

## Zasady nowoczesnej teorii prowadzenia pojazdów przez tor kolejowy<sup>\*)</sup>

Analiza postaci układu dynamicznego pojazd szynowy-tor, który można przyjąć jako układ z więzami holonomicznymi i masami skupionymi o wielu stopniach swobody, wskazuje na dopuszczalność rozprężenia tego układu na dwa podukłady (szczególnie w odniesieniu do nowoczesnych rozwiązań konstrukcyjnych pojazdów):

- podukład ze współrzędnymi uogólnionymi opisującymi ruchy elementów pojazdu w wyniku sił uogólnionych w płaszczyznach stycznych w miejscach styków kół z szynami;
- podukład ze współrzędnymi uogólnionymi opisującymi ruchy elementów pojazdu w wyniku pionowych wymuszeń kinematycznych (i ewentualnie parametrycznych).

Analizę i opis zjawisk zachodzących w pierwszym podukładzie nazywa się często krótko dynamiką poprzeczną pojazdów, zaś w drugim — dynamiką pionową.

W dynamice poprzecznej, zajmującej się analizą wszystkich zjawisk występujących w pierwszym podukładzie, a więc także zjawisk, na które ma wpływ zawieszenie nadwozia (teoria zawieszenia), wyróżnia się tę jej część, która dotyczy analizy bezpośredniego wzajemnego wpływu sił powstających w czasie ruchu w płaszczyznach stycznych w miejscach styków kół z szynami i ruchu części biegowych pojazdu.

Z punktu widzenia projektowania pojazdów, ta część dynamiki poprzecznej ma szczególnie duże znaczenie praktyczne, gdyż wyznaczenie możliwie dokładnych związków analitycznych między parametrami konstrukcyjnymi części biegowych a jakością ruchu tych części i siłami w płaszczyznach stycznych, daje możliwość konstruktorom wpływania na konstrukcję części biegowych pod kątem

widzenia zapewnienia optymalnych warunków prowadzenia pojazdu przez tor kolejowy.

Tę część dynamiki poprzecznej nazywa się teorią (dynamiką) prowadzenia pojazdów przez tor kolejowy.

Procesem prowadzenia pojazdów przez tor kolejowy, na który, jak widzimy, może mieć wpływ konstruktor pojazdu, można nazwać całość wzajemnie powiązanych zjawisk występujących w płaszczyznach stycznych w miejscach styków kół z szynami oraz w częściach biegowych pojazdu, zależnych w dużym stopniu od ich parametrów konstrukcyjnych, wraz ze skutkami tych zjawisk dla ruchu pojazdu wzdłuż toru kolejowego oraz wraz z „mechanizmem” powstawania sił stycznych na bardzo małych powierzchniach styku kół z szynami i zmiennością tych sił w czasie ruchu.

Wpływanie na przebieg procesu prowadzenia przez odpowiednie kształtowanie profilu obręczy kół okazało się bezskuteczne, gdyż jak wiadomo, podstawowym w eksploatacji profilem obręczy jest t.zw. profil ustabilizowany po zużyciu, który kształtuje się samoczynnie, w dość krótkim okresie eksploatacji, niezależnie od kształtu profilu wyjściowego, w wyniku zużywania się powierzchni tocznej przy dopasowywaniu się obręczy do główki szyny.

Siłami prowadzącymi pojazd w torze są siły (nie tylko poprzeczne) reakcji szyn na elementy prowadzące części biegowych, którymi są zestawy kołowe lub zoszczepione z teorią układów dynamicznych — siły uogólnione  $Q_i$ , odpowiadające współrzędnym uogólnionym  $q_i$  opisującym ruchy zestawów kołowych, w równaniach ruchu Lagrange'a w postaci:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i; \quad (1)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ ; gdzie  $n$  — liczba stopni swobody; w których  $T$  i  $U$  — energia kinetyczna i potencjalna układu

<sup>\*)</sup> zgłoszono także jako referat, na Konferencji Naukowej Instytutu Transportu Politechniki Warszawskiej

o masach skupionych z więzami holonomicznymi,  $D$  — funkcja tłumienia układu.

Za kryterium jakości procesu prowadzenia, przy obecnym stanie poznania zjawisk i metod ich analizy matematycznej, uznać należy spełnienie warunków stabilności ruchu części biegowych w świadomości z góry założonym układzie dynamicznym liniowym, lub, jeśli to jest z różnych względów niemożliwe, w układzie nieliniowym, w całym zakresie przewidywanych prędkości jazdy, przy założonym także z góry, określonym zapasie stabilności, uwzględniającym wartości możliwych w praktyce odchyłek montażowych i technologicznych, które mają miejsce w budowie części biegowych pojazdów.

Ponieważ stabilność ruchu części biegowych w układzie liniowym jest stabilnością ruchu prostoliniowego przy najmniejszych z możliwych siłach prowadzących, przeto założenie z góry tego układu jest jak najbardziej celowe przy doborze parametrów konstrukcyjnych części biegowych. Stabilność ruchu w układzie nieliniowym jest stabilnością ruchu okresowego (wężykowanie), charakteryzującego się, w zależności od prędkości jazdy, mniej lub bardziej intensywnym nabieganiem kół na szyny, któremu towarzyszy wzrost wartości sił prowadzących oraz pogorszenie się parametrów ruchowych części biegowych.

Założenie z góry układu dynamicznego jest warunkiem nieodzownym właściwego doboru parametrów konstrukcyjnych części biegowych, gdyż wnioski z analizy obu układów dla rozwiązania konstrukcyjnego są różne.

Zródłem sił prowadzących pojazd w torze są ciągi w czasie ruchu poślizgi kół po szynach oraz ciężar pojazdu.

W analizie względnego poślizgu wypadkowego  $\bar{v}$  w płaszczyźnie stycznej i towarzyszącej mu siły stycznej  $T$ , rozróżnia się dwie składowe tej siły, a mianowicie: składową podłużną  $T_{\xi}$  (w postaci jej stosunku do siły normalnej  $N$ ), czyli

$$\frac{T_{\xi}}{N} = f_1(v_{\xi}, v_{\eta z}, \varphi); \quad (2)$$

oraz składową poprzeczną  $T_{\eta z}$  w płaszczyźnie stycznej:

$$\frac{T_{\eta z}}{N} = f_2(v_{\xi}, v_{\eta z}, \varphi) \quad (3)$$

gdzie:

$v_{\xi}$  i  $v_{\eta z}$  — poślizgi względne suwnie: podłużny i poprzeczny w płaszczyźnie stycznej,

$\varphi$  — względny poślizg wiertny w postaci

$$\varphi_{ij} = \frac{\omega_{ij}}{v} = \pm \frac{1}{r_{ij}} \sin \gamma_{ij}; \quad (4)$$

gdzie:

$\omega_{ij}$  — prędkość kątowa poślizgu wiertnego  $ij$  — tego koła ( $j = 1, 2$ ) i — tego zestawu kołowego,

$r_{ij}$  — promień koła,

$\gamma_{ij}$  — nachylenie płaszczyzny stycznej do poziomu, znak minus dla  $j = 1$ , znak + dla  $j = 2$  (koło lewe), zgodnie z powszechnie przyjmowanym prawoskrętnym układem współrzędnych.

Jak wynika z (4), wpływ poślizgu wiertnego jest tym większy, im większy jest kąt  $\gamma_{ij}$ , przy czym  $\gamma_{ij} = F(\eta_i)$ , gdzie  $F(\eta_i)$  — jest pewną nieliniowo rosnącą funkcją wychylenia poprzecznego zestawu kołowego  $\eta_i$  względem położenia środkowego na torze. Wpływ ten jest skomplikowany i wyraża się przede wszystkim w dość znacznej zmianie składowej  $T_{\eta z}$  w całym przedziale zmienności  $\eta_i$ , natomiast w zmianie składowej  $T_{\xi}$  — tylko przy większych przesuwach  $\eta_i$ . Ponieważ wszystkie poślizgi są zależne od  $\eta_i$ , przeto funkcje (2) i (3) są pewnymi, skomplikowanymi funkcjami nieliniowymi tej współrzędnej.

Oprócz funkcji nieliniowych w wartościach sił stycznych, w opisie matematycznym sił uogólnionych  $Q_i$  występują jeszcze funkcje nieliniowe wielkości geometrycznych charakteryzujących współpracę kół z szynami, a wynikające z kształtu profilu obręczy ustabilizowanego po zużyciu i profilu główki szyny.

Wszystkie te funkcje nieliniowe w siłach uogólnionych, parzyste względnie nieparzyste, są w przypadku ruchu na torze prostym symetryczne, natomiast przy ruchu w krzywiznie toru — niesymetryczne.

Dość istotną cechą charakterystyczną profilu obręczy kół ustabilizowanego po zużyciu, który ma wpływ nie tylko na funkcje wielkości geometrycznych, lecz także na funkcje nieliniowe w wartościach sił stycznych, jest prawie dokładna liniowość w przebiegu obu tych rodzajów funkcji w pewnym ściśle określonym przedziale zmienności przesułów poprzecznych  $\eta_i$  zestawu kołowego, a mianowicie (na torze prostym):

$$-\sigma < \eta_i < +\sigma; \quad (5)$$

gdzie:

$\sigma$  — stanowi ściśle określoną część luzu poprzecznego między obręczami kół a szynami, wynoszącego przeciętnie z obu stron po  $\sigma_{max} = 6,5$  [mm] (według pomiarów ORE-c9) przy położeniu środkowym zestawu kołowego. Względny przesuw poprzeczny  $e_i = \sigma_{max}$  (gdyż na  $\eta_i$  ma jeszcze wpływ odkształcenie poprzeczne szyny) uważa się za maksymalny dopuszczalny w czasie normalnego ruchu ze względu na bezpieczeństwo ruchu ( $\sigma_{max}$  odpowiada kąt  $\gamma = 45^\circ$ ), gdyż po wyczerpaniu tego luzu zestaw kołowy nabiega intensywnie na szynę przy znacznym oddziaływaniu poprzecznym.

Układ liniowy we współpracy kół z szynami jest więc układem, w którym przesuwy poprzeczne zestawów kołowych w czasie ruchu nie przekraczają podanego przedziału (5). Przekroczenie przedziału (5), które ma miejsce w przypadku niezachowania warunku stabilności ruchu w tym układzie, powoduje pojawienie się silnych nieliniowości (szczególnie gwałtowne zmiany następują w wartościach funkcji wielkości geometrycznych) w funkcjach występujących w siłach uogólnionych, które z kolei są przyczyną zmiany jakości ruchu części biegowych pojazdu — ruch prostoliniowy części biegowych, z niestacjonarnymi drganiami tłumionymi w wyniku różnych zaburzeń pochodzących z zewnątrz, w stabilnym układzie liniowym, przekształca się w stabilny w ramach bezpieczeństwa, ruch ustalony okresowy, który jest typowy w danym przypadku dla układu nieliniowego.

Analiza procesu prowadzenia pojazdu przez tor kolejowy w obu układach dynamicznych jest różna i wymaga stosowania innych metod.

Analiza układu liniowego w czasie ruchu na torze prostym sprowadza się do badania równania charakterystycznego tego układu, które formalnie biorąc, jest przyrównanym do zera głównym wyznacznikiem tego układu, przykładowo dla wózka 2-osowego symetrycznego, w postaci następującej:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 & 0 & 0 & D_{26} \\ D_{31} & 0 & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ 0 & 0 & 0 & D_{54} & D_{55} & 0 \\ 0 & D_{62} & 0 & D_{64} & 0 & D_{66} \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

gdzie:  $D_{ij}$  — są określonymi wielomianami operatorowymi operatora  $p = \frac{d}{dt}$ , przekształconymi, dla wygody

obliczeń, do postaci, w których wszystkie parametry są bezwymiarowe. Analiza stabilności ruchu w tym układzie jest stosunkowo prosta przy zastosowaniu znanego kryterium według  $(n-1)$  — tego podwyznacznika układu  $\Delta_{n-1}$ , przekształconego, także dla wygody obliczeń, do postaci trójkątnej.

Dla analizy układu nieliniowego bardzo pożyteczną w danym przypadku okazała się metoda linearyzacji harmonicznej, stosowana dość często przy badaniu nieliniowych układów automatyki. W przypadku nieliniowych funkcji symetrycznych, z jakimi mamy do czynienia w przypadku ruchu na torze prostym, sprowadza się ta metoda do wyznaczenia współczynników wzmocnienia wszystkich funkcji nieliniowych według zależności, wynikających z rozkładu na szereg Fouriera okresowej funkcji nieliniowej, następujących postaci:

$$q_k(A, \omega) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f_k(A \sin \psi; A \omega \cos \psi) \sin \psi \cdot d\psi; \quad (7)$$

$$q'_k(A, \omega) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f_k(A \sin \psi; A \omega \cos \psi) \cos \psi \cdot d\psi;$$

gdzie:

$f_k(\eta_i)$  — funkcja nieliniowa współrzędnej uogólnionej  $\eta_i$ ;  
 $A$  — amplituda rozwiązania okresowego;  $\psi = \omega t$ ;  
 $\omega$  — częstość rozwiązania okresowego, w postaci jego pierwszej harmonicznej:

$$\eta_i = A_i \sin \omega t \quad (8)$$

W wyniku linearyzacji harmonicznej funkcję nieliniową zastępuje się funkcją w postaci:

$$f_k(\eta_i) = q_k(A, \omega) \eta_i + \frac{q'_k(A, \omega)}{\omega} p \eta_i \quad (9)$$

Po wprowadzeniu funkcji (9) do zależności na siły uogólnione, niektóre wielomiany operatorowe w równaniu charakterystycznym układu, zamiast stałych parametrów mają parametry zależne od amplitudy i częstości (w ogólnym przypadku) rozwiązania okresowego (8). Przykładowo dla wózka 3-osowego z prowadzeniem sprężystym osi w ostoї, równanie charakterystyczne układu nieliniowego ma postać:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & D_{15} & 0 & D_{17} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} & D_{27} & D_{28} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{42} & D_{43} & D_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{51} & D_{52} & 0 & 0 & D_{55} & D_{56} & 0 & 0 \\ 0 & D_{62} & 0 & 0 & D_{65} & D_{66} & 0 & 0 \\ D_{71} & D_{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{77} & D_{78} \\ 0 & D_{82} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{87} & D_{88} \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

w której wielomiany operatorowe  $D_{33}, D_{34}, D_{43}, D_{44}, D_{55}, D_{56}, D_{65}, D_{66}, D_{77}, D_{78}, D_{87}, D_{88}$  mają we współczynnikach wielkości zależne od amplitudy  $A$  rozwiązania okresowego (wybrane przykładowo równania charakterystyczne (6) i (10), przytoczone zostały wyżej celem zaznajomienia czytających, w krótkim artykule — przynajmniej z ogólnymi postaciami niektórych układów, z którymi mamy do czynienia przy analizie procesu prowadzenia pojazdów szynowych).

Poszukiwanie rozwiązania okresowego układu nieliniowego, lub inaczej mówiąc, przy danej metodzie układu liniowego znajdującego się na oscylacyjnej granicy stabilności — sprowadza się do wyznaczenia wartości kryterium stabilności ruchu, w postaci  $(n-1)$  tego podwyznacznika układu, w zależności od zakładanej zmiennej wartości amplitudy  $A$  rozwiązania okresowego. Wartość  $a = A$ , przy której  $\Delta_{n-1} = 0$  (przy czym zerowy jest tylko jeden z  $(n-1)$  podwyznaczników, tzn.:  $\Delta_1 = a_{n-1}$ ;  $\Delta_2 = a_{n-1} \cdot b_{n-2}$ ;  $\Delta_3 = a_{n-1} \cdot b_{n-2} \cdot c_{n-3}$ ; .....  $\Delta_{n-1}$ ; wchodzących w skład  $\Delta_{n-1}$ , a wszystkie pozostałe oraz współczynniki równania charakterystycznego:  $a_u$ ;  $a_{u-1}$ ;  $a_{u-2}$ ; .....;  $a_0$ ; są dodatnie) jest amplitudą rozwiązania okresowego. Ruch okresowy jest stabilny jedynie wówczas, gdy:

$$\begin{aligned} \Delta_{u-1} &> 0 \text{ przy } a > A; \\ \Delta_{u-1} &< 0 \text{ przy } a < A. \end{aligned} \quad (11)$$

Podane, sprawdzone metody okazały się najprostsze w przypadku równań ruchu, z jakimi mamy do czynienia przy analizie procesu prowadzenia pojazdów szynowych, tak na torze prostym, jak w krzywiznach toru. Wnioski konstrukcyjne z analizy stabilności ruchu części biegowych w obu układach dynamicznych różnią się dość znacznie między sobą.

Analiza procesu prowadzenia pojazdów przez tor kolejowy w czasie ich ruchu w krzywiznach toru jest bardziej skomplikowana od analizy prowadzenia na torze prostym. Wynika to stąd, że:

- funkcje nieliniowe (2) i (3) oraz funkcje wielkości geometrycznych są w tym przypadku niesymetryczne, a poza tym bardziej skomplikowane w opisie matematycznym ze względu na konieczność uwzględnienia poszerzenia toru w krzywiznie, odkształcenia szyn oraz wpływu nierównoważonej siły odśrodkowej na różne naciski pionowe obu kół każdego zestawu kołowego na szyny;
- w równaniach ruchu występują składniki stałe, pochodzące od nierównoważonych sił odśrodkowych poszczególnych mas skupionych pojazdu.

W tej sytuacji drgania mas pojazdu, wynikające ze zjawisk charakteryzujących proces prowadzenia, są niesymetryczne.

Analiza drgań niesymetrycznych wymaga rozróżnienia we wszystkich współrzędnych uogólnionych oraz siach uogólnionych, w przypadku równań ruchu pojazdów szynowych, trzech składowych, a mianowicie: składowych stałych, wolnozmiennych oraz oscylacyjnych. Np. dla współrzędnej uogólnionej  $\eta_i$  (wychylenia promieniowego względem środkowego położenia na torze dowolnego zestawu kołowego) mamy:

$$\eta_i = \eta_{ie}^0 + \eta_i^{0x} + \eta_i^x; \quad (12)$$

gdzie w kolejności są podane trzy składowe: stała, wolnozmienna, oscylacyjna.

Wydzielone z równań ogólnych, równania składowych stałych wszystkich współrzędnych uogólnionych określają pewne średnie stałe położenia poszczególnych mas pojazdu względem toru przy ruchu ustalonym pojazdu w krzywiznie toru, t.j. ruchu ze stałą prędkością kątową  $\omega_2 = v/R$ , gdzie  $v$  — prędkość ruchu styczna do krzywizny;  $R$  — promień krzywizny toru.

Względem tych położań, przy przemieszczaniu się pojazdu w krzywiznie toru, poszczególne masy pojazdu mają jeszcze ruchy w postaci drgań, wynikające z procesu prowadzenia, w danym przypadku dwójakiego rodzaju, a mianowicie:

- ruchy wolnozmiennie w zasadzie silnie tłumione, a więc w postaci stabilnych drgań niestacjonarnych;
- ruchy oscylacyjne, które mogą mieć charakter drgań niestacjonarnych tłumionych, a więc stabilnych, jednak jedynie przy spełnieniu ściśle określonych warunków; w przeciwnym przypadku ruchy oscylacyjne są niestabilne, co przejawia się w wężykowaniu pojazdów w krzywiznach toru.

Analiza ruchu pojazdu w krzywiznie toru wymaga więc, w odniesieniu do procesu prowadzenia:

- rozwiązania równań składowych stałych współrzędnych uogólnionych, celem znalezienia nie tylko położań średnich poszczególnych mas pojazdu względem toru, lecz także średnich sił kierujących na zestawach kołowych prowadzących;
- sprawdzenia stabilności ruchu ze względu na składowe wolnozmiennie w otoczeniu składowych stałych, na podstawie wydzielonych równań składowych wolnozmiennych,
- sprawdzenia stabilności ruchu ze względu na składowe oscylacyjne w otoczeniu składowych stałych, na podstawie wydzielonych równań składowych oscylacyjnych.

Określenie „w otoczeniu składowych stałych współrzędnych uogólnionych” — oznacza wprowadzenie do analizy ruchu, w przypadkach obu składowych zmiennych, układów liniowych z funkcjami nieliniowymi zlinearyzowanymi w sensie zwykłym w otoczeniu składowych stałych współrzędnych uogólnionych.

Niestabilność ruchów w tych układach, co ma miejsce w zasadzie tylko w przypadku składowych oscylacyjnych, oznacza, że ruchy mas pojazdu w krzywiznie toru, mają charakter ustalonych drgań okresowych, stabilnych w układzie nieliniowym (wężykowanie pojazdu).

Analiza stabilności ruchu, przede wszystkim ze względu na składowe oscylacyjne, w układzie liniowym w otoczeniu składowych stałych, ma duże znaczenie praktyczne dla projektowania elementów biegowych pojazdów, gdyż zapewnienie środkami konstrukcyjnymi stabilności ruchu w tym układzie, a więc niedopuszczenie do wężykowania pojazdu w krzywiznie toru, powoduje z jednej strony znaczne poprawienie spokojności biegu pojazdu w krzywiznie, z drugiej zaś — zmniejszenie oddziaływania na tor (sił kierujących na zestawach kołowych prowadzących), co może mieć duże znaczenie dla ewentualnego zwiększenia prędkości jazdy w krzywiznie toru.

Linearyzacja funkcji w sensie zwykłym w otoczeniu składowych stałych współrzędnych uogólnionych, polegająca na rozwinięciu funkcji w szereg Taylora w otoczeniu składowej stałej i przyjęciu liniowych składników rozwinięcia, jest ogólnie znana. Natomiast jeśli chodzi o linearyzację harmoniczną funkcji nieliniowych, konieczną dla analizy układu nieliniowego w przypadku niestabilności ruchu ze względu na składowe oscylacyjne w układzie liniowym w otoczeniu składowych stałych, to

w przypadku ruchu w krzywiznie toru mogą wchodzić w grę trzy jej rodzaje:

- linearyzacja harmoniczna w otoczeniu składowych stałych współrzędnych uogólnionych przy nabieganiu w obu półokresach na jedną szynę,
- linearyzacja harmoniczna w otoczeniu składowych stałych przy nabieganiu zestawu kołowego na jedną szynę w jednym półokresie lub w części jednego półokresu,
- linearyzacja harmoniczna przy nabieganiu na obie szyny.

Stosowanie jednego z trzech wymienionych rodzajów linearyzacji harmonicznej zależy od zadanych warunków ruchu, promienia krzywizny toru oraz wartości (wraz ze znakami) składowych stałych współrzędnych uogólnionych.

Linearyzacja harmoniczna funkcji nieliniowych niesymetrycznych wymaga wyznaczenia, oprócz współczynników wzmocnienia, jeszcze jednej funkcji, a mianowicie funkcji przesunięcia  $F^0$ , przy czym, jeżeli rozwiązanie okresowe przyjmuje się w postaci pierwszej harmonicznej ruchu oscylacyjnego, czyli

$$\eta = \eta_i^0 + \eta_i^x; \quad \eta_i^x = A \sin \psi; \quad \psi = \omega t; \quad (13)$$

gdzie

$$\eta_i^0 = \eta_{ie}^0 + \eta_i^{0x}$$

to, w przypadku niezależności funkcji nieliniowej jednoznacznej od prędkości sygnału wejściowego, mamy:

$$\begin{aligned} F^0(A, \eta_i^0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\eta_i^0 + A \sin \psi) d\psi; \\ q(A, \eta_i^0) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f_k(\eta_i^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi; \\ q'(A, \eta_i^0) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f_k(\eta_i^0 + A \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \quad (14)$$

W wyniku linearyzacji harmonicznej, otrzymuje się:

$$f_k(\eta_i) = F^0(A, \eta_i^0) + q(A, \eta_i^0) \eta_i^x + \frac{q'(A, \eta_i^0)}{\omega} p \eta_i^x. \quad (15)$$

W zależności (15) ostatnie dwa składniki odnoszą się do składowej oscylacyjnej, zaś z pierwszego wydziela się składową stałą i wolnozmienną funkcji  $f_k(\eta_i)$ .

Wprowadzenie do zależności określających siły uogólnione funkcji nieliniowych w postaci (15), prowadzi do trzech układów równań, wydzielonych z równań w postaci ogólnej, dla trzech rodzajów składowych współrzędnych uogólnionych. Przykadowo, w tym samym celu jak (6) i (10), podany jest niżej układ równań składowych oscylacyjnych ruchu w krzywiznie toru wózka 2-osiowego symetrycznego ze sprzężonym prowadzeniem osi w ostoi:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & 0 & 0 & 0 & D_{26} \\ 0 & 0 & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ 0 & 0 & D_{43} & D_{44} & 0 & D_{46} \\ D_{51} & 0 & D_{53} & 0 & D_{55} & 0 \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1^x \\ \psi_1^x \\ \eta_2^x \\ \psi_2^x \\ \eta^x \\ \psi^x \end{bmatrix} = 0; \quad (16)$$

w którym dwie pierwsze współrzędne uogólnione, w postaci składowych oscylacyjnych, opisują ruch przedniego zestawu kołowego, dwie następne — ruch tylnego zestawu kołowego i dwie ostatnie — ruch ostoi wózka. W przypadku układu, w którym funkcje nieliniowe są zlinearyzowane w sensie zwykłym w otoczeniu składowych stałych współrzędnych uogólnionych, współczynniki wszystkich wielomianów operatorowych  $D_{ij}$  są stałe. Natomiast

dla układu nieliniowego, w którym w danym przypadku funkcje nieliniowe niesymetryczne zostały zlinearyzowane harmonicznie w otoczeniu składowych stałych, układ równań pozostaje ten sam, a tylko w niektórych wielomianach operatorowych  $D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}, D_{33}, D_{34}, D_{43}, D_{44}$  pojawiają się parametry zmienne zależne od amplitudy rozwiązania okresowego.

W przypadkach innych rozwiązań konstrukcyjnych wózków 2-osiowych, a więc z prowadzeniem osi z luzami w ostoi, względnie z prowadzeniem sztywnym w płaszczyźnie poziomej, układy znacznie upraszczają się, gdyż sprowadzają się do dwóch równań.

Analiza ruchów oscylacyjnych, będących rezultatem procesu prowadzenia w układzie nieliniowym, umożliwia ocenę wpływu tych ruchów na wzrost statycznej siły kierującej, który, pomimo często parumilimetrowych amplitud ruchów okresowych (z większymi amplitudami mamy do czynienia przy nabieganiu w czasie tego ruchu na obie szyny), okazuje się w wielu przypadkach dość znaczny.

Nowoczesna analiza procesu prowadzenia pojazdów w krzywiznach toru pozwala na ilościowe poznanie wszystkich zjawisk, często dotychczas niejasnych, towarzyszących temu procesowi.

Za pierwszy w historii budowy taboru kolejowego przykład założenia świadomego z góry układu dynamicznego, w danym przypadku liniowego, przy projektowaniu pojazdów szynowych, należy niewątpliwie uznać projektowanie pojazdów wchodzących w skład pociągu APT Kolei BR. Na podstawie dotychczas opublikowanych danych, dotyczących własności biegowych tego pociągu, można sądzić, że zamierzony cel nie został jeszcze w pełni osiągnięty.

Z innych zarządów kolejowych, dla których projektuje się pojazdy w oparciu o pewne przyjęte zasady, można wymienić w pierwszym rzędzie Koleje SNCF, których nowoczesne pojazdy mają rozwiązania konstrukcyjne części biegowych spełniające w określonym stopniu wymagania układu nieliniowego, choć ze znanych publikacji nie można sądzić, że prowadzi się dokładną analizę procesu prowadzenia tych pojazdów w torze — szczególnie w odniesieniu do układu nieliniowego, na temat którego brak jest dotychczas jakichkolwiek publikacji, któreby można było wykorzystać w praktyce projektowania.

Poza tym koleje JNR, których pojazdy dla szybkiego ruchu są rozwiązane, w odróżnieniu od pojazdów Kolei SNCF, dość wyraźnie pod kątem widzenia zapewnienia procesu prowadzenia przez tor kolejowych w układzie liniowym.

Poza wymienionymi przypadkami, na podstawie tylko znajomości z literatury rozwiązań konstrukcyjnych pojazdów eksploatowanych w innych zarządach kolejowych, a szczególnie pojazdów nowoczesnych przystosowanych do ruchu, z dużymi prędkościami, nie można wyciągnąć, praktycznie biorąc, żadnych wniosków, świadczących o przystosowaniu jednoznacznych tych pojazdów do należytej współpracy kół z szynami w przyjętym, z góry założonym, układzie dynamicznym (oczywiście, w tym przypadku proces prowadzenia przebiegać musi niewłaściwie w układzie nieliniowym).

Ponieważ jednak, jak wynika z przytoczonych przykładów, osiąga się już w niektórych zarządach kolejowych praktyczne, poważne nawet, efekty ruchowe i eksploatacyjne w nowoczesnych pojazdach z częściami biegowymi zaprojektowanymi według pewnych logicznych zasad, opartych albo na opracowanych pewnych teoriach ruchu, albo tylko na szczegółowych badaniach eksperymentalnych, przeto nie ulega wątpliwości, że w przyszłym rozwoju środków technicznych transportu kolejowego coraz większą rolę będzie odgrywała teoria procesu prowadzenia pojazdów przez tor kolejowy.

Na podstawie obecnego rozeznania problematyki w omawianej dziedzinie, można stwierdzić, że jedynie wymieniona teoria przy pomocy matematycznych środków technicznych jakimi obecnie rozporządzamy, jest w stanie zapewnić racjonalny dobór parametrów konstrukcyjnych części biegowych, które powinny zapewnić o wiele lepsze właściwości biegowe budowanych w przyszłości pojazdów, od tych, jakie obecnie są przeważnie uzyskiwane.