Dr inż. MIECZYSŁAW OFIERZYŃSKI
Mgr inż. MARIAN SOBCZAK
Politechnika Poznańska

Poprzeczna praca cylindrycznych sprężyn śrubowych w ujęciu charakterystyk mechanicznych

Przedmiotem rozważań jest poprzeczna praca cylindrycznych sprężyn śrubowych w ujęciu ich odkształceń (poprzeczne przemieszczenia liniowe, linia ugięcia, przemieszczenie kątowe skrajnego zwoju) oraz energii potencjalnej. Zestawiono znane i stosowane sposoby obliczeń szczególnego przypadku ugięć poprzecznych, porównując uzyskane z nich wyniki ze znanymi z literatury rezultatami badań eksperymentalnych. Przedstawiono analizę ogólnego przypadku poprzecznej pracy sprężyn dla płaskiego stanu obciążeń i odkształceń z wyznaczeniem jej energii potencjalnej. Uwzględniono w niej uogólnione siły zewnętrzne dane w postaci obciążenia poosiowego, siły poprzecznej i momentu gnącego, a w odniesieniu do odkształceń — obok formy objętościowej uwzględniono odkształcenie postaciowe związane z siłami poprzecznymi w przekrojach.

Wstęp

W konstrukcji zawieszenia pojazdu szynowego niejednokrotnie sprężyny śrubowe poddawane są znacznym odkształceniom poprzecznym. Jeżeli przez odkształcenie poprzeczne najogólniej rozumieć będziemy względne przemieszczenie liniowe prostopadłe do osi sprężyny oraz przemieszczenie kątowe obu podstaw sprężyn, to odkształceniom poprzecznym podlegają wszystkie sprężyny stanowiące elementy nośne pojazdu. Wzajemne relacje między obydwoma formami odkształcenia poprzecznego sprężyny wynikają najczęściej z dynamiki względnie statyki układu chociaż niekiedy określone są kinematycznie.

W swej pracy poprzecznej, obejmującej przemieszczenie liniowe prostopadłe do osi, sprężyny śrubowe stanowią człony sprężyste, które zwiększają ilość stopni swobody całego układu względnie więzy sprężyste nie zmieniające stopnia ruchliwości układu a wpływające na jego ruch. Członami sprężystymi są sprężyny stanowiące jedyny albo dodatkowy, obok wahliwych wieszaków, boczny element zwrotny. Znane są takie rozwiązania konstrukcyjne zawieszenia nadwozia, w których sprężyny drugiego stopnia usprężynowania stanowią element kompensujący wszelkie możliwe przemieszczenia względne nadwozia i wózka.

Wynika stąd konieczność przeprowadzenia możliwie dokładnych obliczeń zarówno wytrzymałościowych jak i dynamicznych. Również w typowych rozwiązaniach konstrukcyjnych, gdzie poprzeczne odkształcenia sprężyn nie są tak znaczne, pomijanie ich w obliczeniach, zwłaszcza dotyczących dynamiki, może prowadzić do zbyt dużych błędów.

Z wagi tego problemu zdawano sobie już dawniej sprawę prowadząc badania eksperymentalne i rozważania teoretyczne, które jednak zagadnienia w pełni nie wyjaśniły. Dobór sprężyn pracujących poprzecznie sprawia konstruktorom w dalszym ciągu wiele trudności.

Wynikają one z kilku przyczyn, a do najważniejszych należy:

— duża liczba metod obliczeniowych dla sztywności poprzecznych dających różne niekiedy bardzo odbiegające od siebie wyniki,

— szczególny charakter większości znanych metod nie uwzględniających jednocześnie wszystkich trzech rodzajów obciążeń i przemieszczeń względnych obu podstaw sprężyn,

— wątpliwości wywołane przez rozbieżność wyników badań eksperymentalnych z niektórymi metodami obliczeniowymi,

— brak odpowiednio prostej metody wyznaczania wpływu poprzecznej pracy sprężyn śrubowych na dynamikę układu.

Wyrywkowe badania eksperymentalne przeprowadzone dotychczas nie wyjaśniają zagadnienia, gdyż ograniczają się do szczególnych przypadków warunków pracy sprężyn a prowadzone są na wybranych pojedynczych sprężynach. Uzyskane wyniki są więc mało uniwersalne. Konieczne byłoby przeprowadzenie odpowiednio wszechstronnych badań uwzględniających wszystkie rodzaje możliwych obciążeń i odkształceń przy udziale sprężyn o różnych skojarzeniach parametrów konstrukcyjnych.

Celem niniejszej pracy jest zestawienie i porównanie z uwzględnieniem wyników badań eksperymentalnych znanych metod wyznaczania poprzecznych charakterystyk sprężyn śrubowych (sztywności, odkształceń, energii potencjalnej) oraz ogólna analiza poprzecznej pracy sprężyny dla płaskiego stanu obciążeń i odkształceń z wyznaczeniem jej energii potencjalnej. To ostatnie zagadnienie wymaga wyjaśnienia głównie z punktu widzenia dynamiki układu mechanicznego, jakim w szczególnym przypadku jest pojazd szynowy.

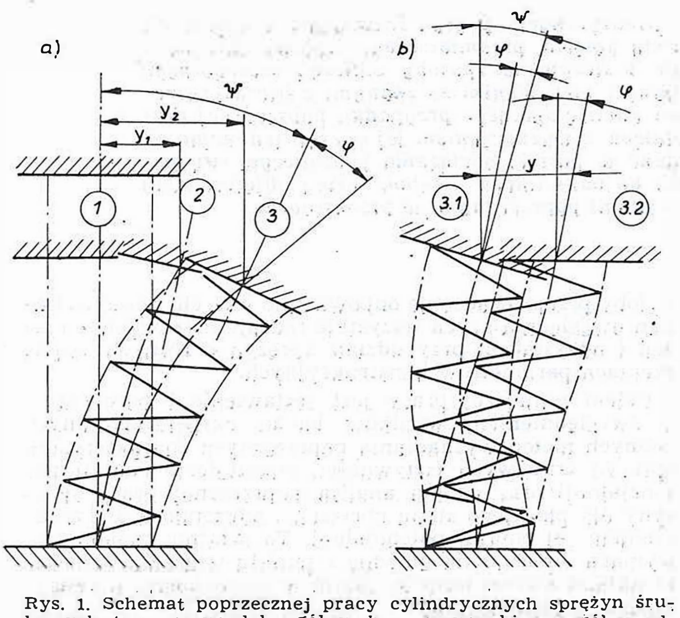
Stosowane oznaczenia:

B — sztywność pręta zastępczego dla odkształcenia objętościowego,
H — wysokość sprężyny w stanie statycznego ugięcia pod wpływem siły poosiowej,
M — moment gnący w pręcie zastępczym,
M_o — zewnętrzny moment gnący,
P_y — zewnętrzna siła poprzeczna działająca na sprężynę,
P_z — zewnętrzna siła poosiowa działająca na sprężynę,
Q — siła poprzeczna w przekroju poprzecznym pręta zastępczego,
S — sztywność pręta zastępczego dla odkształcenia postaciowego,
V_s — energia potencjalna sprężyny odpowiadająca poprzecznemu odkształceniu,
f_y — poprzeczne przemieszczenie względne obu podstaw sprężyny,
k_y — sztywność poprzeczna sprężyny dla szczególnego przypadku jej odkształceń (skrajne zwoje wzajemnie równoległe),
k_z — sztywność poosiowa,
q — obciążenie ciągłe,
y — współrzędna prostopadła do osi sprężyny,
y_o — przemieszczenie poprzeczne obu podstaw sprężyny względem siebie
z — współrzędna poosiowa,

φ — kąt dodatkowego wychylenia stycznej do linii ugięcia wywołany odkształceniem postaciowym,
ψ — kąt wychylenia przekrojów poprzecznych pręta.
ψ_o — kąt wzajemnego nachylenia obu podstaw sprężyn,
Θ — kąt nachylenia stycznej do linii ugięcia mierzony względem osi początkowej sprężyny.

Znane metody obliczeń poprzecznej sztywności cylindrycznych sprężyn śrubowych.

W najogólniejszym przypadku odkształceń sprężyny w płaszczyźnie obie jej podstawy mogą doznawać względnych przemieszczeń poosiowych, prostopadłych do osi sprężyny oraz kątowych. Całkowite obciążenie obejmuje siłę poosiową, siłę poprzeczną oraz moment. Na rysunku 1 przedstawiono ogólny schemat pracy, przy czym fragment „a” obrazuje poszczególne położenia sprężyny przy obciążeniu jej kolejno siłą poosiową (1), siłą poprzeczną (2) i momentem (3), natomiast fragment „b” rysunku przedstawia dwa szczególne przypadki złożonego stanu obciążeń sprężyny (siła poosiowa, poprzeczna, moment), w którym kątowe (3.2.) lub liniowe poprzeczne (3.1.) przemieszczenie względne obu podstaw jest równe zeru. Owe szczególne przypadki są godne uwagi wtedy, gdy konstrukcja całego układu umożliwia jedynie tego rodzaju odkształcenia sprężyn. Często jednak w przybliżonych obliczeniach rzeczywisty ogólny przypadek pracy sprowadza się do przypadku, w którym $\psi = 0$.



Rys. 1. Schemat poprzecznej pracy cylindrycznych sprężyn śrubowych (a — przypadek ogólny, b — przypadki szczególne odkształcenia).

Istnieje wiele prac, w których rozważa się poprzeczną pracę cylindrycznych sprężyn śrubowych [2], [6], [8], [9]. W większości rozpatruje się przypadek (3.2), w którym obie podstawy sprężyn pozostają względem siebie równoległe. Na ogół sprowadza się w nich sprężynę śrubową do belki o pewnych równoważnych parametrach konstrukcyjnowytrzymałościowych. Uwzględnia się jednak również działanie sił poprzecznych.

Według S. Grossa [6], [7] strzałkę poprzecznego ugięcia dla przypadku równoległego przemieszczenia obu podstaw sprężyn określa następująca zależność:

$$f_y = P_y\left[\frac{1}{P_z}\left(\frac{2}{\varkappa}\operatorname{tg}\frac{\varkappa H}{2}-H\right)+\frac{H}{S}\right], \tag{1}$$

gdzie

$$\varkappa = \sqrt{\frac{P_z}{B\left(1+\frac{P_z}{S}\right)}}, \quad H = H_0 - f_z \tag{2}$$

$$B = 14600\,\frac{Hd^4}{nR}, \quad S = 33600\,\frac{Hd^4}{nR^3}. \tag{3}$$

Wobec tego sztywność poprzeczna sprężyny przedstawia się następująco:

$$k_y = \frac{1}{\frac{1}{P_z}\left(\frac{2}{\varkappa}\operatorname{tg}\frac{\varkappa H}{2}-H\right)+\frac{H}{S}} \tag{4}$$

Podobne zależności podaje norma Ministerstwa Komunikacji ZSRR (MPS) [14] dotycząca obliczeń wytrzymałościowych wagonów, przy czym współczynniki B i S wyrażone są nieco inaczej:

$$B = \frac{EI}{\eta}, \quad S = \frac{8EI\operatorname{tg}\alpha}{D^2}, \tag{5}$$

gdzie

$$\eta = \frac{2+\mu\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}, \quad \mu = \frac{E}{2G}-1, \tag{6}$$

a ponadto

$$H = H_0 - d - f_z.$$

J. A. Haringx [9] rozpatrując ogólniejszy przypadek poprzecznej pracy sprężyn, w którym położenie wzajemne obu podstaw sprężyn nie jest ograniczone geometrią układu i wynika z obciążenia siłą poosiową, siłą poprzeczną i momentem, podał następującą zależność:

— dla strzałki ugięcia

$$f_y = \frac{M_0}{P_z}\left(\frac{1}{\cos qH}-1\right)+\frac{P_y}{P_z}H\left[\left(1+\frac{P_z}{\beta}\right)\frac{\operatorname{tg} qH}{qH}-1\right], \tag{7}$$

— dla kąta nachylenia wzajemnego obu podstaw sprężyny

$$\psi = \frac{M_0}{P_z}\,\frac{q\operatorname{tg} qH}{1+P_z/\beta}+\frac{P_y}{P_z}\left(\frac{1}{\cos qH}-1\right), \tag{8}$$

gdzie:

$$q = \sqrt{\frac{P_z}{\alpha}\left(1+\frac{P_z}{\beta}\right)},$$

$$\alpha = \frac{2EI_1H}{n_0 n D_0\left(1+2\varkappa\,\frac{m+1}{m}\,\frac{I_1}{I_0}\right)}; \quad \beta = \frac{8EI_2H}{n_0 n D_0^3}. \tag{9}$$

Należy przy tym zwrócić uwagę na to, że kąt stycznej do linii ugięcia jest sumą kąta wynikającego z działania momentu i kąta powstałego na skutek działania sił poprzecznych. Pierwszy składnik jest równoznaczny z kątem nachylenia przekroju poprzecznego. Wobec tego wielkość wyrażona wzorem (8) nie wyznacza lini ugięcia sprężyny. W szczególnym przypadku dla $\psi = 0$ przy momencie

$$M_0 = -\frac{P_y}{P_z}\left(1+\frac{P_z}{\beta}\right)\operatorname{tg}\frac{qH}{2}, \tag{10}$$

strzałka ugięca przedstawia się następująco:

$$f_y = \frac{P_y}{P_z}\left[\frac{2}{q}\left(1+\frac{P_z}{\beta}\right)\operatorname{tg}\frac{qH}{2}-H\right], \tag{11}$$

gdzie:

$$\beta = 0{,}324\,\frac{Hd^4G}{nD^3}$$

$$\alpha = 0{,}0352\,\frac{Hd^4G}{nD}. \tag{12}$$

Identyczną zależność podaje wspomniany już S. Gross w swej nowszej pracy [8].

Sztywność poprzeczna w tym przypadku przyjmuje następującą postać:

$$k_y = \frac{P_z}{\frac{2}{q}\left(1+\frac{P_z}{\beta}\right)\operatorname{tg}\frac{qH}{2}-H}. \tag{13}$$

S. P. Timoszenko wyznaczył poprzeczną strzałkę ugięcia oraz kąt obrotu górnej podstawy sprężyny, sprawdzając cylindryczną sprężynę śrubową do pręta o długości równej wysokości obciążonej sprężyny i sztywności przekroju η razy mniejszej niż sztywność na zginanie drutu sprężyny. Punkt wyjścia stanowiło przybliżone równanie różniczkowe linii ugięcia pręta przy pominięciu sił poprzecznych w przekrojach:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{\eta}{EI}M(z). \tag{14}$$

Ostatecznie odpowiednie zależności przedstawiają się następująco:

$$f_y = \frac{\eta H^2}{6EI}(2P_yH+3M_0),$$

$$\psi = \frac{\eta H}{2EI}(P_yH+2M_0). \tag{15}$$

W przypadku równoległego przemieszczenia względnego obu podstaw sprężyn gdy $\psi = 0$ i moment giętny

$$M_0 = -\frac{1}{2} P_y H, \qquad (16)$$

strzałka ugięcia przedstawia się następująco:

$$f_y = \frac{\eta H^3}{12EI} P_y. \qquad (17)$$

Uzyskane przez Timoszenkę zależności w przeciwieństwie do poprzednich metod nie uwzględniają bezpośrednio ani średnicy sprężyny ani też ilości zwojów.

W. E. Burdick, F. S. Chaplin, W. L. Sheppard [2] podali następujące zależności na strzałkę ugięcia poprzecznego oraz kąt obrotu skrajnych zwojów sprężyny:

$$f_y = nRH\pi\left(\frac{1}{3} P_y H + \frac{1}{2} M_0\right)\left(\frac{1}{EI} - \frac{1}{GI_0}\right) + \frac{\pi R^3 n}{EI} P_y,$$
$$\psi = nR\pi\left(\frac{1}{2} P_y H + M_0\right)\left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GI_0}\right). \qquad (18)$$

Przy wyprowadzeniu powyższych zależności, korzystając z równań równowagi pominięto moment gnący $P_z \cdot f_y$. Wpływ działania siły poosiowej został więc uwzględniony jedynie pod postacią wymiaru oznaczającego wysokość sprężyny obciążonej. W ten sposób sprężyny o różnych obciążeniach siłami poosiowymi, ale o jednakowych wysokościach, podlegałyby identycznym odkształceniom.

Przyjmując $\psi = 0$, co nastąpi gdy moment giętny $M_0 = -\frac{1}{2} P_y H$ otrzymamy następującą zależność wyrażającą strzałkę ugięcia:

$$f_y = nR\pi P_y\left[\frac{H^2}{12}\left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GI_0}\right) + \frac{R^2}{EI}\right]. \qquad (19)$$

Sztywność poprzeczna po wprowadzeniu wymiarów sprężyny przedstawia się następująco:

$$k_y = \frac{3Ed^4}{8Dn\,[H^2(\mu+2)+3D^2]}, \qquad (20)$$

gdzie

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1.$$

A. M. Wahl [18] sztywność poprzeczną sprężyny, w której skrajne zwoje nie przemieszczają się kątowo, formułuje następująco:

$$k_y = \frac{d^4\,10^6}{nD\,(0{,}204\,H^2 + 0{,}264\,D^2)\,C_1}, \quad \left[\frac{\mathrm{Lb}}{\mathrm{in}}\right] \qquad (21)$$

gdzie

$$C_1 = \frac{1}{1 - P_z/P_{cr}}; \quad P_{cr} = C_b H C_z \qquad (22)$$

C_b — bezwymiarowy współczynnik zależny od stosunku H_0/R zestawiony w tabeli 1:

H, H_0, R, D, d — wymiary konstrukcyjne sprężyny wyrażone w calach

C_z — sztywność poosiowa sprężyny wyrażona w $\left[\frac{\mathrm{funt}}{\mathrm{cal}}\right]$ lub w $\left[\frac{\mathrm{kG}}{\mathrm{cal}}\right]$ zależnie od wymiaru siły P_z.

TABELA 1.

Współczynnik C_b do wzoru 22

H_0/R	3	4	5	6	7	8	9	10
C_b	0,69	0,63	0,53	0,39	0,28	0,20	0,14	0,11

W. Ker Wilson [19] wyznaczył stosunek sztywności poprzecznej do poosiowej:

$$\frac{k_y}{k_z} = 3{,}5\,\frac{K}{1{,}3 + \left(\frac{H}{D}\right)^2}. \qquad (23)$$

gdzie K jest współczynnikiem zależnym od strzałki poosiowego ugięcia f_z. Dla sprężyny z końcami zamocowanymi, dla których $\frac{H_0}{D} \leqslant 6$ współczynnik K wyraża zależność:

$$K = 1 - \frac{1{,}42\,f_z}{H_0}. \qquad (24)$$

Norma brytyjska (British Standards 1726, cz. 1. 1964) podaje zależność opartą na wzorach podanych przez Haringx'a:

$$k_y = \frac{P_z}{\frac{2}{\varkappa}\left(1 + \frac{P}{V}\right)^2 \mathrm{tg}\,\frac{\varkappa}{2} - \frac{H}{2} H}, \quad \left[\frac{\mathrm{kG}}{\mathrm{cal}}\right] \qquad (25)$$

gdzie

$$\varkappa = \sqrt{\frac{P_z}{U}\left(1 + \frac{P_z}{V}\right)},$$
$$U = 0{,}283\,C_z D^2 H \qquad (26)$$
$$V = 2{,}61\,C_z H,$$

przy czym C_z oznacza sztywność poosiową sprężyny $\left[\frac{\mathrm{kG}}{\mathrm{cal}}\right]$.

W tabeli 2 zestawiono znane zależności dotyczące charakterystyk sprężyn w ich pracy poprzecznej. Wyniki obliczeń porównawczych według poszczególnych metod dla sprężyn węzła przyosiowego w wózku KWZ-CNII — konstrukcji radzieckiej i dla sprężyn usprężynowania drugiego stopnia wózka lokomotywy elektrycznej E3173 prod. angielskiej oraz dla sprężyn modelowych zestawiono w tabeli 3. Wykorzystano w niej wyniki przedstawione w pracach [5], [11].

Daje się zauważyć duża rozbieżność uzyskanych wyników, przy czym największe wartości poprzecznych sztywności sprężyn uzyskuje się stosując metody Timoszenki, MPS oraz Burdick'a. Stosunkowo zbieżne wyniki zapewniają metody Grossa, Haringx'a oraz BS 1726, które ponadto potwierdzają się w badaniach eksperymentalnych.

W teorii zawieszeń pojazdów szynowych rozważania dotyczące ich dynamiki wymagają wyznaczania energii potencjalnej odkształcanych poprzecznie sprężyn. W pracach [4] i [13] stosując zasadę superpozycji wyznaczono ją jako sumę energii odkształcenia czysto poprzecznego (przyp. 3.2. na rys. 1) i odkształcenia kątowego (przyp 3.1. na rys. 1):

$$V_s = \frac{1}{2} \lambda \psi^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 \qquad (27)$$

nie uwzględniając wpływu sił poprzecznych, a więc odkształcenia postaciowego. Zasada superpozycji, jak łatwo wykazać, nie jest jednak w tym przypadku słuszna i daje niejednoznaczne wyniki.

W pracy [15] korzystano z następującej zależności:

$$V_s = \frac{2\,EI}{\eta\,H^3}\,(3\,y^2 + \psi^2 H \pm 3\,Hy\,\psi), \qquad (28)$$

która pod względem postaci jest poprawna, ale która również nie uwzględnia energii odkształcenia postaciowego. Z punktu widzenia teoretycznej podstawy jest ona zbieżna ze związkami na poprzeczne odkształcenia sprężyn, uzyskanymi przez S. P. Timoszenkę [15].

W świetle przedstawionych wyżej metod wyznaczania poprzecznych ugięć sprężyn śrubowych należałoby energię potencjalną określić dokładniej uwzględniając dodatkowe ugięcie linii środkowej sprężyny pod wpływem odkształcenia postaciowego.

Ogólna analiza poprzecznej pracy sprężyny dla płaskiego stanu obciążeń i odkształceń.

Sprężyna śrubowa walcowa stanowi przestrzennie zakrzywiony pręt. Jak w większości prac, przyjmiemy do rozważań zamiast sprężyny belkę zastępczą o długości równej wysokości sprężyny oraz o odpowiednich sztywnościach. Sprężyna pracująca poprzecznie posiada szereg

TABELA 2. **Zależności dotyczące charakterystyk sprężyn**

	Poprzeczna strzałka ugięcia dla przypadku ogólnego	Kąt ugięcia czołowego zwoju ψ: kąt linii ugięcia Θ swobodnego końca	Poprzeczna sztywność	Współczynniki pomocnicze	Uwagi
S. GROSS [6] [7]			$k_y = \dfrac{1}{\dfrac{1}{P_z}\left(\dfrac{2}{\varkappa}\operatorname{tg}\dfrac{\varkappa H}{2} - H\right) + \dfrac{H}{S}}$	$\varkappa = \sqrt{\dfrac{P_z}{B(1-P_z/S)}}$; $S = 33600\dfrac{Hd^4}{nR^3}$; $B = 14600\dfrac{Hd^4}{nR}$; $H = H_o - f_z$,	
MPS [14]			$k_y = \dfrac{1}{\dfrac{1}{P_z}\left(\dfrac{2}{\varkappa}\operatorname{tg}\dfrac{\varkappa H}{2} - H\right) + \dfrac{H}{S}}$	$\varkappa = \sqrt{\dfrac{P_z}{B(1-P_z/S)}}$; $H = H_o - d - f_z$; $B = \dfrac{EI}{\eta}$; $S = \dfrac{8EI \operatorname{tg}\alpha}{D^2}$; $\eta = \dfrac{2+\mu\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}$,	
J. A. HARINGX [9]	$f_y = \dfrac{M_o}{P_z}\left(\dfrac{1}{\cos qH} - 1\right) + \dfrac{P_y}{P_z}\left[\left(1+\dfrac{P_z}{\beta}\right)\dfrac{\operatorname{tg} qH}{q} - H\right]$	$\psi_o = \dfrac{M_o}{P_z} - \dfrac{q \operatorname{tg} qH}{1+\dfrac{P_z}{\beta}} + \dfrac{P_y}{P_z}\left(\dfrac{1}{\cos qH} - 1\right)$ $\Theta_o = \dfrac{P_y}{P_z}\left[\left(1+\dfrac{P_z}{\beta}\right)\dfrac{1}{\cos qH} - 1\right] + \dfrac{M_o}{P_z} q \operatorname{tg} qH$	$k_y = \dfrac{P_z}{\dfrac{2}{q}\left(1+\dfrac{P_z}{\beta}\right)\operatorname{tg}\dfrac{qH}{2} - H}$	$q = \sqrt{\dfrac{P_z}{\alpha}(1+P_z/\beta)}$; $\beta = \dfrac{8EI_2 H}{\pi n_0 D_0^3} = 0{,}324\dfrac{Hd^4G}{nD^3}$ $\alpha = \dfrac{2EI_1 H}{n_o \pi D\left(1+2\varkappa\dfrac{m+1}{m}\cdot\dfrac{I_1}{I_o}\right)} = 0{,}0352\dfrac{Hd^4G}{nD}$	
S. TIMOSZENKO	$f_y = \dfrac{\eta H^2}{6EI}(2P_y H + 3M_o)$	$\psi = \dfrac{\eta H}{2EI}(P_y H + 2M_o)$	$k_y = \dfrac{12\,EI}{\eta H^3}$	$\eta = \dfrac{2+\mu\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}$; $\mu = \dfrac{E}{2G} - 1$	Nie uwzgl. wpływu sił poprzecznych i obciążenia poosiowego P_z
W. E. BURDICK [2]	$f_y = \pi RHn\left(\dfrac{1}{3}P_y H + \dfrac{1}{2}M_o\right)\left(\dfrac{1}{EI} + \dfrac{1}{GI_o}\right) + \dfrac{\pi R^3 n}{EI}P_y$	$\psi = \pi Rn\left(\dfrac{1}{2}P_y H + M_o\right)\left(\dfrac{1}{EI} + \dfrac{1}{GI_o}\right)$	$k_y = \dfrac{3E\,d^4}{8D\,n\,[H^2(\mu+2)+3D^2]}$	$\mu = \dfrac{E}{2G} - 1$	Nie uwzgl. obciążenia poosiowego P_z
A. M. WAHL [18]			$k_y = \dfrac{10^6\,d^4}{nD\,(0{,}204\,H^2 + 0{,}264\,D^2)\,C_1}$	$C_1 = \dfrac{1}{1-P_z/P_{cr}}$; $P_{cr} = C_b \cdot C_z \cdot H$ C_b — Tabl. 1	H, D, d — [cal] C_z — $\left[\dfrac{\text{kG}}{\text{cal}}\right]$ dla P_z — [kG] k_y — $\left[\dfrac{\text{lb}}{\text{cal}}\right]$
KER WILSON [19]			$k_y = 3{,}5\,k_z\dfrac{K}{1{,}3+\left(\dfrac{H}{D}\right)^2}$	$K = 1 - \dfrac{1{,}42\cdot f_z}{H_o}$	Słuszne dla warunku $H_d/D \leqslant 6$
BS 1726			$k_y = \dfrac{P_z}{\dfrac{2}{\varkappa}\left(1+\dfrac{P_z}{V}\right)\operatorname{tg}\dfrac{\varkappa H}{2} - H}$	$\varkappa = \sqrt{\dfrac{P_z}{U}\left(1+\dfrac{P_z}{V}\right)}$; $V = 2{,}61\cdot C_z H$; $U = 0{,}283\,C_z\,D^2 H$	H, D — [cal] ; P_z — [kG] k_y — $\left[\dfrac{\text{kG}}{\text{cal}}\right]$; C_z — $\left[\dfrac{\text{kG}}{\text{cal}}\right]$

TABELA 3.
Wyniki obliczeń porównawczych sprężyn wg przedstawionych metod

Charakterystyka sprężyny	Wózek CNII sprężyna zewnętrzna	Wózek CNII sprężyna wewnętrzna	Lokomotywa E 3173	sprężyny modelowe 1	sprężyny modelowe 2
Średnica podziałowa D [cm]	19,6	12,4	18,542	6,2	3,67
Średnica drutu d [cm]	3,6	1,6	4,174	0,7	0,6
Wysokość swobodna H_o [cm]	26,6	17,7	67,945	7,551	7,636
Liczba zwojów czynnych n	3,9	3,9	10,5	5	6,25
Kąt pochylenia zwojów α	5°28′	6°50′	5°54′	4°42′	6°12′
Obciążenie pionowe P_z [kG]	2750	450	4033	28,4	76,25
Sztywność poosiowa C_z $\left[\frac{kG}{cm}\right]$	571,9	88,1	424,53	20,15	41,95
Strzałka ugięcia pod obc $P_z - f_z$ [cm]	4,808	5,111	9,525	1,41	1,815
Wys. sprężyny obciążonej $H = H_o - f_z$	21,792	12,589	58,42	6,141	5,821
Współczynnik Poissona μ	0,3125	0,3125	0,3125	0,3125	0,3125
$\eta = \frac{2+\mu\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}$	12,131	11,045	11,125	14,088	10,689
Autor metody	**Sztywność poprzeczna k_y $\left[\frac{kG}{cm}\right]$**				
MPS	1065	192	76,65	46,2	42,4
W. E. Burdick	902,3	144,4	137,6	30,2	37,0
S. P. Timoszenko	1641	553,1	169,2	91,0	76,0
J. A. Haringx	784	114,4	56,4	26,6	24,0
S. Gross	854,6	127,7	63,5	28,6	27,6
A. M. Wahl	650	80,0	54,3	20,4	18,7
W. Ker Wilson	651,3	81,3	106	22,7	25,0
B. S. 1726	793,3	115,8	50,5	—	—
Pomiar eksperyment.	—	—	53,65	ok. 28,0	ok. 26,9

właściwości różniących ją od pręta prostego. W sprężynie znaczną rolę odgrywają odkształcenia postaciowe wywołane siłami poprzecznymi. Siły te powodują zginanie i skręcanie drutu sprężyny. Znaczny jest również wpływ obciążenia poosiowego.

Sztywność zastępczego pręta na zginanie wyznaczyć można rozpatrując czyste zginanie sprężyny obciążonej momentem M (rys. 2). Kąt ugięcia czołowego zwoju sprężyny wyznaczymy przy użyciu całki Mohra

$$\vartheta = n \int_0^{2\pi} \left[\frac{M_s \cdot M_s'}{G I_0} + \frac{M_g \cdot M_g'}{EI} \right] ds, \qquad (29)$$

gdzie:

$M_s = M \cos\gamma$, $M_g = M \sin\gamma$

$M_s' = \cos\gamma$, $M_g' = \sin\gamma$ (dla jednostkowego momentu $M = 1$)

I_o, I — momenty bezwładności (biegunowy i osiowy) przekroju drutu.

Jeżeli uwzględnimy $ds = \frac{1}{2} D\,d\gamma$ to otrzymamy

$$\vartheta = \frac{\pi D n}{2} M \left(\frac{1}{G I_0} + \frac{1}{EI} \right). \qquad (30)$$

Dla pręta zastępczego mamy odpowiednio

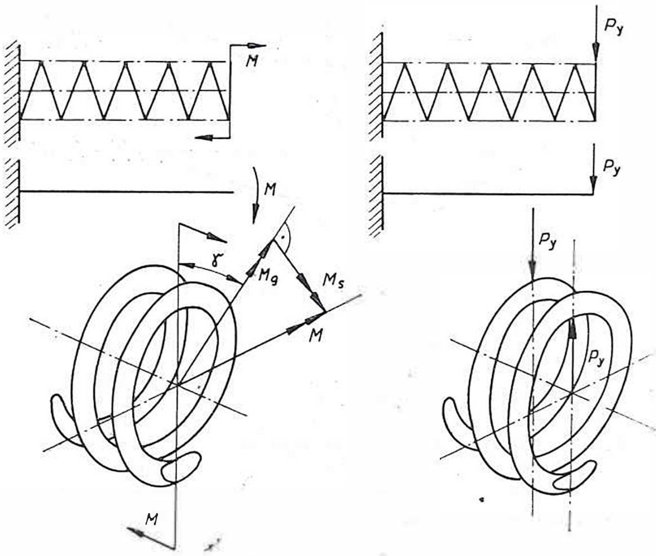
$$\vartheta_p = \frac{MH}{E I_p}. \qquad (31)$$

Porównanie powyższych obu zależności prowadzi do następującego wyniku na sztywność pręta zastępczego:

$$B = \frac{2\,HEI}{\pi D n \left(1 + \frac{EI}{G I_0}\right)} = \frac{HE\,d^4}{32\,Dn(\mu+2)} \qquad (32)$$

Druga część wzoru odnosi się do przekroju kołowego drutu sprężyny.

Sztywność pręta zastępczego na ścinanie (rys. 2) otrzymamy porównując ugięcie końca sprężyny od siły poprzecznej P_y, w tym zakresie w jakim wywołuje ona



Rys. 2. Elementarne rodzaje poprzecznej pracy sprężyny sprowadzonej do pręta.

równoległe przemieszczenia zwojów z przemieszczeniem powierzchni czołowej pręta zastępczego wywołanym odkształceniem postaciowym.

Przy obciążeniu sprężyny siłą P_y w przekrojach zwoju działa moment zginający drut:

$$M = \frac{1}{2} D P_y \sin\gamma. \qquad (33)$$

Przemieszczenie końca sprężyny będące sumą odkształceń poszczególnych zwojów pod działaniem na drut momentu (33) wyznaczymy z całki Mohra:

$$\delta = n \int_0^{2\pi} \frac{MM'}{EI} ds, \qquad (34)$$

gdzie:

$M = \frac{1}{2} D P_y \sin\gamma$

$M' = \frac{1}{2} D \sin\gamma$ (dla jednostkowej siły $P_y = 1$)

$ds = \frac{1}{2} D\,d\gamma$.

Stąd

$$\delta = \frac{\pi n D^3}{8\,EI} P_y. \qquad (35)$$

Przemieszczenie powierzchni czołowej pręta zastępczego spowodowane odkształceniem postaciowym wyraża następująca zależność:

$$\delta_p = \frac{KH}{G F_p} P_y, \qquad (36)$$

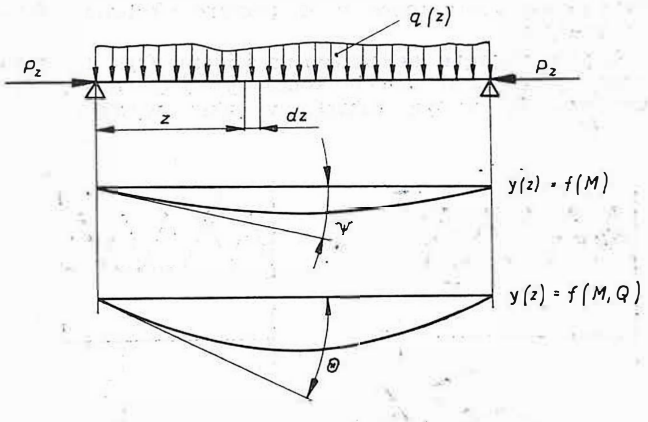
gdzie K jest współczynnikiem zależnym od kształtu i wymiarów przekroju przy czym dla przekroju kołowego $K \cong 1$.

Z porównania zależności (35) i (36) wynika sztywność pręta zastępczego na ścinanie:

$$S = \frac{8\,HEI}{\pi n D^3} = \frac{GHd^4(\mu+1)}{4\,n\,D^3} \qquad (37)$$

Tak więc do analizy poprzecznej pracy sprężyny śrubowej przyjmiemy belkę zastępczą o długości H równej wysokości sprężyny pod obciążeniem poosiowym P_z oraz sztywnościach na zginanie B i ścinanie S, określonych wzorami (30) i (35).

Rozpatrzymy przypadek poosiowo — poprzecznego zginania belki zastępczej (rys. 3) podpartej. Wyznaczając linię ugięcia belki uwzględnimy wpływ sił poprzecznych.



Rys. 3. Układ belki zastępczej.

W dowolnym przekroju pręta działają: siła poprzeczna Q_0 wynikająca z przyłożenia obciążenia zewnętrznego, moment gnący M oraz siła normalna. Pod wpływem obciążenia zewnętrznego belka doznaje odkształcenia kątowego, które jest sumą odkształceń kątowych wynikających z działania w przekrojach belki momentu gnącego M i siły poprzecznej Q.

$$\Theta = \psi + \varphi = \frac{dy}{dz}, \tag{38}$$

gdzie:

ψ — kąt ugięcia belki wywołanego działaniem momentu gnącego określony zależnością:

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{M(z)}{B} \tag{39}$$

φ — kąt ugięcia belki wywołanego działaniem w przekrojach siły poprzecznej Q określony zależnością

$$\varphi = \frac{Q}{S}. \tag{40}$$

Na rysunku 4 przedstawiono element dz odkształconego pręta. W pierwszym przypadku (rys. 4a) ugięcie belki wywołane jest działaniem momentu gnącego, w drugim (rys. 4b) ten sam element dodatkowo odkształca się pod wpływem sił poprzecznych.

Równania równowagi elementu zapiszemy następująco:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dQ_0}{dz} - q(z) = 0, \\ &Q_0 + P_z\frac{dy}{dz} + \frac{dM}{dz} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Siła poprzeczna w przekroju A'B'

$$Q = Q_0 + P_z\psi$$

uwzględniona w zależności (40) a następnie w (38) pozwala na uzyskanie następującego wzoru wyrażającego całkowity kąt obrotu stycznej do linii ugięcia Θ:

$$\Theta = \frac{dy}{dz} = \psi + \varphi = \left(1 + \frac{P_z}{S}\right)\psi + \frac{Q_0}{S} \tag{42}$$

Stąd otrzymamy:

$$Q_0 = S\frac{dy}{dz} - S\left(1 + \frac{P_z}{S}\right)\psi \tag{43}$$

Wykorzystując tę ostatnią zależność w pierwszym równaniu układu (41) otrzymamy równanie różniczkowe linii ugięcia belki następującej postaci:

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{q(z)}{S} = \left(1 + \frac{P_z}{S}\right)\frac{d\psi}{dz}$$

albo wykorzystując (42):

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{g(z)}{S} = \left(1 + \frac{P_z}{S}\right)\frac{M(z)}{B} \tag{44}$$

Rozpatrzmy przypadek sprężyny na jednym końcu utwierdzonej, na drugim obciążonej siłą poosiową P_z, siłą boczną P_y oraz momentem gnącym M_0. Na rysunku 5 przedstawiono dwa położenia linii ugięcia sprężyny: pierwsze z uwzględnieniem działania momentu gnącego w przekrojach, drugie z uwzględnieniem momentu gnącego i sił poprzecznych.

Moment gnący w dowolnym przekroju może być wyrażony następująco:

$$M = M_0 + P_z(y_0 - y) + P_y(H - z). \tag{45}$$

Wobec tego równanie różniczkowe linii ugięcia na podstawie (44) po odpowiednich przekształceniach zapiszemy następująco:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + k^2 \cdot y_0 = \frac{1}{B}\left(1 + \frac{P_z}{S}\right)(M_0 + P_z y_0 + P_y H - P_y \cdot z), \tag{46}$$

gdzie:

$$k = \sqrt{\frac{P_z}{B}\left(1 + \frac{P_z}{S}\right)}. \tag{47}$$

Uwzględniając następujące warunki brzegowe dla $z = 0$:

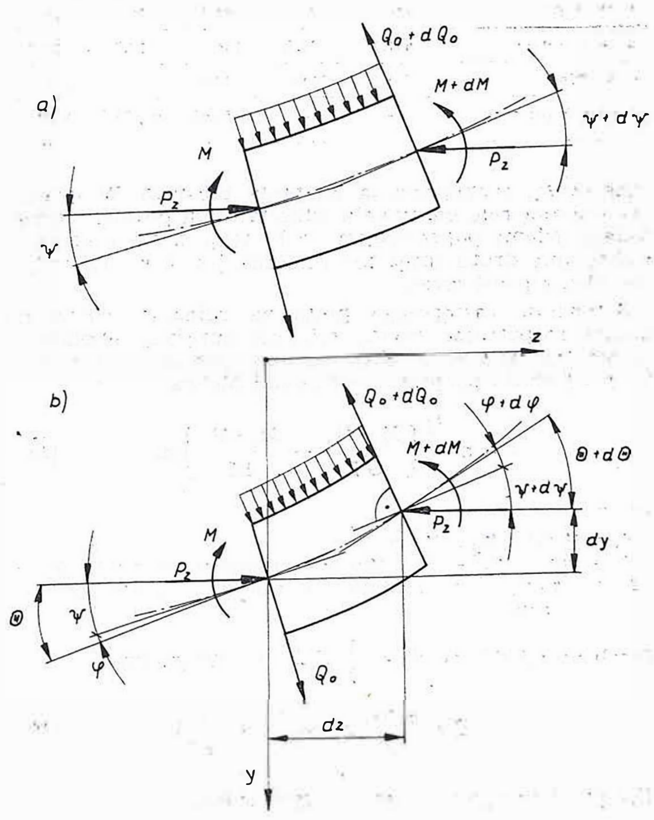
$$y = 0, \quad \Theta = \frac{dy}{dz} = \frac{P_y}{S},$$

otrzymamy rozwiązanie równania (46):

$$y = \frac{P_y}{kP_z}\left(1 + \frac{P_z}{S}\right)\sin kz - \frac{1}{P_z}(M_0 + P_z y_0 + P_y H)\cos kz + \\ + \frac{1}{P_z}(M_0 + P_z y_0 + P_y H_0 - P_y z), \tag{48}$$

Stąd ugięcie swobodnego końca oraz odpowiednie kąty obrotu stycznej do linii ugięcia i płaszczyzny skrajnego zwoju wyrażają się następująco:

$$y_0 = \frac{P_y}{P_z}H\left[\left(1 + \frac{P_z}{S}\right)\frac{\operatorname{tg} kH}{kH} - 1\right] + \frac{M_0}{P_z}\left(\frac{1}{\cos kH} - 1\right), \tag{49}$$

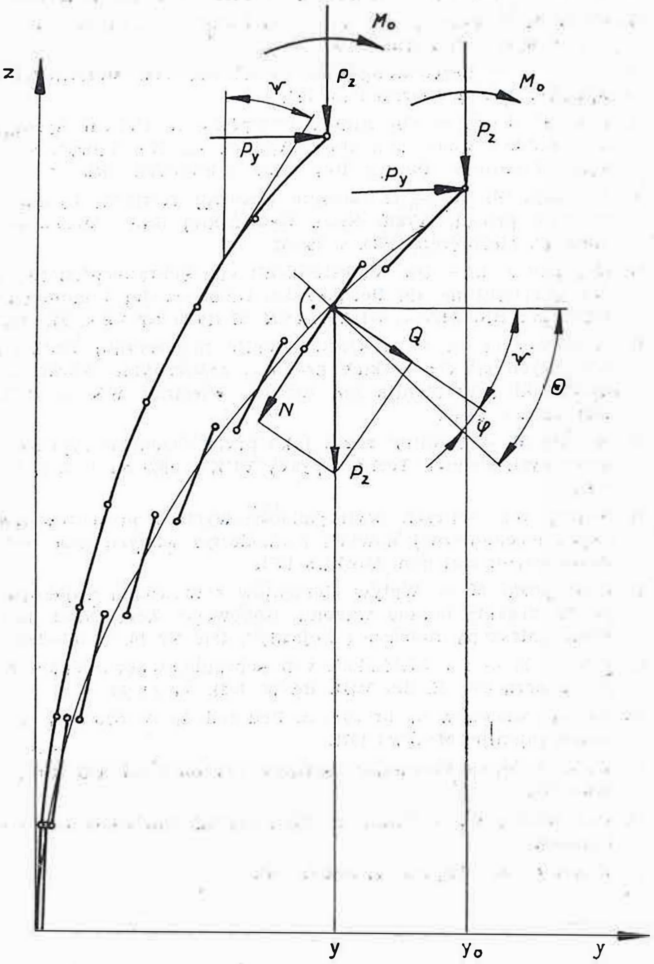


Rys. 4. Elementarny fragment zastępczej belki odkształconej przez działanie a — tylko momentu gnącego, b — momentu gnącego i sił poprzecznych.

$$\Theta = \frac{P_y}{P_z}\left[\left(1+\frac{P_z}{S}\right)\frac{1}{\cos kH}-1\right]+\frac{M_0}{P_z}\,k\,\mathrm{tg}\,kH, \tag{50}$$

$$\psi_0 = \frac{P_y}{P_z}\left(\frac{1}{\cos kH}-1\right)+\frac{M_0}{P_z}\,\frac{k}{1+\frac{P_z}{S}}\,\mathrm{tg}\,kH. \tag{51}$$

Uzyskane zależności są zgodne w swej postaci z wynikami przedstawionymi przez Haringx'a [8].



Rys 5. Linie ugięcia sprężyny — bez i z uwzględnieniem odkształcenia od wewnętrznych sił poprzecznych.

W analizie dynamicznej układów zawierających sprężyny śrubowe podlegające poprzecznym odkształceniom (np. zawieszenie nadwozi pojazdów szynowych) konieczna jest znajomość energii potencjalnej. Można ją wyznaczyć jako sumę energii odkształcenia objętościowego i odkształcenia postaciowego elementu dz rozpatrywanego pręta.

Jednak w przypadku znajomości odkształceń badanego pręta prościej wyznaczyć energię potencjalną obliczając pracę sił zewnętrznych zgodnie z wzorem

$$L_p = V_s = \frac{1}{2}P_y y_0 + \frac{1}{2}M_0\psi_0. \tag{52}$$

Wykorzystując zależność (49) i (51) otrzymamy więc następujący wzór:

$$V_s = \frac{H}{2P_z}\left[\left(1+\frac{P_z}{S}\right)\frac{\mathrm{tg}\,kH}{kH}-1\right]P_y^2+\frac{1}{P_z}\left(\frac{1}{\cos kH}-1\right)P_y M_0 + \frac{k\,\mathrm{tg}\,kH}{2P_z\left(1+\frac{P_z}{S}\right)}M_0^2, \tag{53}$$

Przy wprowadzeniu równań ruchu konieczna jest znajomość energii potencjalnej w funkcji względnych przemieszczeń obu końców sprężyny. Przemieszczenia te są zwykle współrzędnymi uogólnionymi lub pomocniczymi w opisie drgań badanego układu.

Wykorzystując odpowiednie wzory (49) i (51) można uzyskać odwrócone zależności sił zewnętrznych od względnych przemieszczeń y_0 i ψ_0:

$$\begin{aligned} M_0 &= b_{11}\psi_0 + b_{12}y_0,\\ P_y &= b_{21}\psi_0 + b_{22}y_0, \end{aligned} \tag{54}$$

gdzie:

$$b_{11} = -P_z\sqrt{\frac{B}{P_z}\left(1+\frac{P_z}{S}\right)\mathrm{tg}\,\frac{kH}{2}}\times \frac{\left[H-\sqrt{\frac{B}{P_z}\left(1+\frac{P_z}{S}\right)\mathrm{tg}\,kH}\right]\cos kH}{\left[2\sqrt{\frac{B}{P_z}\left(1+\frac{P_z}{S}\right)\mathrm{tg}\,\frac{kH}{2}}-H\right](1-\cos kH)}, \tag{55}$$

$$b_{12} = b_{21} = \frac{-P_z\sqrt{\frac{B}{P_z}\left(1+\frac{P_z}{S}\right)\mathrm{tg}\,\frac{kH}{2}}}{2\sqrt{\frac{B}{P_z}\left(1+\frac{P_z}{S}\right)\mathrm{tg}\,\frac{kH}{2}}-H},$$

$$b_{22} = \frac{P_z}{2\sqrt{\frac{B}{P_z}\left(1+\frac{P_z}{S}\right)\mathrm{tg}\,\frac{kH}{2}}-H}.$$

Poszukiwany związek przedstawia się następująco:

$$V_s = \frac{1}{2}\left(b_{22}y_0^2 + 2b_{12}y_0\psi_0 + b_{11}\psi_0^2\right). \tag{56}$$

Zależność (56) w swej postaci jest identyczna jak (28) jednak dodatkowo w sposób bezpośredni uwzględnia działanie siły poosiowej P_z oraz działanie w przekrojach poprzecznych odpowiadających zwojom sprężyny sił poprzecznych. Łatwo przekonać się, że energia potencjalna wyrażona wzorem (56) dla szczególnego przypadku, gdy $\psi_0 = 0$ jest zgodna z wynikiem uzyskanym bezpośrednio z wzoru:

$$V_s = \frac{1}{2}k_y \cdot y_0^2,$$

gdzie k_y jest sztywnością poprzeczną sprężyny obliczoną z zależności (49) i (51) z uwzględnieniem warunku $\psi_0 = 0$.

Można na podstawie badań eksperymentalnych dotyczących ugięć (sztywność) poprzecznych (tabela 3) sądzić, że wzory uwzględniające siły poprzeczne w przekrojach oraz obciążenie zewnętrzne poosiowe w sposób wyżej przedstawiony wyznaczają energię potencjalną poprzecznego odkształcenia sprężyn śrubowych dokładniej niż wzory dotychczasowe stosowane (27), (28).

Zakończenie

Spośród różnych znanych metod wyznaczania poprzecznej sztywności sprężyn śrubowych walcowych (przy braku kątowych względnych przemieszczeń obu podstaw sprężyn), tylko niektóre dają wyniki bliskie rezultatom badań eksperymentalnych. Z tego względu na szczególną uwagę zasługują sposoby podane przez I. A. Haringx'a, S. Grossa oraz wg normy BS 1726. Zasadniczo różniące się od nich wyniki dają obliczenia według sposobów podanych przez S. Timoszenkę, W. E. Burdicka oraz wg normy MPS.

Z pracy [5] wynika, że metoda W. E. Burdicka gwarantuje zgodne z badaniami eksperymentalnymi rezultaty tylko w zakresie małych ugięć poosiowych sprężyny. Dla lepszego wyjaśnienia problemu poprzecznych charakterystyk sprężyn konieczne byłoby przeprowadzenie bardziej gruntownych badań doświadczalnych z lepszą niż dotychczas interpretacją wyników. Wydaje się, że najlepsze uzasadnienie teoretyczne ma sposób obliczenia podany przez J. A. Haringx'a oraz zbliżony do niego według normy BS 1726. Uwzględniają one w sposób bezpośredni obciążenie poosiowe siłą P_z oraz odkształcenie postaciowe jako wynik działania sił poprzecznych. S. Gross, który wcześniej przedstawił własne zależności (6), w ostatniej publikacji powołuje się na wzory Haringx'a [8].

Znacznie skromniejszym materiałem doświadczalnym i teoretycznym dysponujemy w przypadku ogólniejszego charakteru pracy poprzecznej sprężyn śrubowych, gdy sprężyna doznaje przemieszczeń liniowych prostopadłych do swej osi oraz przemieszczeń kątowych obu podstaw. Jeżeli na wolny koniec sprężyny obok siły poosiowej działają jednocześnie dwa możliwe rodzaje obciążenia poprzecznego siła i moment (z wykluczeniem szczególnego przypadku ich wzajemnej relacji gwarantującej $\psi_0 = 0$), to pojęcie sztywności poprzecznej wobec dwojakiego rodzaju odkształceń (poprzeczne liniowe i kątowe) traci swój sens. Ponieważ w praktyce często sprężyny w ten sposób pracują, dlatego pojęcie sztywności poprzecznej w sensie wyżej używanym stanowi przejaw przyjętych uproszczeń. Wyznaczanie ugięcia oraz kątowego przemieszczenia skrajnego zwoju i stycznej do ugięcia sprężyny na jej końcu można dokonywać według zależności (49) — (51), które zostały wyprowadzone przy uwzględnieniu zewnętrznego obciążenia poosiowego oraz sił poprzecznych w przekrojach.

Analiza dynamiczna właściwości zawieszeń sprężystych w pojazdach szynowych wymaga wyznaczenia energii potencjalnej odkształcanych poprzecznie sprężyn śrubowych.

Nie jest słuszne stosowanie do tego celu zależności w postaci (27), która określa energię potencjalną w sposób niejednoznaczny; zależny od tego, względem której podstawy sprężyny wyznacza się przemieszczenia. Zależność (28) jest poprawna w sensie jakościowym, ale jak na to wskazują odchylenia wyników badań eksperymentalnych od wyników obliczeń na podstawie zależności podanych przez S. Timoszenkę, może ona dawać ilościowo błędne rezultaty. Dlatego celowe jest posługiwanie się wzorami (55) i (56) zgodnymi w swej teoretycznej podstawie z zależnościami (49) — (51) dotyczącymi odkształceń.

Nie ulega wątpliwości, że dla pełnego wyjaśnienia problemu poprzecznej pracy cylindrycznych sprężyn śrubowych konieczne jest przeprowadzenie dalszych badań eksperymentalnych według programu uwzględniającego większy zakres parametrów konstrukcyjnych sprężyn oraz ogólniejsze przypadki ich obciążenia.

Literatura

1. *Bielajew M. M.* — Wytrzymałość materiałów. Wyd. MON. 1956.
2. *Burdick W. E., Chaplin F. S., Sheppard W. L.* — Deflection of Helical Springs Under Transverse Loadings. Wire and Wire products. 1939 Nr 4.
3. *Delam H.* — Zylindrische Schraubenfedern mit Kreisquerschnitt, Quersteife, Knicksicherheit, zusatzliche Spannungen durch Querkraft. VDI-Z. 104 (1962) Nr 18. s. 825—827.
4. *Doronin*: — Wlijanije elementów centralnowo podwiesziwanija na bokowyje kolebanija passażirskowo wagona. Wiestnik WNIIŻT. 1964 Nr 3 s. 13—16.
5. *Garbuzow H. M., Filczenkow W. I.* — Rasczet poperecznoj żestkosti wintowych cilindriczeskich prużin ressornowo podwiesziwanija wagona. Tr. LIIŻT „Dinamika Wagonow". wyp. 255. s. 150—159.
6. *Gross S., Lenk E.* — Die Federn — VDI — Verlag. Berlin 1938.
7. *Gross S.* — Berechnung und Gestaltung der Federn. Verlag von J. Springer. Berlin 1939.
8. *Gross S.* — Berechnung und Gestaltung von Metallfedern. Springer Verlag. Berlin i in. 1960.
9. *Haringx J. A.* — On Highly Compressible Helical Springs and Rubber Rods, and their Application for Vibration — Free Mountings. Philips Res. Lab. Eindhoven 1950.
10. *Hwingija M. W.* — O rasczete bokowoj żestkosti cylindriczeskich prużin. Akad. Nauk Gruzińskiej SSR „Mechanika Maszin". Mecniereba 1970. s. 29—32.
11. *Koffman J. L.* — Die Rückstellkraft von Schraubenfedern in der Querrichtung am Beispiel des Umbaues der Lokomotive E 3173 der BR. ZEV — GLAS. ANN. 97 (1973) Nr 7.8 s. 257—261.
12. *Korotkiewicz O. P.* — Opriedielenije poperecznoj żestkosti wintowych cilindriczeskich prużin s razlicznymi usłowijami ustanowki i kreplenija ich torcow. Wiestnik WN — IIŻT 1974 Nr 1. s. 36—39.
13. *Mohyla M.* — Dvojitý' zěvás jako prvek přičného vypruženi kolejových vozidel. Techn. Zprávy VUKV. 1969 Nr 1—2. s. 1÷÷13.
14. Normy dla obliczeń wytrzymałościowych i projektowania części mechanicznej nowych i zmodernizowanych kolei MK ZSRR na tor 1524 mm. Moskwa 1971.
15. *Ofierzyński M* — Wpływ elementów zawieszenia bujakowego na drgania boczne wagonu osobowego. Zesz. Nauk Pol. Pozn. „Maszyny Robocze i Pojazdy". 1970 Nr 10, s. 167—188.
16. *Rausch E.* — Die Steifigkeit von Schraubenfedern senkrecht zur Federachse. Z. des VDI. Bd 78. 1934. Nr 12, 32.
17. Rasczet wagonow na procznost. Pod red. Ł. A. Szadura. Maszinostrojenije. Moskwa 1971.
18. *Wahl A. M.* — Mechanical Springs. Penton Publ. CO. Cleveland 1944.
19. *Ker Wilson W.* — Vibration Engineering. Ch. Griffin a. co. Londyn.
20. *Zukowski S.* — Sprężyny PWT. 1955.