

9. Kwaśnikowski J. — Drgania zestawów kół napędzanych wałami przegubowymi w dwuosowym wózku lokomotywy spalinowej podczas pełnego poślizgu kół. Praca doktorska. Politechnika Poznańska 1973.
10. Lisowski A. — Analogowe maszyny matematyczne. PWN, Warszawa 1968.
11. Osiecki J. — Drgania układu napędowego lokomotywy elektrycznej podczas pełnego poślizgu kół po szynach. Załącznik specjalny do sprawozdania ORE B 44 RP 10 n.t. badania przy czepności.
12. Osiecki J. — Drgania skrętne układów napędowych ze sprzęgłami Cardana w trakcyjnych pojazdach szynowych. Archiwum Budowy Maszyn, t. 12, zes. 3, 1965.
13. Osiecki J. — The construction of discrete vibrating model and the existence of weak couplings in the practical analysis of machine dynamics. PWN, Warszawa 1969.
14. Przystosowanie kolei do zwiększonych szybkości i dużych przewozów WKŁ, Warszawa 1969.
15. Semiczastnow J.L. — Gidrawliczeskije pieredaczi tieplowozow. Maszgiz, Moskwa 1961.
16. Suzdalcew M. — Issledowanie dinamiki priwoda tieplowozow s kardannoju pieredaczej. Trudy MIIT, wyp. 175, Moskwa 1963.
17. Szopliński Z. — Elektroniczna technika analogowa. WNT, Warszawa 1968.
18. Wulfson J., Kołowski Z. — Nieliniownyje zadaczi dinamiki maszin. Maszinostrojenije, Leningrad 1968.
19. Ziemia S. — Analiza drgań. PWN, Warszawa 1957.

Mgr JERZY LEWINSKI

Mgr EUGENIA MICHALAK

Ośrodek Badawczo-Rozwojowy
Pojazdów Szynowych w Poznaniu

Dr inż. WOJCIECH OSMÓLSKI

Politechnika Poznańska

Automatyczne generowanie równań różniczkowych ruchu układów mechanicznych

W artykule przedstawiono opis programu na maszynę cyfrową, który tworzy w sposób automatyczny, w oparciu o równania energii oraz siły zewnętrzne (przedstawione w postaci ogólnych wzorów), dla układów liniowych macierze mas, tłumienia, sztywności oraz równania ruchu, natomiast dla nieliniowych tylko równania ruchu. Zarówno macierze jak i równania wyprowadza w postaci ogólnych zależności (wzorów), które wykorzystuje się do dalszej analizy ogólnej jak i numerycznej. Zastosowanie programu pokazano na przykładzie.

Wstęp

Zastosowanie maszyn cyfrowych w naukach inżynierskich polega zwykle na przeprowadzaniu uciążliwych obliczeń numerycznych. Nie jest to jedyna możliwość zastosowania tych maszyn.

Metody analizy dynamicznej układów mechanicznych, przedstawione w pracach [5] i [6] nie dają się zastosować do układów nieliniowych, przystąpiono więc do opracowania systemu TRAIN służącego do analizy dynamicznej pojazdów szynowych. W trakcie dokonywania analizy dynamicznej nieliniowego układu mechanicznego zachodzi konieczność ustalenia jego równań ruchu. W przypadku układów o dużej liczbie stopni swobody ustalenie tych równań jest uciążliwe i stwarza możliwość wielu pomyłek. Dzięki możliwości działania na znakach wszelkie operacje różniczkowania wyrażeń i formowania równań może wykonać komputer. Algorytm operacji na wyrażeniach arytmetycznych można w miarę łatwo zaprogramować, gdy wyrażenia są wielomianami dowolnego stopnia. Nieliniowość układów mechanicznych, jakimi są matematyczne modele pojazdów szynowych, można zwykle z dobrym przybliżeniem opisać wielomianami. Gdy to nie wystarcza, równania ruchu ustalone przez komputer muszą być jeszcze uzupełnione o te dodatkowe nieliniowe wyrażenia. W dalszym ciągu artykułu przedstawiono jeden z programów systemu TRAIN służący do automatycznego generowania równań ruchu.

Ustalanie równań ruchu

Pełny opis ruchu dyskretnego układu mechanicznego można podać rozwiązując jego równanie Lagrange'a. Jeśli energia kinetyczna układu zależy tylko od pierwszych pochodnych współrzędnych uogólnionych, a nie od samych

współrzędnych, to równania Lagrange'a można zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

gdzie:

$T(\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n)$ — energia kinetyczna układu,

$V(q_1 \dots q_n)$ — energia potencjalna,

$F(\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n)$ — funkcja rozproszenia (funkcja Rayleigha)

$Q_i(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, \ddot{q}_1 \dots \ddot{q}_n, \dots)$ — siła uogólniona związana ze współrzędną q_i .

Siłę uogólnioną wyznacza się z wzoru

$$Q_i = \sum_j \bar{P}_j \cdot \frac{\partial \ddot{X}_j}{\partial \dot{q}_i}, \quad (2)$$

w którym $\bar{P}_j$ oznacza siłę działającą na punkt, którego wektor wodzący we współrzędnych kartezjańskich jest $\ddot{X}_j$. Sumowanie przebiega po wszystkich punktach układu, na które działają siły.

Informacja o siłach działających w układzie zawarta jest w energii potencjalnej, w funkcji Rayleigha i w siłach uogólnionych. Chwilowa wielkość siły zależy od stanu układu — na przykład siła K_j przenoszona przez łącznik sprężysty o numerze j zależy od jego odkształcenia $\lambda_j(q_1 \dots q_n)$ i prędkości zmian tego odkształcenia $\dot{\lambda}_j$. Zależność $K_j(\lambda_j, \dot{\lambda}_j)$ nazywamy charakterystyką łącznika. Jeżeli charakterystykę można przedstawić w postaci

$$K_j(\lambda_j, \dot{\lambda}_j) = G_j(\lambda_j) + \kappa_j(\dot{\lambda}_j),$$

to informację o sile K_j można umieścić w energii potencjalnej i w funkcji Rayleigha. Energia potencjalna będzie wtedy zawierać składnik

$$V_j = \int_0^{l_j} G(x) dx,$$

a funkcja Rayleigha składnik

$$F_j = \int_0^{l_j} \kappa(x) dx$$

W przeciwnym wypadku informacja o tej sile znajdzie się w siłach uogólnionych i tak na przykład w równaniu Lagrange'a dla współrzędnej q_i znajdzie się następujący składnik siły uogólnionej:

$$Q_i^{(j)} = K_j(\lambda_j, \dot{\lambda}_j) \frac{\partial \lambda_j}{\partial q_i}$$

Rozwiązywanie układu równań Lagrange'a może być kłopotliwe. Gdy znane są warunki początkowe, a interesuje nas na przykład relaksacja układu po impulsowym zakłóceniu równowagi, można zawsze stosować którąś z metod numerycznych opisanych w pracach [2] i [3]. W takim wypadku równania muszą być zapisane w postaci

$$\ddot{q}_i = \Phi_i(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t), i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Funkcje Φ_i mogą mieć dowolną postać, w szczególności mogą być nieliniowe.

Jeśli układ jest liniowy można ponadto określić częstotliwości i postacie jego drgań własnych lub wymuszonych według metod przedstawionych w pracy [4]. Wtedy równania ruchu przyjmują postać

$$[M]\{\ddot{q}\} + [L]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{P\}, \quad (4)$$

gdzie $[M]$, $[L]$, $[K]$ oznaczają odpowiednio macierze mas, tłumienia i sztywności, a $\{q\}$, $\{\dot{q}\}$, $\{\ddot{q}\}$, $\{P\}$ — wektory współrzędnych uogólnionych, prędkości uogólnionych, przyspieszeń uogólnionych i wektor wymuszeń.

W rezultacie, gdy zamierzamy przeanalizować skomplikowany układ mechaniczny, czeka nas następujące postępowanie:

1. określenie postaci funkcji T , V , F , Q_i wchodzących w równania (1),
2. ułożenie równań ruchu (1),
3. przekształcenie tych równań do postaci (3) i napisanie podprogramu określającego funkcje Φ_i ,
4. określenie postaci macierzy $[M]$, $[L]$, $[K]$, $[P]$, na podstawie tych równań i napisanie odpowiedniego podprogramu.

To postępowanie jest na ogół bardzo uciążliwe i trudno je wykonać bezbłędnie, opracowany więc został program, który na podstawie danych określających funkcje T , V , F , Q_i (punkt 1.) wykonuje czynności opisane w punktach 2, 3, 4.

Podprogramy określające funkcje Φ_i (podprogram FUN) oraz macierze M , L , K , P (podprogram EQLG) są wyprowadzane przez maszynę cyfrową na maszynowy nośnik informacji, a jednocześnie ich tekst jest drukowany dla umożliwienia kontroli. Te podprogramy maszyna cyfrowa wyprowadza w języku FORTRAN. Program, o którym mowa napisano w języku COBOL.

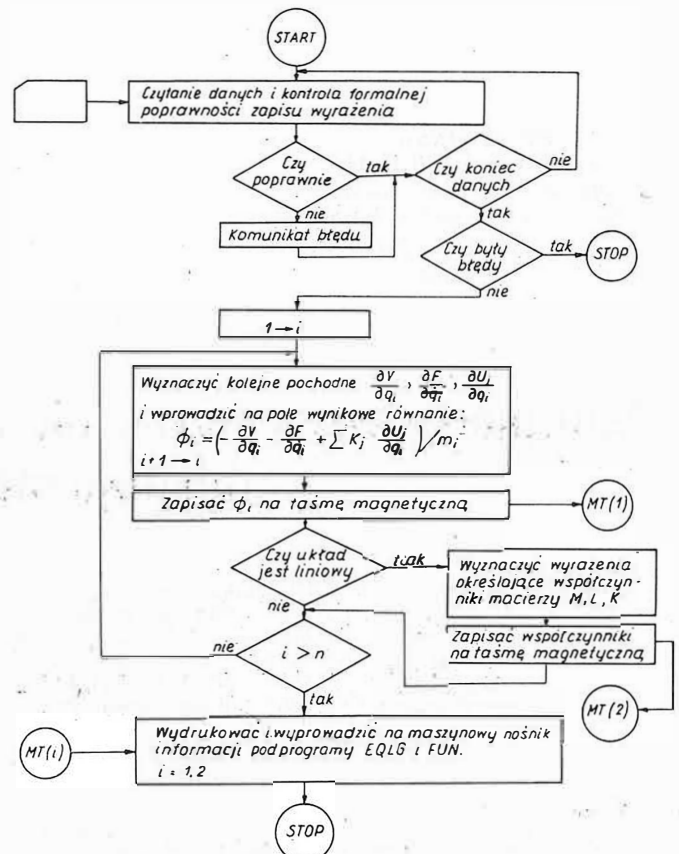
Dane dostarcza się na kartach perforowanych 80-kolumnowych. Wyrażenia arytmetyczne, jakimi są funkcje T , V , F , P_i , X_j muszą być wielomianami, niekoniecznie w postaci uporządkowanej. Symbole $X(i)$, $Y(i)$, $Z(i)$ są w danych zarezerwowane odpowiednio dla oznaczania współrzędnych uogólnionych q_i i ich pochodnych względem czasu $\dot{q}_i$, $\ddot{q}_i$. Wszelkie parametry układu należy oznaczyć przez $A(k)$ ($1 \leq k \leq 999$). W skład wielomianu mogą wchodzić liczby jako współczynniki, lub składniki. Działania oznaczamy: + dodawanie, - odejmowanie, potęgowanie (wykładnik potęgi stoi za strzałką). Znak mnożenia jest pomijany.

Zasadniczą częścią programu jest podprogram wyznaczający wyrażenie arytmetyczne przedstawiające pochodną nieuporządkowanego wielomianu ze względu na argument $X(n)$ lub $Y(n)$. Program główny wykorzystuje pracę tego podprogramu do obliczania pochodnych znajdujących

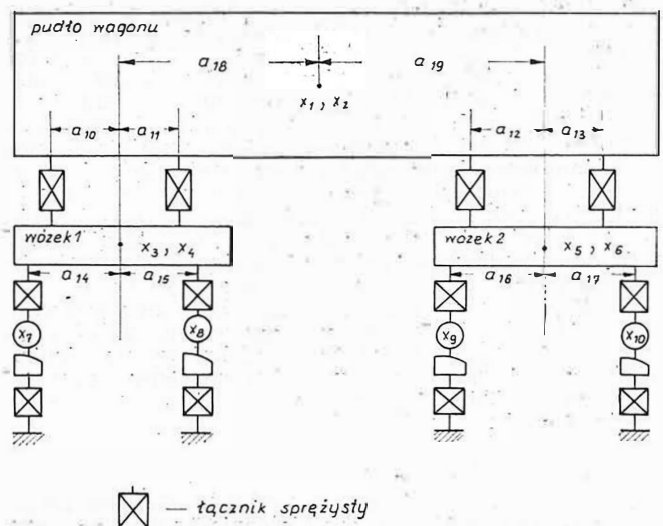
się w równaniach (1) i (2), organizuje przekazywanie informacji i formowanie wyjściowego segmentu w języku FORTRAN. Jego uproszczony schemat blokowy jest pokazany na rysunku 1.

Przykład przygotowania i zapisu danych.

Działanie programu zostanie przedstawione na prostym przykładzie drgań pionowych wagonu. Model tego układu wraz z niektórymi oznaczeniami jest pokazany na rysunku 2. Jest to układ o dziesięciu stopniach swobody. Współrzędne uogólnione przedstawiają sobą małe wychylenia układu od stanu równowagi. Wychylenia pionowe pudła, wózków i zestawów kołowych oznaczono odpowiednio przez x_1 , x_3 , x_5 , x_7 , x_8 , x_9 , x_{10} , obroty pudła i wózków wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez ich środki masy mają oznaczenia x_2 , x_4 , x_6 .



Rys. 1. Uproszczony schemat blokowy programu.



Rys. 2. Model przykładowego układu drgającego.

Energia kinetyczna tego układu wyraża się zależnością:

$$T = \frac{1}{2} a_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} a_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} a_3 \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2} a_4 \dot{x}_4^2 + \frac{1}{2} a_5 \dot{x}_5^2 + \frac{1}{2} a_6 \dot{x}_6^2 + \frac{1}{2} a_7 (\dot{x}_7^2 + \dot{x}_8^2 + \dot{x}_9^2 + \dot{x}_{10}^2), \quad (5)$$

gdzie:

a_1, a_2 — masa i moment bezwładności pudła,
 a_3, a_4 — masa i moment bezwładności wózka,
 a_5 — masa zestawu kołowego plus zredukowana masa toru.

Założmy, że łączniki sprężyste związane z wagonem są nieliniowe, za liniowe będziemy uważać jedynie łączniki sprężyste wyobrażające sprężystość toru. Postacie funkcji V i F będą następujące:

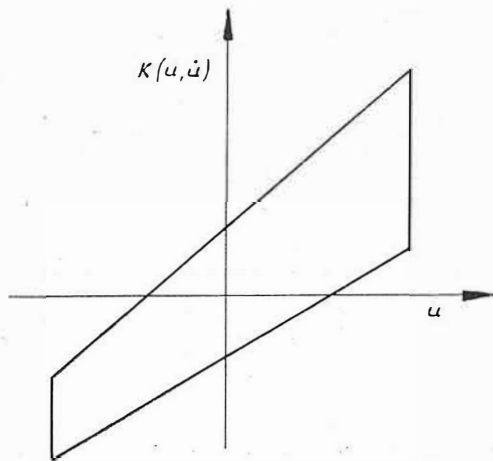
$$V = \frac{1}{2} a_6 ((x_7 - a_{51})^2 + (x_8 - a_{52})^2 + (x_9 - a_{53})^2 + (x_{10} - a_{54})^2), \quad (6)$$

$$F = \frac{1}{2} a_7 ((y_7 - a_{61})^2 + (y_8 - a_{62})^2 + (y_9 - a_{63})^2 + (y_{10} - a_{64})^2), \quad (7)$$

gdzie:

a_6, a_7 — sprężystość i współczynnik tłumienia toru,
 $a_{51}, a_{52}, a_{53}, a_{54}$ — funkcje zależne od argumentu „ vt ” przedstawiające odkształcenie pionowe toru,
 $a_{61}, a_{62}, a_{63}, a_{64}$ — ich pochodne względem czasu.

Założmy, że charakterystyki łączników są takie, jak na rysunku 3.



Rys. 3. Przykładowa charakterystyka łącznika sprężystego.

Zależnie od kierunku prędkości odkształcenia siłę wyznaczamy według górnej lub dolnej prostej. Można to przedstawić zależnością:

$$K(U, \dot{U}) = (a + \alpha \operatorname{sign} \dot{U}) U + b \operatorname{sign} \dot{U}. \quad (8)$$

Siły przekazywane przez łączniki pomiędzy pudłem wagonu i wózkami zapiszemy więc:

$$\begin{aligned} K_1 &= (a_{21} + a_{41})(x_1 - (a_{18} + a_{10})x_2 - x_3 - a_{10}x_4) + a_{71} \\ K_2 &= (a_{21} + a_{42})(x_1 - (a_{18} - a_{11})x_2 - x_3 + a_{11}x_4) + a_{72} \\ K_3 &= (a_{21} + a_{43})(x_1 + (a_{19} - a_{12})x_2 - x_5 + a_{12}x_6) + a_{73} \\ K_4 &= (a_{21} + a_{44})(x_1 + (a_{19} + a_{13})x_2 - x_5 - a_{13}x_6) + a_{74}, \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie:

a_{21} — oznacza średnie nachylenie charakterystyki z rysunku 2,
 $a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}$ — oznaczają kolejne wartości $\alpha \operatorname{sign} \dot{U}_j$; $j = 1 \dots 4$,
 $a_{71}, a_{72}, a_{73}, a_{74}$ — wartości $b \operatorname{sign} \dot{U}_j$; $j = 1 \dots 4$.

Pozostają jeszcze siły między wózkami a zestawami kołowymi:

$$\begin{aligned} K_5 &= (a_{22} + a_{45})(x_3 - a_{14}x_4 - x_7) + a_{75} \\ K_6 &= (a_{22} + a_{46})(x_3 + a_{15}x_4 - x_8) + a_{76} \\ K_7 &= (a_{22} + a_{47})(x_5 - a_{16}x_6 - x_9) + a_{77} \\ K_8 &= (a_{22} + a_{48})(x_5 + a_{17}x_6 - x_{10}) + a_{78}. \end{aligned} \quad (10)$$

Parametry a_{22} i $a_{45} \div a_{48}$, $a_{75} \div a_{78}$ mają znaczenie analogiczne do parametrów wprowadzonych przy siłach $K_1 \div K_4$. Odkształcenia U_i łączników sprężystych wywołane siłami $K_1 \div K_8$ wynoszą:

$$\begin{aligned} U_1 &= x_1 - (a_{18} + a_{10})x_2 - x_3 - a_{10}x_4 \\ U_2 &= x_1 - (a_{18} - a_{11})x_2 - x_3 + a_{11}x_4 \\ U_3 &= x_1 + (a_{19} - a_{12})x_2 - x_5 + a_{12}x_6 \\ U_4 &= x_1 + (a_{19} + a_{13})x_2 - x_5 - a_{13}x_6 \\ U_5 &= x_3 - a_{14}x_4 - x_7 \\ U_6 &= x_3 + a_{15}x_4 - x_8 \\ U_7 &= x_5 - a_{16}x_6 - x_9 \\ U_8 &= x_5 + a_{17}x_6 - x_{10} \end{aligned} \quad (11)$$

Współczynniki a_i , które nie są wielkościami stałymi, lecz funkcjami czasu lub ich zmiennych, należy obliczać oddzielnie. Należy w tym celu po danych przedstawiających postacie funkcji T, V, F, Q_i umieścić karty zawierające rozkazy w FORTRANIE obliczające te współczynniki. Te rozkazy znajdują się wtedy na początku podprogramu obliczającego funkcje Φ_i z równania (3) (patrz rys. 4).

Dane zawierają więc informacje umieszczone w zależnościach (5), (6), (7), (9) i (10), a ponadto specjalne żądania dotyczące niektórych współczynników. Na ich podstawie maszyna cyfrowa sporządza dwa podprogramy. Pierwszy z nich — podprogram EQLG dotyczy układów liniowych. Wprawdzie rozpatrywany układ nie jest liniowy, ale będzie nim, gdy zostaną spełnione warunki:

$$a_i = 0, \quad i = 41 \dots 48, \quad 71 \dots 78 \text{ — równania (9) i (10).}$$

Dla tego podprogramu warunki te są spełnione, ponieważ powyższe współczynniki są obliczane dopiero w podprogramie FUN. Wielkości a_{21} i a_{22} muszą mieć w tym programie wartości równe zastępczym sprężystościom liniowym łączników.

Podprogram EQLG oblicza wyrazy macierzy mas $B(i)$, $i = 1, \dots, n$ i wyrazy macierzy sprężystości $C(i)$; $i = 1, \dots, \frac{1}{2}n(n+1)$, zapisuje te wielkości na taśmie magnetyczną, oblicza następnie wyrazy macierzy tłumienia $C(i)$, $i = 1 \dots \frac{1}{2}(n+1)$ i również zapisuje je na taśmie magnetyczną. Dalej podaje ilość stopni swobody układu.

Dla przykładu współczynnik macierzy sprężystości K_{77} oznaczony w podprogramie EQLG jako $C(46)$ zostanie wyznaczony w postaci instrukcji

$$C(46) = -A(6) + A(22) + A(45),$$

a współczynnik L_{77} macierzy tłumienia w postaci

$$C(46) = -A(7)$$

Podprogram FUN oblicza wartości funkcji Φ_i (równanie 3) i umieszcza je w polu $Z(i)$, $i = 1 \dots n$.

Przykładowo równanie Lagrange'a dla współrzędnej x_7 będzie miało w tym podprogramie postać następującą

$$\begin{aligned} Z(7) &= (-A(6) * (X(7) - A(51))(-A(7)) * (Y(7) - A(61)) - \\ &\quad - (A(22) + A(45)) * (X(3) - A(14)) * (X(4) - X(7)) + \\ &\quad + A(75)) / A(5). \end{aligned}$$

Przykład zapisu danych przedstawiono na rys. 4.

Zaletą omawianego programu jest wyeliminowanie w trakcie ustalania równań ruchu żmudnych i stwarzających możliwość pomyłki operacji na wyrażeniach arytmetycznych i sporządzania odpowiednich podprogramów. W porównaniu z metodami przedstawionymi w pracach [5] i [6] niniejsza metoda jest bardziej uniwersalna, ponieważ umożliwia przeprowadzenie analizy czasowej układu mechanicznego i nie ogranicza się do układów liniowych.

Rys. 4. Przykład zapisu danych.

4. Bishop R.E.D., Gladwell G.M.L. Michaelson S. — Macierzowa analiza drgań — Warszawa 1972
5. Gawroński W. — Analiza drgań wymuszonych kinematycznie metodą sztywnych elementów skończonych. Metody numeryczne w mechanice. Materiały Sympozjum, Gdańsk 1972.
6. Kruszewski J. — System obliczeń SFEM 72. Metody numeryczne w mechanice. Materiały sympozjum, Gdańsk 1972