rys. 9e)
- f) potencjometri (rys. 9f).

Metoda budowy schematu analogowego do rozwiązań różniczkowych jest następująca:

- przyrównuje się pochodną najwyższego rzędu do pozostałych wyrazów równania (to znaczy przenosi się wszystkie wyrazy oprócz pochodnej najwyższego rzędu na drugą stronę równania),
- rysuje się taką ilość układów całkujących połączonych szeregowo, ile wynosi rząd równania,
- po założeniu, że pochodna najwyższego rzędu jest znana i przyłożona do wejścia pierwszego integratora otrzymuje się na wyjściach następnych integratorów pochodne zmiennej zależnej od rzędu $n-1$ oraz samą zmienną zależną,
- rozporządzając wyjściami integratorów i funkcją wymuszającą buduje się człon równy pochodnej najwyższego rzędu,
- zamyka się obwód przez sprzężenie wszystkich układów całkujących,
- ustala się warunki początkowe.

Stosując się do powyższych zasad otrzymano wstępny schemat analogowy (rys. 9), który pozwoli otrzymać rozwiązanie układu równań (20). Nie jest to schemat ostateczny, bowiem po podstawieniu danych liczbowych pewne jego szczegóły mogą ulec zmianie.

Określenie współczynników

W celu określenia wartości stałych współczynników występujących w układzie równań (20) wykorzystano dane lokomotywy radzieckiej TGP-50;

moc	2 · 2000 KM
ciężar	$G_l = 126 \text{ T}$
prędkość maksymalna	$V_{max} = 140 \text{ km/h}$
średnica kół napędnych	$D_n = 1050 \text{ mm}$
przekładnia	hydrauliczna,

W wyniku obliczeń otrzymano następujące wyrażenia na współczynniki układu równań (20):

a) moment napędowy

$$M_n = 31\,800 + 676 (40,7 - \dot{\varphi}_5) \text{ Nm}, (1 \text{ Nm} = 0,102 \text{ kGm}) \tag{21}$$

b) momenty sił tarcia

$$M_1 = \frac{528}{\dot{\phi}_5 + \dot{\varphi}_1 - 40,3} + 6650 \text{ Nm}$$

$$M_2 = \frac{528}{\dot{\phi}_5 + \dot{\varphi}_2 - 40,3} + 6650 \text{ Nm}, \quad (22)$$

$$M_3 = \frac{528}{\dot{\phi}_5 - \dot{\varphi}_5 + \dot{\varphi}_3 - 40,3} + 6650 \text{ Nm},$$

$$M_4 = \frac{528}{\dot{\phi}_5 - \dot{\varphi}_5 + \dot{\varphi}_4 - 40,3} + 6650 \text{ Nm},$$

c) sztywności elementów układu:

$$\kappa_1 = \kappa_3 = 17,2 \cdot 10^6 \text{ Nm/rd.}$$

$$\kappa_2 = \kappa_4 = 9,7 \cdot 10^6 \text{ Nm/rd.}, \quad (23)$$

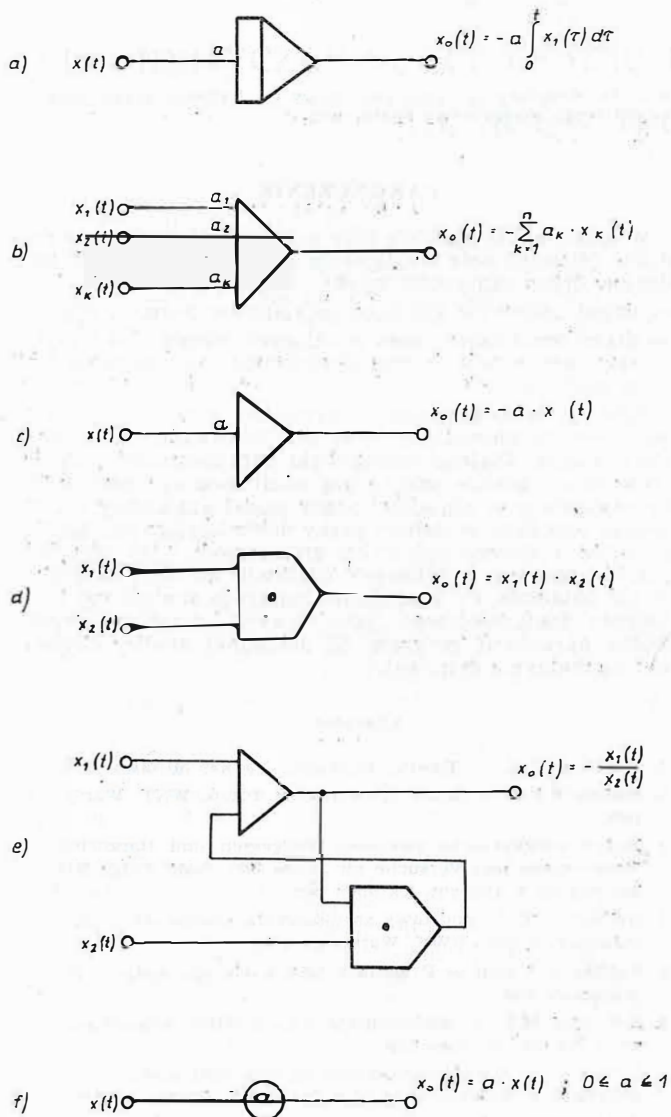
$$\kappa_5 = 2,7 \cdot 10^6 \text{ Nm/rd.}$$

d) zredukowane masowe momenty bezwładności

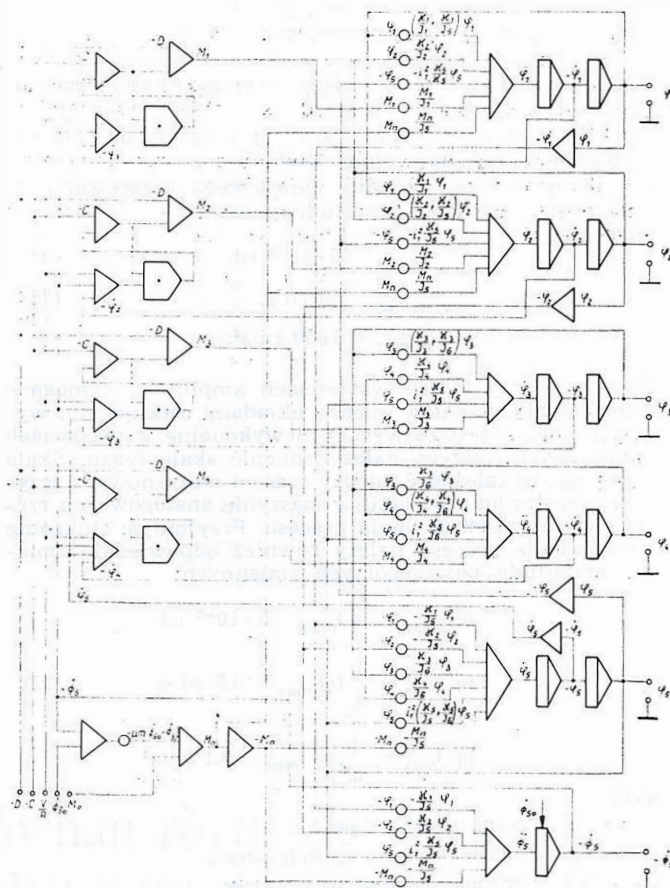
$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = 66 \text{ kgm}^2,$$

$$I_5 = 35,5 \text{ kgm}^2, \quad (24)$$

$$I_6 = 2,48 \text{ kgm}^2.$$



Rys. 9. Niektóre analogowe układy operacyjne (a — układ całkujący, b — układ sumujący, c — układ mnożący przez stałą, d — układ mnożący dwie zmienne, e — układ dzielący dwie zmienne, f — potencjometr).



Rys. 10. Wstępny schemat analogowy do badania drgań układu napędowego lokomotywy spalinowej.

Podstawiając powyższe wartości do układu równań (20) oraz wykonując działania otrzymano układ równań w postaci:

$$\ddot{\phi}_1 = -746000 \varphi_1 - 147000 \varphi_2 + 402000 \varphi_3 - \left(\frac{8}{\dot{\phi}_5 + \dot{\varphi}_1 - 40,3} + 100,8 \right) - [896 + 19,05 (40,7 - \dot{\phi}_5)] \quad (25)$$

$$\ddot{\phi}_2 = -485000 \varphi_1 - 420000 \varphi_2 + 402000 \varphi_3 - \left(\frac{8}{\dot{\phi}_5 + \dot{\varphi}_2 - 40,3} + 100,8 \right) - [896 + 19,05 (40,7 - \dot{\phi}_5)],$$

$$\ddot{\phi}_3 = -7200000 \varphi_3 - 3910000 \varphi_4 - 5760000 \varphi_5 - \left(\frac{8}{\dot{\phi}_5 - \dot{\varphi}_5 + \dot{\varphi}_3 - 40,3} + 100,8 \right)$$

$$\ddot{\phi}_4 = -6940000 \varphi_3 - 4060000 \varphi_4 - 5760000 \varphi_5 - \left(\frac{8}{\dot{\phi}_5 - \dot{\varphi}_5 + \dot{\varphi}_4 - 40,3} + 100,8 \right)$$

$$\ddot{\phi}_5 = 485000 \varphi_1 + 273000 \varphi_2 - 6940000 \varphi_3 - 3910000 \varphi_4 - 1164000 \varphi_5 + [896 + 19,05 (40,7 - \dot{\phi}_5)],$$

$$\ddot{\phi}_6 = 485000 \varphi_1 + 273000 \varphi_2 - 402000 \varphi_5 + [896 + 19,05 (40,7 - \dot{\phi}_5)].$$

Określenie skali amplitud i czasu. Model analogowy.

Maszyna analogowa nie określa zależności między zmiennymi badanego zagadnienia, lecz między napięciami zastępującymi te zmienne. Dlatego należy odpowiednio dobrać

współczynniki skali amplitud. Dobór taki jest ograniczony dwoma sprzecznymi wymaganiami:

- współczynniki skal powinny być jak największe, aby zmniejszyć ewentualne błędy wywołane napięciami zakłóceń,
- zmienne maszynowe nie powinny przekraczać pola napięć maszyny (najczęściej ± 100 V).

Dla analizowanego układu napędowego oszacowano, że maksymalne wartości amplitud wynoszą:

$$\begin{aligned} |\varphi|_{max} &= 5 \cdot 10^{-3} \text{ rd}, \\ |\dot{\varphi}|_{max} &= 50 \text{ rd/s}, \\ |\ddot{\varphi}|_{max} &= 1000 \text{ rd/s}^2, \end{aligned} \quad (26)$$

Ponieważ przy takich wartościach amplitud wymagane wzmocnienie sygnałów między układami całkującymi wynosi 10 000, co jest zazwyczaj niewykonalne w maszynach analogowych, dlatego należy zmienić skalę czasu. Skala czasu jest to zależność między czasem maszynowym, (czyli czasem trwania procesu w maszynie analogowej) a rzeczywistym czasem trwania procesu. Przyjmując stukrotnie spowolnienie procesu należy również odpowiednio zmienić amplitudy poszczególnych zmiennych:

$$\begin{aligned} (\varphi')_{max} &= (\varphi)_{max} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ rd} \\ (\dot{\varphi})_{max} &= \frac{1}{n} (\varphi)_{max} = 0,5 \text{ rd/s}, \\ (\ddot{\varphi})_{max} &= \frac{1}{n^2} (\ddot{\varphi})_{max} = 0,1 \text{ rd/s}^2 \end{aligned} \quad (27)$$

gdzie:

- n — skala czasu $n = 100$,
- $\varphi', \dot{\varphi}', \ddot{\varphi}'$ — zmienne procesu spowolnionego,
- $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ — zmienne procesu rzeczywistego.

Uwzględniając powyższe założenia otrzymano ostateczny układ równań różniczkowych w postaci:

$$\ddot{x}_1 = -3,73 x_1 - 0,735 x_2 + 2,01 x_3 - \left(\frac{1,6}{\dot{X}_3 + \dot{x}_1 - 80,6} + 10,08 \right) + [89,6 + 0,9525 (81,4 - \dot{X}_3)],$$

$$\ddot{x}_2 = -2,425 x_1 - 2,1 x_2 + 2,01 x_3 - \left(\frac{1,6}{\dot{X}_3 + \dot{x}_2 - 80,6} + 10,08 \right) + [-896 + 0,9525 (81,4 - \dot{X}_3)],$$

$$\ddot{x}_3 = -36 x_3 - 18,55 x_4 - 28,8 x_5 - \left(-\frac{1,6}{\dot{X}_3 - \dot{x}_3 + \dot{x}_3 - 80,6} + 10,08 \right), \quad (28)$$

$$\ddot{x}_4 = -37,4 x_3 - 20,3 x_4 - 28,8 x_5 - \left(\frac{1,6}{\dot{X}_3 - \dot{x}_3 + \dot{x}_4 - 80,6} + 10,08 \right),$$

$$\ddot{x}_5 = 2,425 x_1 + 1,365 x_2 - 34,7 x_3 - 18,55 x_4 - 5,82 x_5 + [89,6 + 0,9525 (81,4 - \dot{X}_3)],$$

$$\ddot{X}_5 = 2,425 x_1 + 1,365 x_2 - 2,01 x_3 + [89,6 + 0,9525 (81,4 - \dot{X}_3)]$$

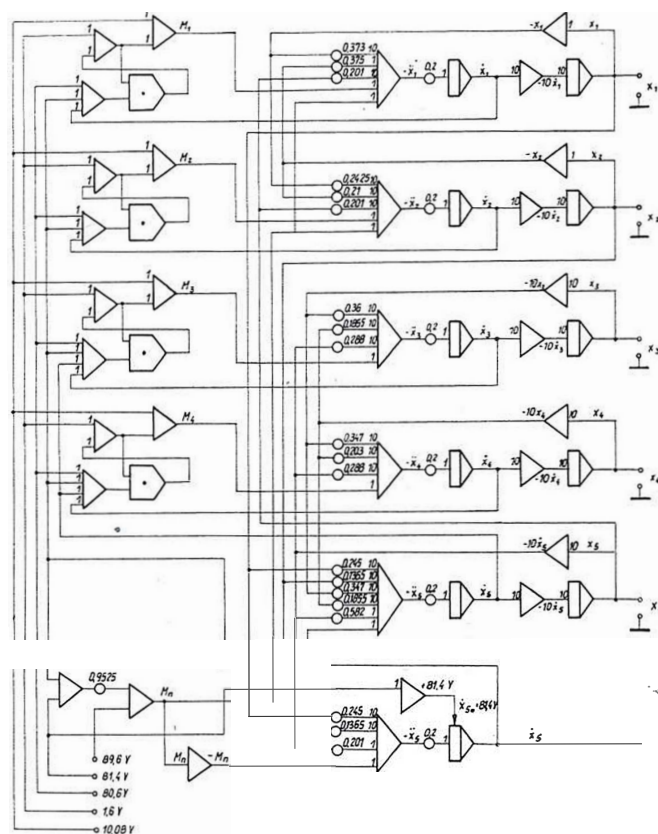
Jako warunek początkowy przyjęto prędkość obrotową zestawów kołowych tuż przed wystąpieniem poślizgu. Wynosi ona:

$$\dot{\Phi}_{50} = 40,7 \text{ s}^{-1}$$

Odpowiadająca tej prędkości zmienna maszynowa wynosi

$$\dot{X}_{50} = 81,4 \text{ V}$$

Końcowy schemat połączeń układów operacyjnych, realizujących układ równań (28) przedstawia rys. 11.



Rys. 11. Końcowy schemat analogowy do badania drgań układu napędowego lokomotywy spalinowej.

ZAKOŃCZENIE

W omawianym układzie przy pełnym poślizgu kół stwierdzono [9] możliwość wystąpienia dwu alternatywnych rodzajów drgań samowzbudnych:

- drgań zestawów kół jako oscylatorów 3-masowych,
- drgań wszystkich mas wirujących wózka jak bryły sztywnej, wokół ruchu obrotowego $\Phi_5(t)$ zestawu kół w poślizgu.

Amplitudy cykli granicznych określono w postaci uwikłanej, bowiem niemożliwe było przedstawienie ich w postaci jawnej. Dlatego można było przeprowadzić jedynie ograniczoną analizę jakościową analizowanego przebiegu. Przedstawiony w niniejszej pracy model analogowy drgań układu umożliwił w dalszej pracy dokładniejsze określenie amplitud i stateczności cykli granicznych, jak również analizę stanów przejściowych, od chwili wzbudzenia drgań do ich ustalenia. Po analizie na maszynie analogowej i ustaleniu dokładniejszego jakościowego przebiegu drgań można opracować program do dokładnej analizy liczbowej na maszynie cyfrowej.

Literatura

1. Babakow J.M. — Teoria kolebanij. Nauka, Moskwa 1968.
2. Bishop R.E.D. — Macierzowa analiza drgań. WNT, Warszawa 1972.
3. Haftreibungversuche zwischen Wadgassen und Hargarten — Vorversuche und Versuche im Jahre 1970. ORE. Frage B44 D, Bericht Nr 9, Utrecht, Oktober 1971.
4. Hellmann W. — Podstawy zastosowania analogowych maszyn matematycznych. PWN, Warszawa 1968.
5. Kaliski S. i inni — Drgania i fale w ciałach stałych. PWN, Warszawa 1966.
6. Kołowski M.Z. — Nieliniowa teoria wibrozaszczynnych system. Nauka, Moskwa 1966.
7. Levine L. — Metody stosowania maszyn analogowych do rozwiązywania problemów w technice. PWN, Warszawa 1968.
8. Kwaśnikowski J. — Drgania zestawu kół napędzanego przekładnią stożkową podczas pełnego poślizgu. Materiały Konferencyjne I Krajowej Konferencji „Pojazdy Szynowe” — Kraków — Zawoja 1973.

9. Kwaśnikowski J. — Drgania zestawów kół napędzanych wałami przegubowymi w dwuosowym wózku lokomotywy spalinowej podczas pełnego poślizgu kół. Praca doktorska. Politechnika Poznańska 1973.
10. Lisowski A. — Analogowe maszyny matematyczne. PWN, Warszawa 1968.
11. Osiecki J. — Drgania układu napędowego lokomotywy elektrycznej podczas pełnego poślizgu kół po szynach. Załącznik specjalny do sprawozdania ORE B 44 RP 10 n.t. badania przy czepności.
12. Osiecki J. — Drgania skrętne układów napędowych ze sprzęgłami Cardana w trakcyjnych pojazdach szynowych. Archiwum Budowy Maszyn, t. 12, zes. 3, 1965.
13. Osiecki J. — The construction of discrete vibrating model and the existence of weak couplings in the practical analysis of machine dynamics. PWN, Warszawa 1969.
14. Przystosowanie kolei do zwiększonych szybkości i dużych przewozów WKŁ, Warszawa 1969.
15. Semiczastnow J.L. — Gidrawliczeskije pieredaczi tieplowozow. Maszgiz, Moskwa 1961.
16. Suzdalcew M. — Issledowanije dinamiki priwoda tieplowozow s kardannoj pieredaczej. Trudy MIIT, wyp. 175, Moskwa 1963.
17. Szopliński Z. — Elektroniczna technika analogowa. WNT, Warszawa 1968.
18. Wulfson J., Kołowski Z. — Nielinieijnyje zadaczi dinamiki maszin. Maszynostrojenije, Leningrad 1968.
19. Ziemia S. — Analiza drgań. PWN, Warszawa 1957.